

Paweł FOTOWICZ¹, M. Jerzy KORCZYŃSKI², Andrzej HETMAN²

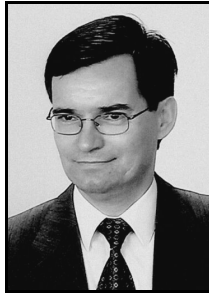
¹GLÓWNY URZĄD MIAR,

²POLITECHNIKA ŁÓDZKA, INSTYTUT ELEKTROTECHNIKI TEORETYCZNEJ, METROLOGII I MATERIAŁOZNAWSTWA, ZAKŁAD METROLOGII ELEKTRYCZNEJ I ELEKTROTECHNIKI SAMOCHODOWEJ

Zastosowanie probabilistycznego modelu obliczania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu omomierza i woltomierza

Mgr inż. Paweł FOTOWICZ

Studia ukończył w 1981 r. na Politechnice Warszawskiej. Zajmuje się problematyką niepewności pomiaru, tematyce tej poświęcił w ostatnich latach ponad 55 publikacji.



e-mail: uncert@gum.gov.pl

Dr inż. Andrzej HETMAN

Studia ukończył w 1968 r., doktorat w 1976, zainteresowania: niepewność pomiaru, systemy pomiarowe oraz cyfrowe przetwarzanie sygnałów. 55 publikacji.



e-mail: ahetman@p.lodz.pl

Dr inż. M. Jerzy KORCZYŃSKI

Studia ukończył w 1973 r., doktorat w 1981, zainteresowania: niepewność pomiaru, systemy pomiarowe oraz cyfrowe przetwarzanie sygnałów. 53 publikacje.



e-mail: jerzykor@p.lodz.pl

Prawdopodobieństwo to określane mianem poziomu ufności wyznacza pewien przedział będący odpowiednikiem przedziału ufności wyrażanego w języku statystyki matematycznej [3]. W powyższym sensie rozumiany przedział ufności dla określonej wielkości mierzonej proponuje się jako miarę niepewności jej pomiaru [4]. Rozkład dla wielkości mierzonej otrzymuje się w wyniku propagacji rozkładów dla wielkości wejściowych poprzez model matematyczny wielkości wyjściowej [5]. Jest to nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru [6].

2. Wielkość mierzona

Wielkość mierzona nazywana wielkością wyjściową y jest funkcją wielu wielkości wejściowych x_i

$$y = f(x_1, \dots, x_N) \quad (1)$$

Wielkość mierzona można traktować jak zmienną losową Y powiązaną z wielkościami wejściowymi X_i , również traktowanymi jako zmienne losowe, zależnością funkcyjną

$$Y = f(X_1, \dots, X_N) \quad (2)$$

Każdą zmienną losową można przedstawić jako sumę dwóch niezależnych zmiennych losowych

$$Y = \bar{Y} + \Delta Y \quad (3)$$

Pierwsza z nich \bar{Y} jest zmienną losową opisaną rozkładem delta Diraca o na ogół niezerowej wartości oczekiwanej $\mu(\bar{Y})$ i zawsze zerowym odchyleniu standardowym $\sigma(\bar{Y})$. Można przyjąć założenie, że druga zmienna ΔY opisana jest symetrycznym, centrowanym rozkładem, o zerowej wartości oczekiwanej $\mu(\Delta Y)$ i zawsze niezerowym odchyleniu standardowym $\sigma(\Delta Y)$. W wyniku złożenia te dwie zmienne tworzą zmienną losową Y opisaną symetrycznym rozkładem z funkcją gęstości prawdopodobieństwa $g(\eta)$, o na ogół niezerowej wartości oczekiwanej $\mu(Y)$ i zawsze niezerowym odchyleniu standardowym $\sigma(Y)$. Podobne sumy zmiennych losowych można zbudować dla wielkości wejściowych

$$X_i = \bar{X}_i + \Delta X_i \quad (4)$$

przy czym zmienna losowa X_i opisana jest funkcją gęstości $g_i(\xi_i)$ z wartością oczekiwaną $\mu(X_i)$ i odchyleniem standardowym $\sigma(X_i)$. Zmienna \bar{X}_i ma rozkład delta Diraca o na ogół niezerowej wartości oczekiwanej $\mu(\bar{X}_i)$ i zawsze zerowym od-

Streszczenie

Przedmiotem niniejszego artykułu jest zagadnienie obliczania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu woltomierza i omomierza z wykorzystaniem probabilistycznego modelu opisu matematycznego wielkości mierzonej. Liniowy model pomiaru umożliwia zastosowanie zasady propagacji rozkładów w oparciu o splot wielkości wejściowych. W obliczeniach posłużono się przybliżoną metodą analityczną oraz metodą dokładną z zastosowaniem szybkiej transformaty Fouriera. Obie metody są oryginalnymi opracowaniami autorów.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, wzorcowanie, szybka transformata Fouriera

Application of probabilistic model for calculating measurement uncertainty in calibration of ohmmeter and voltmeter

Abstract

The calculation of uncertainties in calibration of voltmeter and ohmmeter calibration based on probabilistic model is presented here. The probabilistic model used for calculation of uncertainties allowed to apply two methods: so called analytical method and FFT method based on Fast Fourier Transform. Both methods are original work of all three co-authors of the paper.

Keywords: uncertainty measurement, calibration, Fast Fourier Transform

1. Wstęp

Probabilistyczny model niepewności pomiaru opiera się na założeniu, że każdej wielkości mierzonej można przypisać zbiór możliwych dla niej wartości [1]. Zbiory takie można opisywać przy użyciu zmiennych losowych ciągłych lub dyskretnych [2]. Zmienne powyższe charakteryzują się widmem, w obrębie którego można zdefiniować obszar prawdopodobieństwa zawierający przeważającą część populacji.

chyleniu standardowym $\sigma(\bar{X}_i)$, a zmienna ΔX_i ma symetryczny, centrowany rozkład z zerową wartością oczekiwaną $\mu(\Delta X_i)$ i niezerowym odchyleniem standardowym $\sigma(\Delta X_i)$.

Ponieważ zmienna losowa Y powiązana jest zależnością funkcyjną (2) ze zmiennymi X_i to

$$Y = f(\bar{X}_1 + \Delta X_1, \dots, \bar{X}_N + \Delta X_N) \quad (5)$$

Rozwijając w szereg Taylora powyższą funkcję i ograniczając się tylko do dwóch pierwszych wyrazów tego szeregu, otrzymujemy

$$Y = \bar{Y} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta X_i \quad (6)$$

co można zapisać w postaci

$$Y = \bar{Y} + \sum_{i=1}^N c_i \Delta X_i \quad (7)$$

gdzie

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad (8)$$

Każdą ze zmiennych losowych ΔX_i można zapisać w postaci sumy dowolnej liczby zmiennych losowych niezależnych

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^M \delta X_{i,j} \quad (9)$$

Należy przyjąć założenie, że zmienne losowe $\delta X_{i,j}$ opisane są symetrycznymi, centrowanymi rozkładami prawdopodobieństwa.

Na podstawie tak zdefiniowanej wielkości mierzonej, jej wartość oczekiwana dana jest zależnością funkcyjną

$$\mu(Y) = f(\mu(X_1), \dots, \mu(X_N)) \quad (10)$$

wariancja zależnością

$$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \sigma^2(X_i) \quad (11)$$

3. Przedział ufności

Przedział ufności zdefiniowany jest w postaci dwóch umownie przyjętych wartości granicznych

$$I_p = [y_{low}, y_{high}] \quad (12)$$

z których y_{low} oznacza dolną, a y_{high} górną granicę przedziału (rys. 1).

Dla zbioru wartości y można zbudować centrowaną i standaryzowaną zmienną w postaci

$$\eta = \frac{y - \bar{y}}{u(y)} \quad (13)$$

gdzie \bar{y} jest estymatą, na ogół wartością średnią, a $u(y)$ niepewnością standardową. Można zdefiniować nowe granice w postaci

$$\eta_{low} = \frac{y_{low} - \bar{y}}{u(y)} = G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) \quad (14)$$

$$\eta_{high} = \frac{y_{high} - \bar{y}}{u(y)} = G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \quad (15)$$

gdzie $G^{-1}(\alpha)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu opisanego dystrybuantą $G(\eta)$, a p poziomem ufności. Dla symetrycznego probabilistycznie rozkładu zachodzi równość

$$G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) = -G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) = k \quad (16)$$

gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia. Z uwagi na (14) i (15) mamy

$$y_{low} = \bar{y} - k \cdot u(y) = \bar{y} - U \quad (17)$$

$$y_{high} = \bar{y} + k \cdot u(y) = \bar{y} + U \quad (18)$$

Dla funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g(\eta)$ spełnione jest równanie

$$\int_{-k}^k g(\eta) d\eta = p \quad (19)$$

Przy czym standardowo przyjmuje się, że $p = 95\%$.

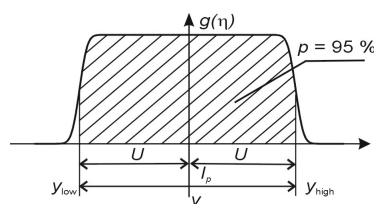
Jeżeli wielkość wyjściowa związana jest zależnością liniową z wielkościami wejściowymi to funkcja gęstości rozkładu związanego z wielkością mierzoną jest spłotem funkcji gęstości rozkładów związanych z wielkościami wejściowymi

$$g(\eta) = g_1(\xi_1) * \dots * g_N(\xi_N) \quad (20)$$

gdzie ξ_i są standaryzowanymi zmiennymi wielkości wejściowych

$$\xi_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{u(x_i)} \quad (21)$$

\bar{x}_i jest estymatą wielkości wejściowej, w postaci wartości średniej lub środkowej a $u(x_i)$ jej niepewnością standardową.



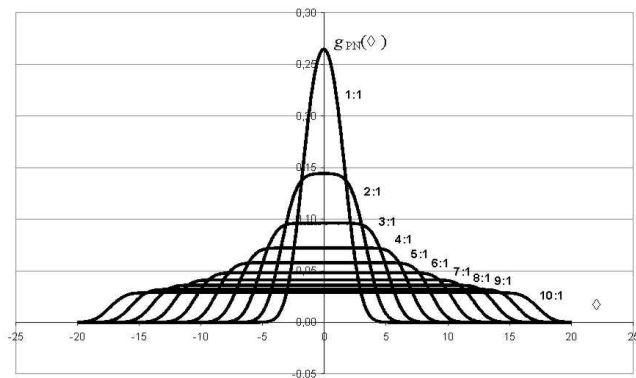
Rys. 1. Przedział ufności dla symetrycznego rozkładu wielkości mierzonej
Fig. 1. Coverage interval for symmetrical distribution of measurand

4. Metoda analityczna

Metoda polega na przybliżeniu wyniku operacji spłotu matematycznego standardowych rozkładów wielkości wejściowych [7, 8]. Mogą nimi być rozkłady: Studenta, normalny, prostokątny, trójkątny i trapezowy. W metodzie wykorzystano, jako bardzo efektywne, przybliżenie wielokrotnego spłotu rozkładów normalnego, prostokątnego, trójkątnego i trapezowego rozkładem typu PN, który jest pojedynczym spłotem rozkładu prostokątnego z normalnym. Funkcja gęstości tego rozkładu (rys. 2) jest zależna od parametru r będącego ilorazem odchyłeń standardowych tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego (σ_P i σ_N)

$$g_{PN}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi \cdot r} \int_{\eta-\sqrt{3}\cdot r}^{\eta+\sqrt{3}\cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \quad (22)$$

$$r = \frac{\sigma_P}{\sigma_N} \quad (23)$$



Rys. 2. Funkcje gęstości splotu rozkładów prostokątnego i normalnego o różnych odchyleniach standardowych ($\sigma_P: \sigma_N$)

Fig. 2. Probability density function for convolution of rectangular and normal distributions with different standard deviations ($\sigma_P: \sigma_N$)

Parametr r rozkładu typu PN można przybliżyć ilorazem udziału [9, 10]

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \quad (24)$$

gdzie $u_i(y) = c_i u(x_i)$ to największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym.

Przybliżenie powyższe można rozszerzyć o splot rozkładów trójkątnych i trapezowych. W celu znalezienia największego udziału wielkości o rozkładzie prostokątnym w każdym z tych rozkładów należy określić jego większą składową prostokątną. Każdy z tych rozkładów bowiem to splot dwóch składowych prostokątnych.

Rozkład trójkątny jest splotem dwóch jednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trójkątnym dana jest zależnością

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (25)$$

Niepewność standardowa składowej prostokątnej tworzącej rozkład trójkątny ma postać

$$u'(x_i) = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (26)$$

co prowadzi do zależności

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{2}} \quad (27)$$

Rozkład trapezowy natomiast jest splotem dwóch niejednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trapezowym dana jest zależnością

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}} \quad (28)$$

Niepewność standardowa większej składowej prostokątnej tworzącej rozkład trapezowy ma postać

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \quad (29)$$

co prowadzi do zależności

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} u(x_i) \quad (30)$$

Splot rozkładów Studenta można przybliżyć splotem „równoważnych” im rozkładów normalnych. Owa równoważność polega na przyjęciu takich rozkładów normalnych, dla których przedziały

ufności są takie same co do wartości jak wyznaczone na podstawie rozkładów Studenta dla danego poziomu ufności. Aby osiągnąć tą równoważność należy zastąpić rozkład Studenta rozkładem normalnym, a niepewność standardową wielkości wejściowej powiększyć o iloraz kwantyli tych rozkładów

$$u'(x_i) = \frac{t(v)}{k_N} u(x_i) \quad (31)$$

k_N – kwantyl rozkładu normalnego, $t(v)$ – kwantyl rozkładu Studenta.

Niepewność rozszerzoną można wyznaczyć z zależności

$$U = k_{PN} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{t(v)}{k_N} u_i(y) \right)^2} \quad (32)$$

gdzie k_{PN} to kwantyl rozkładu typu PN. Wartości powyższego współczynnika dla poziomu ufności 95 % zostały przedstawione w tabeli 1 w funkcji ilorazu udziału niepewności [11, 12].

Tab. 1. Wartości współczynnika rozszerzenia k_{PN} dla poziomu ufności 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

Tab. 1. Coverage factor values corresponding to 95 % confidence level for limits of uncertainty ratio

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

Współczynnik k_{PN} można również wyznaczyć w przybliżony sposób

$$\begin{aligned} k_{PN} &= k_N \text{ dla } 0 < r_u < 1 \\ k_{PN} &= k_T \text{ dla } 1 \leq r_u \leq 10 \\ k_{PN} &= k_P \text{ dla } r_u > 10 \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}} (1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}) \quad (34)$$

$$k_P = \sqrt{3} p \quad (35)$$

Wykorzystano tu przybliżenie rozkładu typu PN trzema standardowymi rozkładami: normalnym, trapezowym i prostokątnym w zależności od wartości ilorazu udziału, co również daje dobre wyniki przybliżenia wielokrotnego splotu wymienionych rozkładów [13].

5. Metoda szybkiej transformaty Fouriera

Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera do obliczania niepewności rozszerzonej z zastosowaniem zasady propagacji rozkładów poprzez model pomiaru polega na wyznaczeniu wypadkowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa na podstawie znanych rozkładów wielkości wejściowych. Metoda sprowadza się do wyznaczenia splotu wypadkowego na podstawie znanych rozkładów wielkości wejściowych. Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera oraz odwrotnej wynika z popularności i szybkości algorytmów stosowanych w wielu środowiskach programistycznych [14-19].

6. Wzorcowanie omomierza

Omomierz wzorcowany jest przy użyciu opornika wzorcowego. Równanie błędu wskazania omomierza ma postać

$$e_o = R_o + \delta R_o - R_w - \delta R_t - \delta R_d$$

gdzie

R_o – wskazanie omomierza

δR_o – rozdzielczość odczytu wskazania omomierza

R_w – rezystancja opornika wzorcowego

δR_t – zmiana rezystancji opornika spowodowana zmianą temperatury

δR_d – dryft rezystancji opornika wzorcowego

W równaniu występuje pięć wielkości wejściowych:

1) Wskazanie omomierza – R_o

Wykonano serię pięciu odczytów, których wyniki zestawiono w tab. 2. Rozrzut estymaty wskazania, jako wartości średniej opisany jest rozkładem Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = n - 1 = 4$

$$u(R_o) = s(\bar{R}_o) = \frac{s(R_o)}{\sqrt{n}} = \frac{0,071 \Omega}{\sqrt{5}} = 0,032 \Omega$$

Tab. 2. Dane pomiarowe przy wzorcowaniu omomierza
Tab. 2. Measurement data in ohmmeter calibration

Wartości odczytów	9999,3 Ω
	9999,2 Ω
	9999,3 Ω
	9999,4 Ω
	9999,3 Ω
\bar{R}_o	9999,3 Ω
$s(R_o)$	0,071 Ω

2) Rozdzielczość odczytu wskazania omomierza – δR_o

Wartość odpowiadająca ostatniej wskazanej cyfrze omomierza: 0,1 Ω

$$u(\delta R_o) = \frac{0,1 \Omega}{2\sqrt{3}} = 0,029 \Omega$$

3) Rezystancja opornika wzorcowego – R_w .

Świadectwo wzorcowania podaje:
 $R_w = (10\,000,22 \Omega \pm 0,01) \Omega$ dla $k=2$ w temperaturze: 23 °C

$$u(R_w) = \frac{0,01 \Omega}{2} = 0,005 \Omega$$

4) Zmiana rezystancji opornika spowodowana zmianą temperatury δR_t

Pomiary wykonano w temperaturze: $(23,0 \pm 0,5) ^\circ\text{C}$. Współczynnik temperaturowy wynosi: $TC = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}$

$$u(\delta R_t) = \frac{10000,22 \Omega \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 0,5 \text{ K}}{\sqrt{3}} = 0,014 \Omega$$

5) Dryft rezystancji opornika wzorcowego – δR_d

Dryft wynosi: $\pm 2 \cdot 10^{-6}$

$$u(\delta R_d) = \frac{10000,22 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} = 0,012 \Omega$$

Wszystkie wielkości zestawiono w tabeli budżetu niepewności (tab. 3).

Tab. 3. Budżet niepewności błędu wskazania omomierza
Tab. 3. Uncertainty budget of ohmmeter indication error

symbol wielkości	estymata wielkości	niepewność standardowa	rozkład prawdopodobieństwa	współczynnik wrażliwości	udział niepewności	stopnie swobody
	Ω	Ω			Ω	
R_o	9999,3	0,032	Studenta	1	0,032	4
δR_o	0	0,029	prostokątny	1	0,029	∞
R_w	10000,22	0,005	normalny	-1	-0,005	∞
δR_t	0	0,014	prostokątny	-1	-0,014	∞
δR_d	0	0,012	prostokątny	-1	-0,012	∞
e_o	-0,92				0,047	19

Obliczenia metodą analityczną

Wielkością wejściową opisaną rozkładem prostokątnym o największym udziale jest rozdzielczość wskazania δR_o . Dla wielkości tej iloraz udziału wynosi $r_u = 0,78$. Z tabeli 1 można odczytać, że współczynnik $k_{PN} = 1,94$. Kwantyl rozkładu Studenta dla wielkości wejściowej R_o związanej ze wskazaniem omomierza wynosi $t(4) = 2,7764$ przy poziomie ufności 95 %. Zatem niepewność rozszerzona wynosi

$$U = k_{PN} \sqrt{\left[\frac{t(4)}{k_N} u(R_o) \right]^2 + u^2(\delta R_o) + u^2(R_w) + u^2(\delta R_t) + u^2(\delta R_d)}$$

$$= 0,11 \Omega$$

a współczynnik rozszerzenia

$$k = \frac{U}{u_c(e_o)} = 2,34$$

gdzie

$$u_c^2(e_o) = u^2(R_o) + u^2(\delta R_o) + u^2(R_w) + u^2(\delta R_t) + u^2(\delta R_d)$$

Obliczenia metodą FFT

Obliczenia przy użyciu programu komputerowego działającego metodą szybkiej transformaty Fouriera dały następujące wyniki:

$$U = 0,11 \Omega$$

$$k = 2,32$$

Różnica pomiędzy wartościami obliczonymi metodą przybliżoną i dokładną wynosi 0,86 %.

7. Wzorcowanie woltomierza

Woltomierz wzorcowany jest przy użyciu kalibratora napięcia. Równanie błędu wskazania woltomierza ma postać

$$e_w = V_w + \delta V_w - V_k - \delta V_k$$

gdzie

V_w – wskazanie woltomierza

δV_w – rozdzielczość odczytu wskazania woltomierza

V_k – napięcie kalibratora

δV_k – poprawka wartości napięcia kalibratora

W równaniu występują cztery wielkości wejściowe:

1) Wskazanie woltomierza – V_w

Wykonano serię dziesięciu odczytów, których wyniki zestawiono w tab. 4. Rozrzut estymaty wskazania, jako wartości średniej opisany jest rozkładem Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = n - 1 = 9$

$$u(V_w) = s(\bar{V}_w) = \frac{s(V_w)}{\sqrt{n}} = \frac{0,047 \text{ V}}{\sqrt{10}} = 0,015 \text{ V}$$

Tab. 4. Dane pomiarowe przy wzorcowaniu woltomierza
Tab. 4. Measurement data in voltmeter calibration

Wartości odczytów	100,1 V
	100,1 V
	100,1 V
	100,0 V
	100,1 V
	100,1 V
	100,1 V
	100,2 V
	100,1 V
	100,1 V
	100,1 V
\bar{V}_w	100,1 V
$s(V_w)$	0,047 V

- 2) Rozdzielczość odczytu wskazania woltomierza – δV_w
Wartość odpowiadająca ostatniej wskazanej cyfrze woltomierza: 0,1 V

$$u(\delta V_w) = \frac{0,1 \text{ V}}{2\sqrt{3}} = 0,029 \text{ V}$$

- 3) Napięcie kalibratora – V_k
Napięcie kalibratora wynosiło 100 V. W świadectwie wzorcowania podano, że dla powyższego napięcia niepewność rozszerzona wynosi $U = 0,002 \text{ V}$ ($k = 2$)

$$u(V_k) = \frac{0,002 \text{ V}}{2} = 0,001 \text{ V}$$

- 4) Poprawka wartości napięcia kalibratora – δV_k
Na podstawie danych producenta wyznaczono graniczną wartość poprawki z formuły: $0,0001 V_k + 1 \text{ mV}$

$$u(\delta V_k) = \frac{0,011 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,0064 \text{ V}$$

Wszystkie wielkości zestawiono w tabeli budżetu niepewności (tab.5).

Tab. 5. Budżet niepewności błędu wskazania woltomierza
Tab. 5. Uncertainty budget of voltmeter indication error

symbol wielkości	estymata wielkości	niepewność standardowa	rozkład prawdopodobieństwa	współczynnik wrażliwości	udział niepewności	stopnie swobody
	V	V			V	
V_w	100,1	0,015	Studenta	1	0,015	9
δV_w	0	0,029	prostokątny	1	0,029	∞
V_k	100	0,001	normalny	-1	-0,001	∞
δV_k	0	0,0064	prostokątny	-1	-0,0064	∞
e_w	0,1				0,033	219

Obliczenia metodą analityczną

Wielkością wejściową opisaną rozkładem prostokątnym o największym udziale jest rozdzielczość wskazania δV_w . Dla wielkości tej iloraz udziału wynosi $r_u = 1,778$. Z tabeli 1 można odczytać, że współczynnik $k_{PN} = 1,83$. Kwantyl rozkładu Studenta dla wielkości wejściowej V_w związanej ze wskazaniem woltomierza wynosi $t(9) = 2,2622$ przy poziomie ufności 95 %. Zatem niepewność rozszerzona wynosi

$$U = k_{PN} \sqrt{\left(\frac{t(9)}{k_N} u(V_w)\right)^2 + u^2(\delta V_w) + u^2(V_k) + u^2(\delta V_k)} \cong 0,063 \text{ V}$$

a współczynnik rozszerzenia

$$k = \frac{U}{u_c(e_w)} = 1,89$$

gdzie $u_c^2(e_w) = u^2(V_w) + u^2(\delta V_w) + u^2(V_k) + u^2(\delta V_k)$

Obliczenia metodą FFT

Obliczenia przy użyciu programu komputerowego działającego metodą szybkiej transformaty Fouriera dały następujące wyniki:

$$U = 0,063 \text{ V}$$

$$k = 1,892$$

Różnica w obliczeniach metoda przybliżoną w stosunku do dokładnej wynosi 0,01 %, czyli jest w tym przypadku pomijalna.

8. Wnioski końcowe

Obie metody w tych dwóch przypadkach dają takie same rezultaty.

Artykuł ten powstał dzięki projektowi badawczemu Nr 3 T10C 040 27 finansowanemu przez KBN

9. Literatura

- [1] G. B. Rossi, F. Crenna, M. Codda : Metrology software for the expression of measurement results by direct calculation of probability distributions. Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology, vol. 66, 2004 r.
- [2] G. B. Rossi, F. Crenna: A probabilistic approach to measurement-based decisions. Measurement 39, 2006 r.
- [3] R. Willink: Coverage intervals and statistical coverage intervals. Metrologia vol. 41, 2004 r.
- [4] M. G. Cox, P. M. Harris: Measurement uncertainty and traceability. Measurement Science and Technology, vol. 17, 2006 r.
- [5] W. Bich, M. G. Cox and P. M. Harris: Evolution of the 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement'. Metrologia vol. 43, 2006 r.
- [6] P. Fotowicz: Nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru. PAR nr 7-8, 2006 r.
- [7] P. Fotowicz: Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych. PAR nr 1, 2005 r.
- [8] P. Fotowicz: An analytical method for calculating a coverage interval. Metrologia, vol. 43, 2006 r.
- [9] P. Fotowicz: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR nr 9, 2001 r.
- [10] P. Fotowicz: A method of approximation of the coverage factor in calibration. Measurement, vol. 35, no. 3, April 2004
- [11] P. Fotowicz: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR nr 10, 2003 r.
- [12] P. Fotowicz: Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o sploc rozkładu prostokątnego z normalnym. PAK nr 4, 2004 r.
- [13] P. Fotowicz: Ocena dokładności przybliżenia splocu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym. PAR nr 5, 2001 r.
- [14] M. J. Korczyński, P. Fotowicz, A. Hetman: Calculation of Expanded Uncertainty in Calibration of RTD Sensors, at Low Temperature, International Conference on the Uncertainty of Measurement "UNCERT 2003", St. Catherine's College, Oxford, UK, 9-10 April 2003 chapter in Uncert Proceedings, Technical Conference.
- [15] M. J. Korczyński: Obliczanie niepewności wyniku w pomiarach złożonych bez wyznaczania współczynnika rozszerzenia. Międzyzdroje, 10-12 lutego 2004 (CD)
- [16] M. J. Korczyński, A. Hetman, P. Fotowicz: Expanded Uncertainty Calculation – methods and comparison, Proceedings of the International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE-2004, Uppsala, June, 4-8, 2004
- [17] M. J. Korczyński, A. Hetman: Calculation of coverage interval based on direct method – some consideration about accuracy of the metod; AMCTM, Ljubljana, September 13-15, 2004, pp. 1-2.
- [18] M. J. Korczyński, A. Szymarka-Grzebyk, P. Fotowicz, A. Hetman: Evaluation of Accuracy of Standard Platinum Resistance Thermometer at National Laboratory Level, AMCTM 2003 Conference, September 9-11, Turyn, "Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology VI", ISBN 981-238-904-0; Wydawnictwo Word Scientific Publishing Co
- [19] M. J. Korczyński, P. Fotowicz, A. Hetman, R. Gozdur, A. Hłobaż: Metody obliczania niepewności pomiaru. PAK 2/ 2005