

**Grzegorz KRAWCZYŚYŹN**

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej

## Metoda identyfikacji transmitancji oraz synteza cyfrowych dwuwymiarowych filtrów odwrotnych i quasi-odwrotnych

Mgr inż. Grzegorz KRAWCZYŚYŹN

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Zielonogórskiej. Pracę magisterską obronił w roku 1999 i uzyskał tytuł magistra inżyniera elektryka. Od czasu ukończenia studiów asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Autor kilku publikacji. Zajmuje się zagadnieniami dotyczącymi elektrotechniki oraz przetwarzania sygnałów. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza filtrów cyfrowych.



e-mail: G.Krawczyśyźn@ime.uz.zgora.pl

### Streszczenie

Przedmiotem pracy są filtry cyfrowe dwuwymiarowe 2-D. W artykule przedstawiony jest oryginalny algorytm identyfikacji transmitancji filtrów cyfrowych dwuwymiarowych oraz przykłady jego działania. Na podstawie algorytmu doboru współczynników wielomianów funkcji wymiernej filtra cyfrowego przedstawiono przykład obrazujący poprawność identyfikacji transmitancji. Celem artykułu jest także opracowanie teorii dotyczącej cyfrowych dwuwymiarowych filtrów odwrotnych i quasi-odwrotnych oraz uogólnienie metod quasi-odwrotności z układów jednowymiarowych na układy dwuwymiarowe 2-D. Uzyskane na drodze optymalizacyjnej filtry quasi-odwrotne pozwalają na wybór stopnia aproksymacji układu wypadkowego powstałego przez kaskadowe połączenie układu zniekształcającego i filtra korekcyjnego. W pracy przedstawiono formuły, dzięki którym możliwe jest zaprojektowanie stabilnego dwuwymiarowego filtra quasi-odwrotnego, w oparciu o istniejący model matematyczny w postaci transmitancji  $H(z)$  układu korygowanego (przedstawiona metoda identyfikacji funkcji wymiernej) lub jego odpowiedzi impulsowej. Zaletą tych formuł jest możliwość doboru stopnia aproksymacji w stosunku do idealnego filtra odwrotnego lub stopnia stabilizacji.

### The method of identification of the rational function and the synthesis of inverse and quasi-inverse two-dimensional digital filters

#### Abstract

In this paper presents the algorithm of choice rational function coefficients two-dimensional digital filters 2-D in the discrete time domain. The rational function good agrees filters approximation in the constant or discrete time domain. The article contains simple example illustrates the algorithm of choice rational function coefficients for the digital filter 2-D. In this article the theory of inverse and quasi-inverse of two dimensional digital filters is presented. The choice of approximation degree system is possibly by cascade connection of a distorting system and correction filter. The formulas permit to design quasi-inverse digital filter (2-D) based on the mathematical model of transmission  $H(z)$  of the distorting system.

### 1. Wstęp

Metody identyfikacji transmitancji stosuje się w zagadnieniach korekcyjnych. Znając odpowiedź impulsową układu zakłócającego można określić jego transmitancję. Algorytm przedstawiony w pracy [2] pozwala na wyznaczenie współczynników transmitancji filtrów dwuwymiarowych na podstawie próbek odpowiedzi impulsowej układu. Zakładając lub wiedząc, że rozpatrywany układ zniekształcający jest liniowy i czasowo-niezmienny, pełną informację o nim uzyskuje się przez znajomość odpowiedzi impulsowej. Proces uzyskania operatora  $H$  przekształcającego wielkość wejściową w wyjściową nazywany jest procesem identyfikacji. Znając sygnały na wejściu i wyjściu układu łatwo jest określić transmitancję układu korekcyjnego, która zgodnie z definicją jest stosunkiem postaci operatorowych sygnału wyjściowego do wejściowego. Z kolei znajomość transmitancji pozwala na wyznaczenie równania różnicowego układu korekcyjnego. Tor przetwarzania

uwzględniający korekcję sygnału dwuwymiarowego przedstawiony jest jako kaskadowe połączenie układu zniekształcającego oraz układu korekcyjnego.

### 2. Metoda wyznaczania współczynników transmitancji filtrów cyfrowych 2-D

Wyznaczanie odwrotności wielomianu 2-D można rozmaicie interpretować: jako transformację filtra SOI-NOI (nierekursywnego w rekursywny) czy też na odwrót. Procedura odwrotności jest więc kluczowa tak podczas analizy jak i syntezy filtra, czy też przy aproksymacji zadanego, dyskretnego rozkładu sygnału funkcją wymierną 2-D. Zadanie polega na wyznaczeniu współczynników  $a_{nm}$  przy zadanym, skończonym zbiorze współczynników  $h_{ij}$ . W pracy zakłada się znajomość dyskretniej odpowiedzi impulsowej układu zniekształcającego. Poniżej przedstawiono transformację SOI-NOI filtrów 2-D (transformację  $h \rightarrow a$ ). W dziedzinie filtrów cyfrowych jest to rozkład wielomianu  $W(z)$  na szereg (do rozważań przyjęto:  $h_{00} = 1, b_{00} = 1$ ):

$$\frac{b_{00}}{a_{00} + a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{11}z_1z_2 + a_{20}z_1^2 + a_{02}z_2^2 + \dots} = h_{00} + h_{10}z_1 + h_{01}z_2 + h_{11}z_1z_2 + h_{20}z_1^2 + h_{02}z_2^2 + \dots \quad (1)$$

dający funkcję impulsową filtra i pozwalający stabilny filtr typu NOI zastąpić równoważnym filtrem SOI. Transformacja SOI-NOI jest w istocie algorytmem odwrócenia wielomianu.

Powyższą funkcję po wymnożeniu przez mianownik można przedstawić w postaci:

$$(a_{00} + a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{11}z_1z_2 + a_{20}z_1^2 + a_{02}z_2^2 + \dots) * (h_{00} + h_{10}z_1 + h_{01}z_2 + h_{11}z_1z_2 + h_{20}z_1^2 + h_{02}z_2^2 + \dots) = b_{00} \quad (2)$$

Jeden z wielomianów w równaniu (2) jest skończony, drugi nieskończony. Po wykorzystaniu spłotowych właściwości współczynników przy mnożeniu wielomianów wynikają równania:

$$\begin{aligned} a_{00}h_{00} &= b_{00} \\ a_{00}h_{10} + a_{10}h_{00} &= 0 & z_1 \\ a_{00}h_{01} + a_{01}h_{00} &= 0 & z_2 \\ a_{00}h_{20} + a_{10}h_{10} + a_{20}h_{00} &= 0 & z_1^2 \\ a_{00}h_{02} + a_{01}h_{01} + a_{02}h_{00} &= 0 & z_2^2 \\ a_{00}h_{11} + a_{10}h_{01} + a_{01}h_{10} + a_{11}h_{00} &= 0 & z_1z_2 \\ &\vdots & \end{aligned} \quad (3)$$

Liczba równań w układzie (3) jest nieskończona, ale każde z równań ma skończoną liczbę składników. Z prawej strony równań układu (3) zaznaczono potęgi zmiennych  $z_1z_2$  odpowiadające poszczególnym współczynnikom. Z obserwacji równań wynika, że współczynniki  $a_{nm}$  można rekursywnie wyznaczać według uporządkowania „horyzontalnego”:

$$a_{00} \rightarrow (a_{10}, a_{01}) \rightarrow (a_{20}, a_{11}, a_{02}) \rightarrow \dots \quad (4)$$

Jeżeli równania będą rozwiązywane według podanej kolejności, to w każdym z nich wystąpi tylko jedna niewiadoma zaznaczona podkreśleniem (3).

Każde składowe równanie splotowe można zapisać w kształcie tablicy symbolicznej przedstawionej w pracy [2].

Horyzontalnie uporządkowane rekursje współczynników  $a$  określające transformację ( $h \rightarrow a$ ) przyjmują następującą postać (zgodnie z przyjętą wartością próbki  $h_{00} = 1$  oraz wartością  $b_{00} = 1$ ):

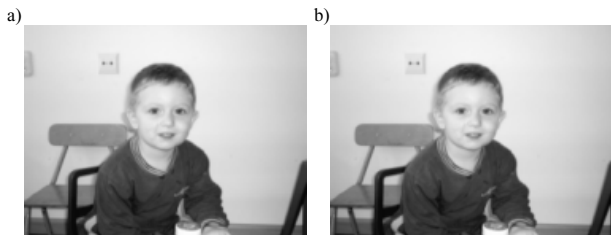
$$\begin{aligned} a_{00}h_{00} &= b_{00} & \Rightarrow a_{00} &= 1 \\ a_{10} &= -a_{00}h_{10} \\ a_{01} &= -a_{00}h_{01} \\ a_{20} &= -a_{10}h_{10} - a_{00}h_{20} \\ a_{02} &= -a_{01}h_{01} - a_{00}h_{02} \\ a_{11} &= -a_{01}h_{10} - a_{10}h_{01} - a_{00}h_{11} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5)$$

Transformacja (5) jest w istocie algorytmem odwrócenia wielomianu. Wniosek ten przekazuje, że operacja znajdowania odwrotności filtra, tzw. filtra odwrotnego, jest kluczowym działaniem zarówno podczas analizy jak i syntezy filtra.

Na podstawie wcześniejszych rozważań algorytm wyznaczania współczynników  $a$  transmitancji przyjmuje formę:

$$a_{i,j} = a_{i,j} - a_{k,l} * h_{i-k+1,j-l+1} \quad (6)$$

Poniższy rysunek przedstawia obraz, którego próbki zastosowano w algorytmie doboru współczynników funkcji wymiernej (rys. 1 a) oraz odpowiedź impulsową układu otrzymaną na podstawie wyznaczonej transmitancji (rys. 1 b).



Rys. 1. Spróbkowany sygnał wyjściowy oraz odpowiedź impulsowa układu 2-D na podstawie wyznaczonej transmitancji

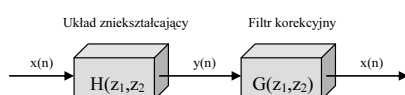
Fig. 1. Samples of the output signal and impulse response of two-dimensional system on the basis appointed rational function

Uzyskane wyniki wskazują na poprawność przeprowadzonych rozważań (poprzez porównanie wartości próbek obu obrazów) i w pełni potwierdzają przydatność metody identyfikacji transmitancji filtrów cyfrowych w dziedzinie czasu dyskretnego. W pracy [3] przedstawiono szerzej przykłady działania algorytmu identyfikacji wraz z symulacjami.

### 3. Zagadnienie korekcji sygnału w połączeniu kaskadowym

Jeśli  $H(z_1, z_2)$  będzie transmitancją (funkcją wymierną wyznaczoną wcześniej analitycznie) układu korygowanego a  $G(z_1, z_2)$  poszukiwaną funkcją transmitancji cyfrowego filtra korekcyjnego, który jest połączony kaskadowo z układem korygowanym to poszukiwany filtr korekcyjny spełni zadanie jeśli zajdzie równość:

$$H(z_1, z_2) * G(z_1, z_2) = 1 \quad (7)$$



Rys. 2. Ilustracja kompensacji zniekształceń przez kaskadowe dołączenie układu korekcyjnego

Fig. 2. The compensation of distorting signal realized by cascade connection of correction filter

Należy zaprojektować układ kompensacyjny będący dokładną odwrotnością układu wprowadzającego zniekształcenia oraz połączyć go kaskadowo z układem zniekształcającym.

$$G(z_1, z_2) = \frac{1}{H(z_1, z_2)} = H^{-1}(z_1, z_2) \quad (8)$$

Jeśli znana jest odpowiedź impulsowa układu zniekształcającego  $h(n_1, n_2)$ , należy zaprojektować taki układ korekcyjny aby wypadkowa odpowiedź całego układu, który nie będzie wprowadzał zniekształceń była opisana operacją splotu postaci:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{nm} g_{k-n,l-m} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=0 \wedge l=0 \\ 0 & \text{dla } k \neq 0 \vee l \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

gdzie:  $h_{nm}$  - odpowiedź impulsowa układu zniekształcającego,  $g_{nm}$  - odpowiedź impulsowa filtra korekcyjnego.

Operacja ta prowadzi do uzyskania idealnego układu odwrotnego (tzw. **odwrotności**). Może jednak okazać się, że filtr korekcyjny, który jest dokładną odwrotnością układu zniekształcającego będzie niestabilny. Należy przyjąć wtedy pewne założenia:

- Poszukiwany filtr korekcyjny dwuwymiarowy będzie filtrem stabilnym,
- Filtr korekcyjny w połączeniu kaskadowym z układem zniekształcającym będzie tworzył układ tożsamościowy lub zbliżony do tożsamościowego.

Poniżej przedstawione zostały dwa sposoby spełnienia przyjętych założeń:

#### 1. SPOSÓB PIERWSZY

Należy założyć pożądany wskaźnik stabilności układu korekcyjnego  $q$  na określonym pewnym poziomie  $q$

$$q = (g, g) \quad \text{gdzie } q \in R \quad i \quad q > 0 \quad (10)$$

oraz

$$(hg - 1, hg - 1) \rightarrow \min \quad (11)$$

czyli poszukiwanie takiego układu korekcyjnego, który w połączeniu z układem zniekształcającym najlepiej aproksymuje układ tożsamościowy.

#### 2. SPOSÓB DRUGI

Należy założyć współczynnik aproksymacji na określonym poziomie  $q$

$$(hg - 1, hg - 1) = q \quad (12)$$

oraz poszukiwanie filtra odwrotnego  $g$  o najlepszym wskaźniku stabilności

$$(g, g) \rightarrow \min \quad (13)$$

Dla pierwszego sposobu tworzy się funkcjonal Lagrange'a w postaci:

$$f(g, \lambda) = (hg - 1, hg - 1) + \lambda[(g, g) - q] \quad (14)$$

gdzie  $\lambda \in R$  oraz  $\lambda$  oznacza (określa) na ile wskaźnik stabilności poszukiwanego układu korekcyjnego będzie wpływał na końcowe rozwiązanie.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia minimum jest:

$$\begin{aligned} h^*(z_1, z_2)h(z_1, z_2)g_\lambda(z_1, z_2) - h^*(z_1, z_2) + \lambda g_\lambda(z_1, z_2) &= 0 \\ i \quad \lambda &> 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Rozwiązaniem jest ułamek operatorowy:

$$g_\lambda(z_1, z_2) = \frac{h^*(z_1, z_2)}{\lambda + h^*(z_1, z_2)h(z_1, z_2)} = \frac{h(z_2^{-1}, z_1^{-1})}{\lambda + h(z_2^{-1}, z_1^{-1})h(z_1, z_2)} \quad (16)$$

Pełna korekcja występuje wtedy, gdy filtr korekcyjny jest dokładną odwrotnością układu korygowanego. Warunek taki (patrz na powyższy wzór) jest spełniony dla  $\lambda = 0$ .

$$g_\lambda(z_1, z_2) = \frac{1}{h(z_1, z_2)} \quad \text{dla } \lambda = 0 \quad (17)$$

W istocie  $g_\lambda(z_1, z_2)$  dla  $\lambda \in [0, \infty)$  tworzy  $\lambda$ -rodzinę filtrów quasi-odwrotnych. Z tej rodziny trzeba wybrać jeden egzemplarz spełniający dokładnie warunek (10). W tym celu definiuje się funkcję stabilizacji przedstawioną w dalszej części pracy i opisaną wzorem (20).

Transmitancja filtra quasi-odwrotnego dwuwymiarowego 2-D przyjmuje zatem postać:

$$G_\lambda(z_1, z_2) = \frac{H(z_2^{-1}, z_1^{-1})}{\lambda + H(z_2^{-1}, z_1^{-1})H(z_1, z_2)} \quad (18)$$

$$G_\lambda(z_1, z_2) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{nm} z_1^n z_2^m}{\lambda + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h_{m_1 m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \quad (19)$$

Na podstawie wzoru (16) uzyskane rozwiązanie tworzy funkcję  $F(\lambda)$  czyli tzw. funkcję stabilizacji dla filtra (układu) korekcyjnego dwuwymiarowego 2-D:

$$F(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|H(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2})|^2}{(\lambda + |H(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2})|^2)^2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (20)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{|H(\omega_{N_1}^{n_1}, \omega_{N_2}^{n_2})|^2}{(\lambda + |H(\omega_{N_1}^{n_1}, \omega_{N_2}^{n_2})|^2)^2} \quad (21)$$

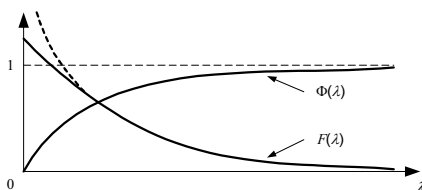
Podobnie zdefiniować można tzw. funkcję aproksymacji (2-D), która jest bezpośrednio związana z funkcją stabilizacji. Zapisujemy ją zależnością:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^2}{(\lambda + |H(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2})|^2)^2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (22)$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{\lambda^2}{(\lambda + |H(\omega_{N_1}^{n_1}, \omega_{N_2}^{n_2})|^2)^2} \quad (23)$$

Jak już wcześniej wspomniano pełna korekcja występuje wtedy, gdy filtr korekcyjny jest dokładną odwrotnością układu zniekształcającego ale tylko dla przypadku gdy  $\lambda = 0$ . Jeśli idealny układ korekcyjny jest niestabilny to wartość funkcji stabilizacji dąży do nieskończoności dla  $\lambda$  dążącego do zera. Biorąc pod uwagę wzór (14) dla  $\lambda = 0$  stabilność układu korekcyjnego nie ma znaczenia a więc jedyny warunek jaki należałoby spełnić opisany jest zależnością (11).

Przebieg funkcji stabilizacji i funkcji aproksymacji przedstawia poniższy rysunek.



Rys. 3. Wykresy funkcji stabilizacji i aproksymacji  
Fig. 3. The diagrams of stabilization and approximation functions

Funkcja stabilizacji jest monotonicznie malejąca. W punkcie  $0^+$  jej wartość może sięgnąć nieskończoności. Przypadek taki zajdzie wówczas gdy charakterystyka częstotliwościowa filtra odwracanego będzie miała punkty przejścia przez zero. Oznacza to występowanie zer funkcji  $H(z_1, z_2)$  leżących na okręgach jednostkowych. Filtr odwrotny jest wtedy niestabilny czego wyrazem jest ucieczka funkcji stabilizacji do nieskończoności. Dodatnia wartość czynnika Lagrange'a  $\lambda$  ma zatem działanie stabilizujące poprzez zmniejszenie wartości  $F(\lambda)$ . Funkcja aproksymacji monotonicznie narasta w przedziale  $\lambda \in [0, \infty)$ . Wraz ze wzrostem  $\lambda$  poprawiają się warunki stabilnościowe filtra quasi-odwrotnego, ale pogarszają się warunki aproksymacyjne.

Zgodnie z założeniem (10) funkcja stabilizacji powinna przyjąć założoną wartość  $q$ , dlatego  $\lambda$  należy wyznaczyć rozwiązując równanie  $F(\lambda) = q$ .

Przy znajomości transmitancji  $H(z_1, z_2)$  układu zniekształcającego poszukiwanie wartości  $\lambda$  może odbywać się numerycznie metodą Newtona [7]. Równanie  $F(\lambda) = q$  ma tylko jedno rozwiązanie  $\lambda$ , któremu odpowiada konkretny egzemplarz  $\lambda$ -quasi-odwrotności, gwarantujący stabilizację na poziomie  $q$ .

Wyniki symulacyjne potwierdzające słuszność przeprowadzanych rozważań przedstawione zostaną w kolejnych publikacjach.

#### 4. Podsumowanie

Przedmiotem pracy są filtry cyfrowe dwuwymiarowe 2-D. Celem artykułu było opracowanie teorii dotyczącej filtrów odwrotnych i quasi-odwrotnych oraz uogólnienie metod quasi-odwrotności z układów jednowymiarowych [5] na układy dwuwymiarowe 2-D. W pierwszej części artykułu przedstawiono oryginalną metodę wyznaczania współczynników transmitancji układów dwuwymiarowych. Transmitancja ta jest niezbędna do określenia równania różnicowego układu korekcyjnego. Na podstawie przeprowadzonych symulacji potwierdzono poprawność przedstawionej metody. W drugiej części pracy zawarto formuły pozwalające określić transmitancję filtra korekcyjnego. Uzyskane na drodze optymalizacyjnej filtry quasi-odwrotne pozwalają na wybór stopnia aproksymacji układu wypadkowego powstałego przez kaskadowe połączenie układu zniekształcającego i filtra korekcyjnego. Synteza filtra korekcyjnego bazuje na uzyskaniu stabilnej odwrotności lub quasi-odwrotności transmitancji układu korygowanego.

#### 5. Literatura

- [1] Kaiser J. F., Mitra S. K.: „Handbook for Digital Signal Processing”. John Wiley & Sons, New York 1993
- [2] Krawczyzsyn G.: „Identyfikacja transmitancji filtrów dwuwymiarowych (2-D) oraz filtrów trójwymiarowych (3-D) w dziedzinie czasu dyskretnego”. IX Konferencja ZKwE, Poznań 2004
- [3] Krawczyzsyn G.: „Przykłady działania algorytmu identyfikacji filtrów 2-D w dziedzinie czasu dyskretnego”. X Konferencja ZKwE, Poznań 2005
- [4] Siwczyński M., Koziół M.: „Synteza quasi odwrotnych filtrów korekcyjnych”. XXIV IC-SPETO, Gliwice-Ustroń 2001
- [5] Siwczyński M., Koziół M.: „Korekcyjne cyfrowe filtry odwrotne i quasiodwrotne” EPN, VI Szkoła – Konferencja, Zielona Góra 2002
- [6] Siwczyński M., Krawczyzsyn G.: „Identyfikacja funkcji wymiernej filtrów jednowymiarowych (1-D) na podstawie próbek odpowiedzi impulsowej”. XXVI IC-SPETO, Gliwice-Niedzica 2003
- [7] Siwczyński M.: „Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych”. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995
- [8] Oppenheim A.V., Schaffer R.W.: „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów”. WKŁ Warszawa 1979
- [9] Zieliński T.: „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów – Od teorii do zastosowań”. WKŁ Warszawa 2005