

Robert HANUS

POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

Statystyczne błędy estymacji czasu opóźnienia przy zastosowaniu fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy

Dr inż. Robert HANUS

Adiunkt w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się głównie zagadnieniami związanymi z modelowaniem i analizą sygnałów losowych oraz statystycznymi metodami pomiaru opóźnienia. Stypendysta NATO, autor lub współautor ponad 70 publikacji w czasopiśmie i materiałach konferencyjnych oraz 2 patentów.



e-mail: rohan@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono zasadę pomiaru czasu opóźnienia przy wykorzystaniu fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy pomiarowych sygnałów losowych. Omówiono niektóre właściwości metody i przeanalizowano błędy statystyczne estymacji opóźnienia. Przedstawiono przykładowe wyniki badań symulacyjnych.

Słowa kluczowe: estymacja czasu opóźnienia, wzajemna gęstość widmowa mocy, błędy statystyczne, sygnały losowe.

Statistical errors of time delay estimation using phase of cross-spectral density function

Abstract

This article presents the principle of time delay measurement employing the phase of cross-spectral density function of measurement random signals. Some features of the method are discussed and statistical errors of time delay estimation are analysed. The results of simulating experiments are presented.

Keywords: time delay estimation, cross-spectral density function, statistical errors, random signals.

1. Wprowadzenie

W ostatnim półwieczu opracowano szereg metod pomiaru opóźnienia wykorzystujących analizę statystyczną sygnałów losowych. Szybki wzrost mocy obliczeniowej sprzętu, szczególnie w ostatnich latach, umożliwia ich wdrażanie oraz rozwijanie kolejnych, wykorzystujących złożone algorytmy przetwarzania danych [1]. Wśród metod klasycznych, stosowanych dla sygnałów stacjonarnych do najbardziej znanych należą: metody korelacyjne w dziedzinie czasu i metoda oparta na analizie charakterystyki fazowej wzajemnej gęstości widmowej mocy w dziedzinie częstotliwości. Do analizy sygnałów niestacjonarnych stosuje się głównie metody parametryczne. W literaturze opisywane są także metody wykorzystujące m.in. statystyki wyższych rzędów, transformaty Hilberta i falkową. Zakres stosowania poszczególnych metod zależy głównie od typu oraz parametrów analizowanych sygnałów i jest często bardzo ograniczony. Przykładowo znajdują one zastosowanie w technice radarowej, radioastronomii, medycynie, stosowane są do wykrywania dróg przenoszenia zakłóceń, pomiarów prędkości, analizy zjawisk meteorologicznych.

Metoda wykorzystująca fazę wzajemnej gęstości widmowej mocy jest jedną z szerzej stosowanych. Oprócz zastosowań technicznych [2-6] w publikacjach z ostatnich lat przedstawiane są aplikacje tej metody do analizy niektórych sygnałów biomedycznych [7-10].

2. Zasada wyznaczania opóźnienia z fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy

W wielu przypadkach pomiaru opóźnień transportowych zależność sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ otrzymywanych z dwóch czujników można przedstawić wzorem:

$$y(t) = c \cdot x(t - \tau_0) + z(t), \quad (1)$$

gdzie: $x(t)$ - stacjonarny, ergodyczny sygnał losowy o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa $N(0, \sigma_x)$; c - stały współczynnik; $\tau_0 = d/V$ - opóźnienie transportowe równe ilorazowi odległości rozmieszczenia czujników d i prędkości sygnału V ; $z(t)$ - stacjonarny, nieskorelowany z sygnałem $x(t)$ szum biały o rozkładzie $N(0, \sigma_z)$.

Funkcję korelacji wzajemnej dla sygnałów związanych zależnością (1) można przedstawić w postaci [2]:

$$K_{xy}(\tau) = E[(x(t)y(t+\tau))] = E[(x(t)\{cx(t+\tau-\tau_0)+z(t+\tau)\})] = (2) \\ = cE[(x(t)\{x(t+\tau-\tau_0)\})] = cK_{xx}(\tau - \tau_0),$$

gdzie $E[\]$ oznacza wartość oczekiwaną, a $K_{xx}(\tau)$ jest funkcją autokorelacji sygnału $x(t)$.

Wykorzystując zależność łączące funkcje korelacji i gęstości widmowej mocy, na podstawie równania (2) otrzymamy wzajemną jednostronną gęstość widmową mocy (WGWM) $G_{xy}(f)$ w postaci:

$$G_{xy}(f) = c G_{xx}(f) e^{-j2\pi f \tau_0}. \quad (3)$$

Wzajemna gęstość widmowa mocy jest wielkością zespoloną, zależność (3) można więc zapisać jako układ równań:

$$\left| G_{xy}(f) \right| = c G_{xx}(f), \quad (4)$$

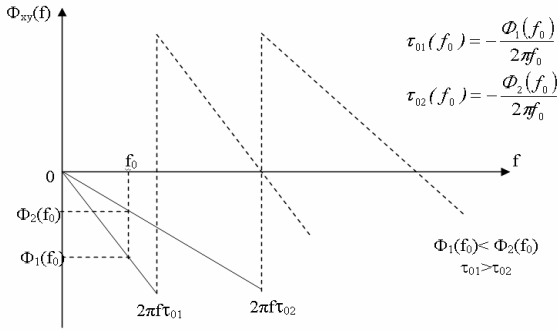
$$\Phi_{xy}(f) = \arg\{G_{xy}(f)\} = 2\pi f \tau_0. \quad (5)$$

Faza WGWM jest liniową funkcją częstotliwości (dla prędkości $V = \text{const}$) i ma normalny rozkład prawdopodobieństwa. Z równania (5) można wyznaczyć opóźnienie τ_0 :

$$\tau_0 = -\frac{\Phi_{xy}(f)}{2\pi f}. \quad (6)$$

W zależności od notacji przyjętej przez producentów oprogramowania, dla sytuacji gdy sygnał $x(t)$ wyprzedza $y(t)$ ($\tau > 0$) uzyskuje się dodatnie lub ujemne wartości fazy WGWM. W niniejszej pracy uwzględniono ten drugi przypadek, stąd minus w zależności (6) i pochodnych.

Przykładowe przebiegi charakterystyk fazowych WGWM wzajemnie opóźnionych sygnałów stochastycznych $x(t)$ i $y(t)$ dla dwóch różnych wartości τ_0 przedstawiono na rys. 1. Z zależności (6) wynika, że do wyznaczenia opóźnienia dla wybranej częstotliwości $f=f_0$ wystarczy znajomość wartości funkcji $\Phi_{xy}(f_0)$ (w radianach). Gdy nie jest konieczna znajomość opóźnienia dla konkretnej częstotliwości, można zastosować metodę regresji liniowej do aproksymacji charakterystyki fazowej WGWM, co opisano w dalszej części artykułu.



Rys. 1. Przykładowe przebiegi charakterystyk fazowych $\Phi_{xy}(f)$ dla dwóch różnych opóźnień czasowych τ_{01} i τ_{02}

Fig. 1. An exemplary courses of phase characteristics $\Phi_{xy}(f)$ for two different time delays τ_{01} and τ_{02}

3. Estymacja opóźnienia z fazy WGWM

Estymator fazy WGWM $\hat{\Phi}_{xy}(f)$ przy wymienionych na wstępie założeniach dotyczących sygnałów jest estymatorem nieobciążonym. Wariancja tego estymatora może być aproksymowana zależnością [2, 4]:

$$Var[\hat{\Phi}_{xy}(f)] \approx \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f)}{2\gamma_{xy}^2(f)}, \quad (7)$$

gdzie $\gamma_{xy}(f)$ jest funkcją koherencji, określającą podobieństwo sygnałów w dziedzinie częstotliwości i będącą unormowaną wzajemną gęstością widmową mocy. W praktyce wykorzystuje się kwadrat modułu tej funkcji:

$$|\gamma_{xy}(f)|^2 = \gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)}. \quad (8)$$

Funkcja koherencji dla wszystkich częstotliwości spełnia warunek $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$.

Przy wyznaczaniu charakterystyk sygnałów losowych (w szczególności gęstości widmowych) zwykle stosuje się wygładzanie częstotliwościowe lub odcinkowe. W tym ostatnim przypadku dla liczby N_d uśrednień wariancja wygładzonego estymatora $\tilde{\Phi}_{xy}(f)$ przyjmuje postać:

$$Var[\tilde{\Phi}_{xy}(f)] = \frac{Var[\hat{\Phi}_{xy}(f)]}{N_d} \approx \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f)}{2N_d \gamma_{xy}^2(f)}, \quad (9)$$

a odchylenie standardowe $\sigma[\tilde{\Phi}_{xy}(f)]$ będzie równe:

$$\sigma[\tilde{\Phi}_{xy}(f)] \approx \left\{ \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f)}{2N_d \gamma_{xy}^2(f)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Odchylenie standardowe estymatora opóźnienia wyznaczanego na podstawie (6) przy znanych wartościach parametrów (9) lub (10) można określić wykorzystując formułę przenoszenia wariancji. Przy pośrednim pomiarze wielkości $Y = f(X)$ odchylenie standardowe $\sigma[Y]$ można określić z wyrażenia:

$$\sigma[Y] \approx \left| \frac{dY}{dX} \right| \sigma[X], \quad (11)$$

gdzie $\sigma[X]$ - odchylenie standardowe wielkości X o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. W rozważanym przypadku $Y = \tau_0$ oraz $X = \Phi_{xy}(f)$. Na podstawie (11) uzyskuje się:

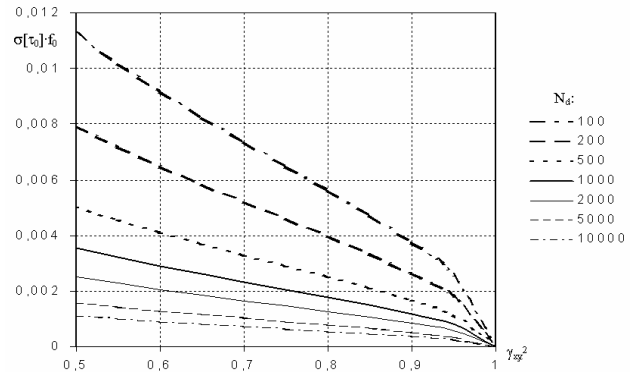
$$\sigma[\tau_0] \approx \frac{1}{\left| \frac{d\Phi_{xy}(f)}{d\tau_0} \right|} \sigma[\Phi_{xy}(f)]. \quad (12)$$

Korzystając z równań (5), (10) i (12) po przekształceniach otrzymuje się zależność pozwalającą określić odchylenie standardowe estymatora opóźnienia dla $f = f_0$ [11]:

$$\sigma[\hat{\tau}_0] \approx \frac{1}{2\pi f_0} \left\{ \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f_0)}{2N_d \gamma_{xy}^2(f_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} [\text{s}]. \quad (13)$$

Z analizy zależności (13) wynikają następujące wnioski:

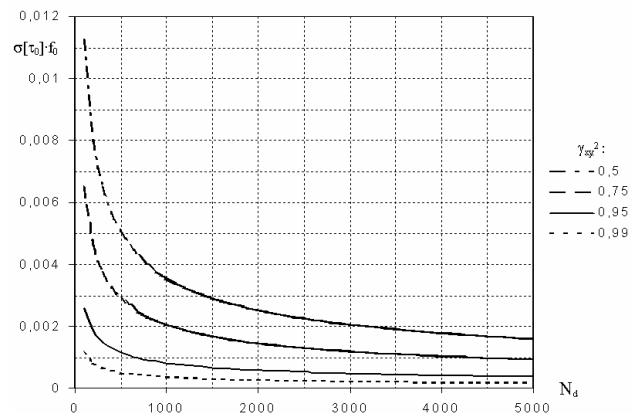
- Odchylenie standardowe opóźnienia dąży do zera gdy funkcja koherencji przyjmuje wartość 1, co będzie miało miejsce w przypadku braku zakłócenia w sygnale opóźnionym (1). Zależności $\sigma[\hat{\tau}_0] \cdot f_0 = f(\gamma_{xy}^2)$ dla kilku wartości liczby uśrednień N_d , obliczone na podstawie (13) przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Zależności $\sigma[\hat{\tau}_0] \cdot f_0 = f(\gamma_{xy}^2)$ dla różnych wartości liczby uśrednień N_d

Fig. 2. The dependence $\sigma[\hat{\tau}_0] \cdot f_0 = f(\gamma_{xy}^2)$ for different values of N_d averaging number

- Odchylenie standardowe opóźnienia maleje przy wzroście N_d , ale zwiększanie liczby uśrednień wydłuża czas pomiaru. Obliczone z (13) zależności $\sigma[\hat{\tau}_0] \cdot f_0 = f(N_d)$ dla kilku wartości funkcji koherencji pokazano na rys. 3.

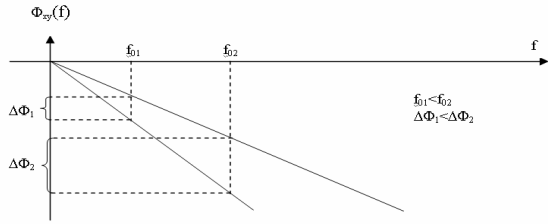


Rys. 3. Zależności $\sigma[\hat{\tau}_0] \cdot f_0 = f(N_d)$ dla różnych wartości funkcji koherencji

Fig. 3. The dependence $\sigma[\hat{\tau}_0] \cdot f_0 = f(N_d)$ for different values of coherence function

- Odchylenie standardowe opóźnienia jest odwrotnie proporcjonalne do częstotliwości f_0 , dlatego należy wybierać duże warto-

ści tej częstotliwości. Dla większych wartości f_0 przy tych samych zmianach opóźnienia rosną też zmiany fazy WGWM (rys. 4), a więc wzrasta czułość metody.



Rys. 4. Zależność zmian fazy $\Delta\Phi$ od doboru częstotliwości f_0
Fig. 4. The dependence of phase changes $\Delta\Phi$ upon the choice of frequency f_0

Ponieważ rozkład prawdopodobieństwa fazy WGWM jest rozkładem normalnym, tego typu rozkład będzie miało również estymowane opóźnienie.

W analizie widmowej sygnałów stacjonarnych obecnie najczęściej stosuje się algorytmy FFT bezpośrednio dla ciągu próbek sygnałów, uzyskanych ze stałym odstępem próbkowania Δt , będącym odwrotnością odpowiednio dobranej częstotliwości próbkowania f_s , oraz procedurę nazywaną metodą Welch. Przebiega ona następująco [4, 12]:

- zbiory próbek sygnałów x_n i y_n o długościach N_{total} dzielone są na N_d jednakowych segmentów o liczbie próbek N ;
- każdy segment podlega okienkowaniu wybraną funkcją okna, przy czym segmenty te mogą się częściowo nakładać (overlapping);
- dla każdego segmentu wykorzystując skończoną dyskretną transformatę Fouriera wyznacza się odpowiednie zgrubne estymatory gęstości widmowych mocy $\hat{G}_{xx}(f_k)$, $\hat{G}_{yy}(f_k)$ i wzajemnej gęstości widmowej $\hat{G}_{xy}(f_k)$ dla dyskretnych wartości częstotliwości $f_k = k/N\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ (do dalszej analizy wykorzystuje się pierwsze $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ wartości). Rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości wynosi $\Delta f = 1/N\Delta t$;
- koryguje się wpływ okienkowania przez wymnożenie zgrubnych estymatorów gęstości widmowych przez odpowiedni współczynnik, zależny od typu okna.

Ze względu na bardzo złe właściwości statystyczne estymatorów gęstości widmowych konieczne jest ich wygładzanie. W przypadku stosowania wygładzania odcinkowego uśrednia się uzyskane estymatory zgrubne uzyskane dla wszystkich N_d segmentów. Estymator fazy WGWM oblicza się z zależności $\hat{\Phi}_{xy}(f_k) = \arctg[\hat{Q}_{xy}(f_k)/\hat{C}_{xy}(f_k)]$, gdzie $C_{xy}(f)$ i $Q_{xy}(f)$ są odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną wzajemnej gęstości widmowej mocy. Zwykle procedury numeryczne stosowane do obliczania wartości funkcji arctg powodują powstawanie nieciągłości w przebiegu fazy WGWM (rys. 1), co ogranicza zakres użytecznych częstotliwości. Dlatego należy dążyć do wyeliminowania tego zjawiska stosując procedury rozwijania fazy.

Uwzględniając dyskretne wartości częstotliwości zależności (6) i (13) dla wybranej częstotliwości f_{0k} przyjmują postać:

$$\hat{\tau}_{0k} = -\frac{\tilde{\Phi}_{xy}(f_{0k})}{2\pi f_{0k}} \quad (14)$$

$$\sigma[\hat{\tau}_{0k}] \approx \frac{1}{2\pi f_{0k}} \left\{ \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f_{0k})}{2N_d \gamma_{xy}^2(f_{0k})} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Ponieważ charakterystyka $\Phi_{xy}(f)$ jest liniowa i przechodzi przez początek układu współrzędnych, opóźnienie można wyznaczyć

przy wykorzystaniu współczynnika kierunkowego a linii regresji liniowej fazy WGWM względem częstotliwości:

$$\hat{\tau}_0 = -\frac{1}{2\pi} \hat{a} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sum_{k=0}^{N/2-1} f_k \tilde{\Phi}_{xy}(f_k)}{\sum_{k=0}^{N/2-1} f_k^2}, \quad (16)$$

Estymator odchylenia standardowego estymatora współczynnika a może być przedstawiony jako [6]:

$$\hat{\sigma}[\hat{a}] = \left\{ \sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{\sigma^2[\tilde{\Phi}_{xy}(f_k)]}{f_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Wówczas estymator odchylenia standardowego estymatora opóźnienia po uwzględnieniu (10) dla dyskretnych wartości częstotliwości będzie miał postać:

$$\hat{\sigma}[\hat{\tau}_0] \approx \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2N_d} \sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f_k)}{\gamma_{xy}^2(f_k)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Ponieważ w większości przypadków spotykanych w praktyce nie jest znana prawdziwa wartości funkcji koherencji, wartość tą trzeba zastąpić estymatorem obliczonym na podstawie wygładzonych estymatorów gęstości widmowych:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f_k) = \frac{|\tilde{G}_{xy}(f_k)|^2}{\tilde{G}_{xx}(f_k)\tilde{G}_{yy}(f_k)} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{N_d} \hat{G}_{xyi}(f_k) \right|^2}{\sum_{i=1}^{N_d} \hat{G}_{xii}(f_k) \sum_{i=1}^{N_d} \hat{G}_{yiy}(f_k)}, \quad (19)$$

Błędy statystyczne estymatora (19) opisywane są złożonymi zależnościami i nie jest możliwe analityczne określenie ich wartości dla nieznannej rzeczywistej wartości funkcji koherencji [5]. W celu ograniczenia wartości tych błędów, oraz wpływu innych przyczyn obciążenia estymatora zaleca się zwiększanie liczby uśrednień (N_d tym większe, im mniejsza wartość funkcji koherencji) oraz liczby próbek ($N \gg l$, gdzie $l = \tau_0/\Delta t$) [2, 6, 10]. Konsekwencją zastosowania estymatora (19) w miejsce rzeczywistej wartości funkcji koherencji w zależnościach (15) i (18) może być rozrzut wartości uzyskiwanych ocen odchylenia standardowego dla kolejnych realizacji sygnałów.

Eksperymentalne odchylenie standardowe estymatora współczynnika kierunkowego prostej regresji $s[\hat{a}]$ może być określone [6, 13] na podstawie uzyskanych z pomiarów wartości fazy WGWM ze wzoru:

$$s[\hat{a}] = \left\{ \frac{1}{(m-1)} \left[\sum_{k=1}^m \tilde{\Phi}_{xyk}^2(f_k) - \frac{\left[\sum_{k=1}^m f_k \tilde{\Phi}_{xyk}(f_k) \right]^2}{\sum_{k=1}^m f_k^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^m f_k^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

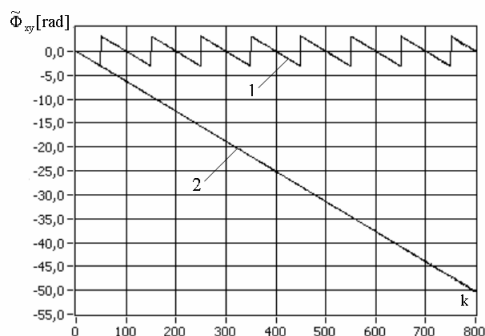
Estymator eksperymentalnego odchylenia standardowego estymatora opóźnienia (16) można wyznaczyć z zależności:

$$s[\hat{\tau}_0] = \frac{1}{2\pi} s[\hat{a}] = \left\{ \frac{1}{4\pi^2 (m-1) \sum_{k=1}^m f_k^2} \left[\sum_{k=1}^m \tilde{\Phi}_{xyk}^2(f_k) - \frac{\left[\sum_{k=1}^m f_k \tilde{\Phi}_{xyk}(f_k) \right]^2}{\sum_{k=1}^m f_k^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

We wzorach (20) i (21) m oznacza liczbę wartości uwzględnianą przy obliczaniu prostej regresji (niekoniecznie muszą być wykorzystane wszystkie $N/2$ wartości) Często część wartości pomija się ze względu na występujące zniekształcenia charakterystyki fazowej. W takim przypadku estymator opóźnienia (16) również należy wyznaczyć na podstawie tych samych m wartości fazy i częstotliwości.

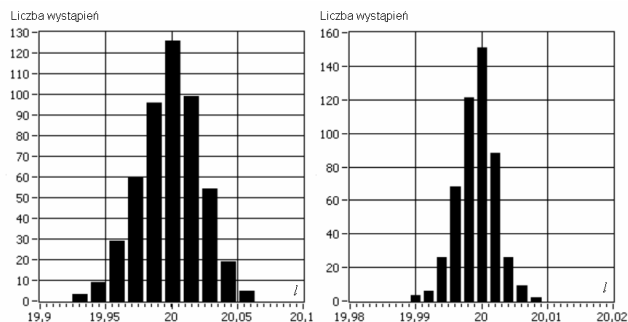
4. Eksperyment symulacyjny

W celu eksperymentalnej weryfikacji właściwości metody wykorzystano oprogramowanie LabVIEW, które wybrano ze względu na planowaną realizację w tym środowisku przyrządów wirtualnych do pomiaru opóźnienia. Generowano wzajemnie opóźnione sygnały stochastyczne, będące dyskretną wersją modelu (1) [14], i wyznaczano estymatory fazy WGWM dla różnych parametrów statystycznych sygnałów oraz różnych parametrów analizy. Przykład uzyskanej bezpośrednio i z wykorzystaniem procedury rozwijania fazy charakterystyki fazowej WGWM pokazano na rys. 5. Następnie określano opóźnienie na podstawie zależności (14) i z wykorzystaniem regresji liniowej (metoda najmniejszej sumy kwadratów). W przedstawionej tu pierwszej fazie badań w celu bezpośredniego porównania właściwości różnych odmian metody wykonano doświadczenia polegające na wielokrotnym powtarzaniu eksperymentu dla realizacji sygnałów o tych samych parametrach statystycznych. Na rysunku 6 przedstawiono przykładowe histogramy wyników estymacji opóźnienia dla jednego punktu charakterystyki fazowej WGWM (a) i z wykorzystaniem regresji liniowej (b) uzyskane dla zadanej wartości opóźnienia 20 próbek i liczbie powtórzeń 500. Pozostałe parametry eksperymentu: $N = 2000$, $N_d = 100$, $f_{0k} = 400$, $m = 600$, $\sigma_x / \sigma_z = 5$, $c = 1$.



Rys. 5. Przebieg fazy WGWM przed (1) i po zastosowaniu (2) procedury rozwijania fazy

Fig. 5. Phase of cross-spectral density function without unwrapping (1) and after use phase unwrapping procedure (2)



Rys. 6. Histogramy wyników estymacji opóźnienia dla jednego punktu charakterystyki fazowej WGWM (a) i z wykorzystaniem regresji liniowej (b)

Fig. 6. Histograms of results of time delay estimation when one-point of phase is used (a) and when linear regression is used (b)

W obydwu przypadkach uzyskano średnie wartości opóźnienia równe wartości zadanej, co świadczy o braku obciążenia, natomiast eksperymentalne odchylenie standardowe w przypadku estymacji z wykorzystaniem metody regresji liniowej było dziesięciokrotnie mniejsze niż dla metody jednopunktowej.

5. Podsumowanie

Statystyczna metoda pomiaru opóźnienia oparta na analizie przebiegu charakterystyki fazowej wzajemnej gęstości widmowej mocy może być zastosowana w warunkach analogicznych jak metody korelacyjne. Wadą omawianej metody jest konieczność zastosowania uśredniania, co wydłuża czas pomiaru. Zaletą jest możliwość zastosowania w przypadkach, gdy prędkość lub opóźnienie są funkcją częstotliwości (tzw. ośrodki dyspersyjne [2]).

W artykule przeanalizowano błędy statystyczne metody, od których w głównej mierze zależy dokładność pomiaru. Stwierdzono, że najmniejsze wartości odchylenia standardowego opóźnienia uzyskuje się dla sygnałów o dużej koherencji oraz przy dużej liczbie uśrednień. Gdy nie jest wymagana znajomość opóźnienia dla konkretnej częstotliwości celowe jest zastosowanie do aproksymacji charakterystyki fazowej WGWM metody regresji liniowej, co powoduje zmniejszenie wariancji estymatora opóźnienia. Badania właściwości metody będą kontynuowane przy wykorzystaniu zarówno metod symulacyjnych jak i układów oraz sygnałów rzeczywistych.

6. Literatura

- [1] Dwyer A.: A survey of techniques for the estimation and compensation of processes with time delay. Technical Report, Dublin Institute of Technology 2000.
- [2] Bendat J.S., Piersol A.G.: Random data - analysis and measurement procedures. John Wiley, New York 2000.
- [3] Bendat J.S., Piersol A.G.: Engineering applications of correlation and spectral analysis. John Wiley, New York 1993.
- [4] Bendat J.S., Piersol A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
- [5] Carter C.G.: Coherence and time delay estimation. Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 2, February 1987.
- [6] Piersol A. G.: Time delay estimation using phase data. IEEE Transactions on ASSP, Vol. 29, No. 3, June 1981.
- [7] Govindan R.B., Raethjen J., Koper F. et al.: Estimation of time delay by coherence analysis. Physica A: Statistical and Theoretical Physics. Vol. 350, Iss. 2-15, May 2005.
- [8] Müller T., Lauk M., Reinhard M., et al.: Estimation of delay times in biological systems. Annals of Biomedical Engineering, Vol. 31, 2003.
- [9] Timmer J., Lauk M., Pfleger W., Deuschlg.: Cross-spectral analysis of physiological tremor and muscle activity. Biological Cybernetics 78, 1998.
- [10] Wang S.Y., Xugang L., Yianni J et al. Optimising coherence estimation to assess the functional correlation of tremor-related activity between the subthalamic nucleus and the forearm muscles. Journal of Neuroscience Methods 136 (2004).
- [11] Hanus R.: Statistical error analysis of time delay measurement by using phase of cross-spectral density function. Systems Analysis Modelling Simulation Vol. 43, No. 8, 2003.
- [12] Gajda J. Statystyczna analiza danych pomiarowych. Wydawnictwo AGH, Kraków 2002.
- [13] Skubis T.: Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiarów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.
- [14] Hanus R.: Modelling of the stationary stochastic signals used in time delay and velocity measurements of solid objects. Systems Analysis Modelling Simulation Vol. 40, No 3, 2001.