Anna DOMAŃSKA
POLITECHNIKA POZNAŃSKA, INSTYTUT ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Optymalizacja parametrów konwersji a-c z sygnałem ditherowym i uśrednianiem według kryterium wariancji błędu kwantowania

Dr hab. inż. Anna DOMAŃSKA

Ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej w 1979 roku i na Wydziale Mat-Fiz-Chem Uniwersytety Wrocławskiego w 1984 roku. W 1987 r. uzyskała stopień doktora n.t. a w 1996 roku doktora habilitowanego n.t., obydwa na Wydziale Elektrycznym PP. Główne zainteresowania naukowe dotyczą systemów pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru oraz teorii i zastosowań konwersji analogowo-cyfrowej z sygnałem ditherowym. Jest członkiem Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN.

e-mail: domanska@et.put.poznan.pl

Streszczenie

Konwersja a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem jest skuteczną metodą redukcji wariancji błędu kwantowania w systemach pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru. Podano zależność opisującą wariancję błędu kwantowania tak zmodyfikowanej konwersji. Sformułowano zasady doboru parametrów konwersji i określono ich wartości dla przypadku ditheru gaussowskiego.

Słowa kluczowe: system pomiarowy, błąd kwantowania, dither

Optimization of the parameters of A-D conversion with dither signal and averaging according to criterion of the quantization error variance

Abstract

A-D conversion with dither signal and with averaging is an effective method for reducing the variance of quantization error in measuring systems with a digital measuring algorithm. A dependence was given, describing the variance of quantization error of the conversion modified using such method. The rules for selecting the conversion parameters were formulated as well as their values for the case of Gaussian dither.

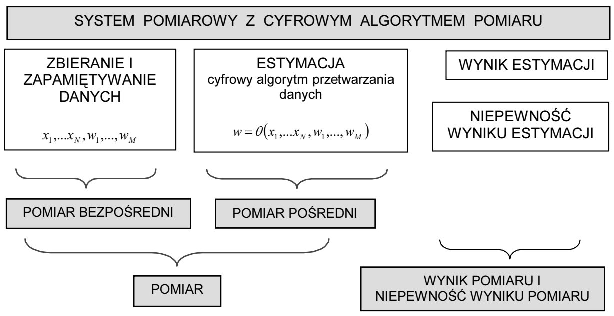
Keywords: measurement system, quantization error, dither

1. Wstęp

W systemach pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru proces pomiarowy jest podzielony na dwa etapy. W pierwszym etapie są zbierane i zapamiętywane dane wejściowe systemu. Ma on charakter pomiaru bezpośredniego. W drugim etapie jest estymowana prawdziwa wartość wielkości mierzonej, na podstawie uprzednio zgromadzonych danych. Ma on charakter pomiaru pośredniego. Wynikiem pomiaru jest wartość estymaty. Niepewność wyniku pomiaru jest więc tożsama z niepewnością wyniku estymacji.

Najistotniejsze przyczyny powstawania niepewności wyniku pomiaru są następujące:
- niepewność zaewidencjonowanych danych $x_1,...,x_N, w_1,...,w_M$, (wielkości główne i wpływające),
- właściwości estymatora θ:
  - statystyczne (obciążenie, wariancja...),
  - deterministyczne (postać matematyczna, z której wynika sposób, w jaki propagują się niepewności danych).

Operacją niezmienniczą systemów pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru jest konwersja a-c. Z tego powodu jej wpływ na niepewność wyniku pomiaru (bezpośredniego, rys. 1) zawsze będzie przedmiotem analizy i oceny. Jednocześnie nieustannie doskonalone są metody mające na celu ograniczenie tego wpływu. Obecnie najczęściej stosowane metody to:
- korekcja wyników konwersji a-c metodą „look-up table”,
- konwersja a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem.

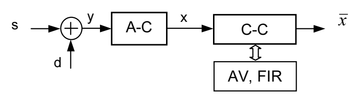


Rys. 1. Pomiar, wynik pomiaru, niepewność wyniku pomiaru w systemach pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru
Fig. 1. Measurement, result of measurement, uncertainty of measurement of a measuring system with digital measuring algorithm

Przedstawione w dalszej części zagadnienia dotyczą metody drugiej. W szczególności przedstawiono jak zmienia się wariancja błędu kwantowania i jak można wpływać na jej wartość kształtując wzajemne relacje między parametrami zmodyfikowanej konwersji a–c.

2. Konwersja a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem

Dither jest dodatkowym sygnałem podawanym na wejście układu konwersji a-c, który konwertowany łącznie z sygnałem przetwarzanym, zmienia właściwości operacji kwantowania i stwarza możliwości ich kontroli i formowania. Schemat takiej konwersji przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Konwersja a-c z sygnałem ditherowym i z przetwarzaniem c-c
Fig. 2. A-D conversion with dither signal and d-d processing

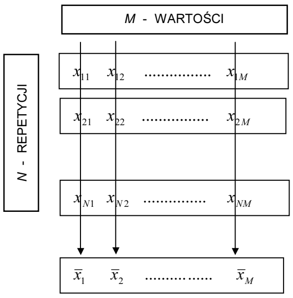
Z punktu widzenia celu (redukcja błędu kwantowania) cechy sygnału ditherowego muszą być następujące:
- niezależność od sygnału przetwarzanego,
- szum biały (impulsowa autokorelacja) o zerowej wartości średniej,
- symetryczna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (z uwagi na równomierną charakterystykę kwantyzatora).

Bywają sytuacje, w których ditherem może być szum tkwiący w przetwarzanym sygnale wejściowym („self-dither”).

Przetwarzanie c-c to w ogólności operacja uśredniająca. Może to być uśrednianie z kumulacją lub uśredniania metodą średniej ruchomej. Dalsze analizy dotyczyć będą przypadku z zastosowaniem uśredniania pierwszego typu. Może ono być stosowane wobec sygnałów powtarzalnych. Zasadę takiego uśredniania zilustrowano na rys. 3. Uśrednianie z kumulacją polega na zebraniu M-wartości w pewnym oknie czasowym i powtórzenie tego N-krotnie (N repetycji). Poszczególne repetycje nie zachodzą na siebie. Momenty początków repetycji są zsynchronizowane. Wynikiem jest ciąg M średnich, każda wyznaczona z N wartości według zależności (1):

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \; . \qquad (1)$$

Cechą uśredniania metodą z kumulacją jest to, iż składowe deterministyczne dodają się spójnie (wartość średnia jest taka sama jak wartość pojedyncza), a składowe losowe są uśredniane do małej wartości na skutek ich niespójności.



Rys. 3. Zasada uśredniania – metoda z kumulacją
Fig. 3. Principle of averaging – cumulative method

Randomizacja błędu kwantowania, a następnie jego redukcja w wyniku uśredniania jest główną ideą wykorzystywaną w konwersji a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem.

3. Wariancja błędu kwantowania w przypadku konwersji a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem

Sygnał podlegający przetworzeniu a-c (rys. 2) jest sumą sygnału pomiarowego i ditheru:

$$y_{ij} = s_j + d_{ij}, \tag{2}$$

$i = 1, \ldots, N$ - liczba/numer repetycji, $j = 1, \ldots, M$ - liczba/numer wartości w pojedynczej repetycji. Wszystkie j-te próbki z wszystkich repetycji mają wartości różniące się między sobą składnikiem szumowym d_{ij}. Składnik deterministyczny s_j jest w każdej repetycji taki sam. W wyniku przetworzenia a-c otrzymuje się sygnał:

$$x_{ij} = Q(s_j + d_{ij}), \tag{3}$$

Q - kwantowanie. Błąd kwantowania jest różnicą między sygnałem skwantowanym i sygnałem kwantowanym:

$$e_{ij} = x_{ij} - s_j \cdot \tag{4}$$

Jeśli stosowana jest konwersja a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem, wartości po konwersji określa zależność (1). Błąd kwantowania tak zmienionej operacji jest wówczas różnicą między ostatecznym rezultatem konwersji i sygnałem kwantowanym:

$$\bar{e}_j = \bar{x}_j - s_j \cdot \tag{5}$$

W przypadku nieskończonego zbioru repetycji ($N \to \infty$), zależności (1), (4), (5) przyjmują postać odpowiednio:

$$E[\bar{x}_j] = E[x_{ij}], \tag{6}$$

$$E[e_{ij}] = E[x_{ij}] - s_j, \tag{7}$$

$$E[\bar{e}_j] = E[e_{ij}]. \tag{8}$$

A. Wariancja błędu kwantowania w przypadku nieskończonego zbioru repetycji

Ogólna zależność (nie zależnie od typu ditheru) opisująca wariancję błędu kwantowania w przypadku konwersji a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem (nieskończony zbiór repetycji $N \to \infty$, skończony zbiór wartości $M < \infty$) wynika z poniżej przedstawionego ciągu przekształceń:

$$_{\infty}\sigma^2_{\bar{q}} \overset{(df)}{=} E\left[\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \bar{e}_j^{\,2}\right] \overset{(5)}{=} E\left[\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(\bar{x}_j - s_j)^2\right] \overset{(6)}{=} E\left[\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(E[x_{ij}] - s_j)^2\right] \overset{(7)}{=} \tag{9}$$

$$= E\left[\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(E[e_{ij}])^2\right] = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(E[e_{ij}])^2$$

Zależność opisującą $E[e_{ij}]$ wyznacza się z definicji wartości oczekiwanej, wykorzystując postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantowania wyprowadzoną w [2] i uwzględniając, że sygnałem kwantowanym jest suma $s+d$. Biorąc pod uwagę, iż funkcja gęstości prawdopodobieństwa ditheru jest rzeczywista i parzysta, co oznacza, że odpowiadająca jej funkcja charakterystyczna Φ_d ma także takie cechy, zależność $E[e_{ij}]$ można uszczegółowić następująco:

$$E[e_{ij}] = \frac{q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\Phi_d\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{q}k \cdot s_j\right) \tag{10}$$

q - rozdzielczość przetwornika A/C. Z (9) i (10) wynika ostatecznie, że wariancja błędu kwantowania, w konwersji według wariantu w2, ma postać:

$$\boxed{_{\infty}\sigma^2_{\bar{q}} = \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\Phi_d^2\left(\frac{2\pi}{q}k\right)}. \tag{11}$$

Ze względów praktycznych najkorzystniejszy jest dither gaussowski [1]. Odpowiadająca mu funkcja charakterystyczna jest następująca [2]:

$$\Phi_d\left(\frac{2\pi}{q}k\right) = e^{-2\pi^2\left(\frac{\sigma_d}{q}\right)^2 k^2}, \tag{12}$$

σ_d^2 - wariancja sygnału ditherowego. Wariancja błędu kwantowania wyniesie wówczas:

$$_{\infty}\sigma^2_{\bar{q}} = \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot e^{-4\pi^2\left(\frac{\sigma_d}{q}\right)^2 k^2}. \tag{13}$$

W praktyce przyjęcie pierwszego wyrazu szeregu jest wystarczająco dobrym przybliżeniem tej zależności [1], czyli można przyjąć, że:

$$k = 1 \qquad _{\infty}\sigma^2_{\bar{q}} = \frac{q^2}{2\pi^2}\cdot e^{-4\pi^2\left(\frac{\sigma_d}{q}\right)^2}. \tag{14}$$

Wnioski A

A1. Wariancja błędu kwantowania w przypadku $N \to \infty$ ma wartość skończoną i różną od zera. Nie wynika to z często stosowanej dla w2 uproszczonej zależności przybliżonej: $\sigma^2_{\bar{q}} \approx (q^2/12 + \sigma_d^2)/N \cdot$

A2. W przypadku zaniku ditheru wariancja błędu kwantowania staje się zbieżna do $q^2/12$, co odpowiada wariancji błędu kwantowania bez sygnału ditherowego: ($\sigma_d \to 0,\ f_d \to \delta,\ \Phi_d \to 1,\ \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6,\ \sigma^2_{\bar{q}} \to q^2/12$) .

B. Wariancja błędu kwantowania w przypadku skończonego zbioru repetycji

Ogólna zależność opisująca wariancję błędu kwantowania w przypadku konwersji a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem (skończony zbiór repetycji $N < \infty$, skończony zbiór wartości $M < \infty$) wynika z poniżej przedstawionego ciągu przekształceń:

$$\sigma^2_{\bar{q}} \overset{(df)}{=} E\left[\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(\bar{e}_j)^2\right] \overset{(5)}{=} E\left[\frac{1}{M}\sum_{J=1}^{M}(\bar{x}_j - s_j)^2\right] = \frac{1}{M}\sum_{j-1}^{M}E\left[(\bar{x}_j - s_j)^2\right]. \tag{15}$$

Wprowadzając wielkość - błąd zastąpienia wielkości prawdziwej estymatorem:

$$\Delta\bar{x}_j \overset{(df)}{=} \bar{x}_j - E\left[\bar{x}_j\right] \overset{(6)}{=} \bar{x}_j - E\left[x_{ij}\right] \overset{(7)}{=} \bar{x}_j - E\left[e_{ij}\right] - s_j, \quad (16)$$

$$E\left[\Delta\bar{x}_j\right] = 0,$$

można zastąpić różnicę $\bar{x}_j - s_j$ w zależności (15) sumą $\Delta\bar{x}_j + E\left[e_{ij}\right]$ wynikającą z zależności (16), sprowadzając zależność (15) do postaci:

$$\sigma_{\bar{q}}^2 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(E\left[\left(\Delta\bar{x}_j\right)^2\right] + \left(E\left[e_{ij}\right]\right)^2\right). \quad (17)$$

Nieskorelowanie błędu zastąpienia $E\left[\Delta x_{ij}\cdot\Delta x_{kj}\right] = \delta_{ik}\cdot Var\, x_{ij}$ (δ_{ik} - delta Kroneckera) oznacza, że zachodzi $E\left[\left(\Delta\bar{x}_j\right)^2\right] = \left(1/N\right)\cdot Var\, x_{ij}$. Uwzględniając to w zależności (17), otrzymuje się ostateczną postać wariancji:

$$\sigma_{\bar{q}}^2 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{1}{N}\cdot Var\, x_{ij} + \left(E\left[e_{ij}\right]\right)^2\right) \overset{(9)}{=} \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{N}\cdot Var\, x_{ij} + {}_{\infty}\sigma_{\bar{q}}^2, \quad (18)$$

$$\boxed{\sigma_{\bar{q}}^2 = \frac{1}{N}\left[\sigma_d^2 + \left(\frac{q^2}{12} - {}_{\infty}\sigma_{\bar{q}}^2\right)\right] + {}_{\infty}\sigma_{\bar{q}}^2}. \quad (19)$$

Różnica w nawiasie okrągłym odpowiada zrandomizowanej części błędu kwantowania, redukowanej w wyniku uśredniania.

Wariancję błędu kwantowania w przypadku zastosowania ditheru gaussowskiego można otrzymać wstawiając zależność (14) do (19).

Wnioski B

B1. Jeśli zachodzi konwersja a-c z sygnałem ditherowym ale bez uśredniania (N = 1), to $\sigma_{\bar{q}}^2 = q^2/12 + \sigma_d^2$. Jest to górna granica wartości wariancji w wariancie w2.

B2. Jeśli liczba repetycji dąży do nieskończoności ($N\to\infty$) to wariancja $\sigma_{\bar{q}}^2$ dąży do ${}_{\infty}\sigma_{\bar{q}}^2$. Jest to dolna granica wartości wariancji w wariancie w2.

4. Dobór parametrów konwersji a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem

Teoretycznie „koszty” zastosowania ditheru to:

- ograniczenie dynamicznego zakresu przetwarzania w stopniu zależnym od σ_d,
- wydłużenie czasu konwersji spowodowane dodatkową operacją uśredniania,
- zwiększenie częstotliwości pobierania próbek spowodowane dodatkowym uzmiennieniem wartości (zmodulowaniem wartości szumem).

W praktycznych zastosowania koszty te nie są dolegliwe. Można skonfigurować system pomiarowy z cyfrowym algorytmem pomiaru tak by parametry zwykłej konwersji a-c cechowały się pewną „nadwyżką możliwości” w stosunku do możliwości wykorzystywanych.

Istotnym zagadnieniem jest odpowiedni dobór parametrów konwersji, czyli ustalenie wartości σ_d i N. Z uwagi na zastosowanie takiej konwersji w systemach pomiarowych, najodpowiedniejszy jest ich dobór ze względu na kryterium wariancji błędu kwantowania.

Liczba repetycji N może mieć bardzo różne wartości. Im jest ich więcej tym większy jest stopień redukcji wariancji błędu kwantowania. Istnieje natomiast pewna ich minimalna ilość. Jest to taka ilość, powyżej której zaczynają być odczuwalne korzyści z zastosowania ditheru, czyli wariancja błędu kwantowania z ditherem zaczyna być mniejsza od wariancji błędu kwantowania bez ditheru:

$$\sigma_{\bar{q}}^2 < \frac{q^2}{12} \xrightarrow{(19)} N > 1 + \frac{\sigma_d^2}{\frac{q^2}{12} - {}_{\infty}\sigma_{\bar{q}}^2}. \quad (20)$$

Jeśli stosowany jest dither gaussowski, minimalna liczba repetycji wynosi:

$$N_{\min} = 1 + \frac{\sigma_d^2}{\frac{q^2}{12} - \frac{1}{2\pi^2}e^{-4\pi^2\left(\frac{\sigma_d}{q}\right)^2}}. \quad (21)$$

W każdym przypadku minimalna liczba repetycji zależy od wariancji sygnału ditherowego.

Wariancję ditheru należy dobierać tak by uzyskać minimalizację wariancji błędu kwantowania (19), czyli z warunku:

$$\frac{d\sigma_{\bar{q}}^2}{d\left(\sigma_d^2\right)} = 0. \quad (22)$$

Jeśli stosowany jest dither gaussowski, optymalna wartość jego wariancji wynosi:

$$\sigma_{dOPT}^2 = \frac{q^2}{4\pi^2}\cdot\ln 2\left(N-1\right). \quad (23)$$

Przykładowo, jeśli liczba repetycji N = 100 (standardowo w DAQ [3]), optymalny dither gaussowski ma $\sigma_{dOPT} = 0{,}366q$. Wówczas $\sigma_{\bar{q}} = 0{,}05q$. Gdyby nie stosowano konwersji a-c z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem, odchylenie standardowe błędu kwantowania wynosiłoby $\sigma_q = q/\sqrt{12} = 0{,}29q$. Widać, że różnica między obiema wartościami jest bardzo znacząca.

5. Podsumowanie i wnioski

Zastosowanie w systemach pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru kwantowania z sygnałem ditherowym i z uśrednianiem jest skuteczną metodą redukcji wariancji błędu kwantowania konwersji a-c (co najmniej o rząd).

Można określić wartości graniczne wariancji błędu kwantowania. Górna granica jest wartością określoną w przypadku kwantowania z ditherem i bez uśredniania (N = 1). Dolna granica jest wartością, jaką w granicy osiąga wariancja, gdy uśrednianie zachodzi po nieskończonym zbiorze repetycji ($N\to\infty$). Jest to wartość skończona, różna od zera.

Parametry - wariancję ditheru i liczbę repetycji, można określić, stosując wariancję błędu kwantowania jako wielkością kryterialną. Przy danej wariancji ditheru istnieje minimalna liczba repetycji, powyżej której zaczynają ujawniać się korzyści polegające na redukowaniu się wariancji błędu kwantowania. Przy danej liczbie repetycji wariancję ditheru wyznacza się jako wartość minimalizującą wariancję błędu kwantowania.

Spośród teoretycznie rozważanych „kosztów” zastosowania ditheru, praktyczne znaczenie może mieć jedynie wydłużenie czasu konwersji.

6. Literatura

[1] Domańska A., Evaluating the measurement uncertainty in an A/D converter with non optimal dither, The 5th IEE International Conference on ADDA 2005 Advanced A/D and D/A Conversion Techniques and their Applications, Limerick, 2005.

[2] Sripad A., Snyder D., A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., Vol. ASSP-25, No. 5, 1977.

[3] The Measurement and Automation Catalog, National Instruments, 2004.

Artykuł recenzowany