

Radosław KŁOSIŃSKI

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej

Modyfikacja dyskretnego przekształcenia Fouriera w celu dokładniejszego wyznaczania widma

Dr inż. Radosław KŁOSIŃSKI

Studia wyższe ukończył w 1988 roku na Wydziale Elektrycznym Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze. W 1994 roku uzyskał stopień doktora nauk technicznych w zakresie elektrotechniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Obszar zainteresowań obejmuje elektrotechnikę teoretyczną w powiązaniu z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów, w szczególności: opis, symulacja oraz identyfikacja układów nieliniowych i liniowych o okresowo zmiennych parametrach.

e-mail: R.Klosinski@ime.uz.zgora.pl



Streszczenie

W przypadku niesynchronicznego próbkowania sygnału okresowego, widmo uzyskane za pomocą dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT) obciążone jest błędem tzw. przecieku widma. W pracy zaproponowano oryginalną modyfikację DFT (metodę MDFT) polegającą na dopasowaniu częstotliwości funkcji bazowych do częstotliwości podstawowej niesynchronicznie próbkowanego sygnału. Przedstawiono porównanie wyników MDFT z wynikami DFT oraz metody najmniejszych kwadratów LSM.

Modification of discrete Fourier transformation for more precise spectrum determination

Abstract

In case of non-synchronous sampling of periodic signal, the spectrum obtained from the discrete Fourier transformation (DFT) is deformed by a spectrum leakage phenomenon. In this paper an original modification of DFT is proposed. The basic function frequency is matched with the frequency of the non synchronous sampled signal. Some results of MDFT, DFT and low square method (LSM) comparison are presented in fig. 2 and in fig. 3. The MDFT method is better than DFT and LSM methods in case of poly-harmonic non synchronous sampled signal analysis.

1. Wstęp

W coraz powszechniej stosowanym cyfrowym przetwarzaniu sygnałów, podstawowym narzędziem do wyznaczania widma sygnału, jest dyskretno przekształcenie Fouriera (DFT) realizowane zazwyczaj w postaci szybkiego algorytmu FFT. Problemem zbliżonym do analizy widmowej jest potrzeba wyznaczania zespolonego stosunku sygnałów sinusoidalnych, np. do wyznaczania immitancji dwójników lub do wyznaczania charakterystyk widmowych układów przetwarzania na podstawie pomiarów.

Algorytm DFT pozwala na bezbłędne wyznaczenie amplitud zespolonych składowych harmonicznym pod warunkiem równomiernego i synchronicznego próbkowania. Brany do obliczeń zestaw próbek musi obejmować całkowitą liczbę okresów badanego sygnału. Niestety często jest tak, że trudno przewidzieć kształt i częstotliwość badanego sygnału, wtedy próbkowanie odbywa się w sposób przypadkowy. W takiej sytuacji uzyskane widmo zazwyczaj obciążone jest błędem tzw. przecieku widma. Poprawę dokładności daje stosowanie okien sygnałowych, zagęszczanie widma przez dopisywanie zerowych próbek lub aproksymacja fragmentów widma [1].

Metodą identyfikacji amplitudy i fazy sygnału sinusoidalnego, odporną na problemy z próbkowaniem jest metoda najmniejszych kwadratów LSM [2]. Pozwala ona na dokładne określenie parametrów sinusoidy nawet na podstawie zestawu próbek obejmującego tylko część okresu, zebranych niesynchronicznie i nierównomiernie. Metoda ta wymaga dokładnej znajomości pulsacji badanego

sygnału, w przeciwnym razie wyniki obciążone są znacznymi błędami.

Przedmiotem niniejszej pracy jest oryginalna modyfikacja dyskretnego przekształcenia Fouriera mająca na celu poprawę jej dokładności w przypadku niesynchronicznego próbkowania. Zazwyczaj, w takiej sytuacji nie da się wyodrębnić zestawu próbek obejmującego całkowitą liczbę okresów sygnału. Wynik klasycznego algorytmu DFT będzie obciążony błędem przecieku widma, proponowana metoda pozwala na znaczne zmniejszenie tego błędu.

Obok wyjaśnienia sposobu modyfikacji DFT, przedstawione zostaną wyniki licznych eksperymentów pokazujących właściwości tej metody w porównaniu do klasycznego DFT oraz do algorytmu LSM.

2. Przegląd wybranych metod identyfikacji harmonicznym

Szereg Fouriera to aproksymacja sygnału okresowego, spełniającego warunki Dirichleta, za pomocą kosinusoidalnych funkcji bazowych:

$$2 \cos(k\omega_0 t) = e^{j(k\omega_0 t)} + e^{-j(k\omega_0 t)}, \quad (1)$$

postaci:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (2)$$

gdzie $\omega_0 = 2\pi/T$ - pulsacja podstawowa sygnału. Współczynniki aproksymacji wyznacza się ze wzoru:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3)$$

Amplitudy zespolone poszczególnych harmonicznym określa się na podstawie zależności:

$$X_n = 2c_n \text{ dla } n \neq 0, \quad X_0 = c_0, \quad (4)$$

Dyskretno przekształcenie Fouriera wyprowadza się na podstawie szeregu Fouriera poprzez dyskretyzację wzoru (3) [1], przy następujących założeniach:

- próbki pobierane są ze stałym odstępem T_p ,
- okres sygnału jest całkowitą wielokrotnością okresu próbkowania:

$$T = NT_p, \quad (5)$$

w związku z tym:

$$\omega = \frac{2\pi}{NT_p}. \quad (6)$$

Warunek ten gwarantuje okresowość sygnału spróbkowanego

$$x(n+N) = x(n). \quad (7)$$

Zastępując całkę (3) sumą (całkowanie metoda prostokątów) [1]:

$$c_k = \frac{1}{NT_p} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_p) e^{-jk \frac{2\pi}{NT_p} nT_p}, \quad (8)$$

otrzymuje się równanie analizy DFT:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (9)$$

Algorytm LSM, opierając się na aproksymacji zestawu próbek przebiegiem sinusoidalnym, prowadzi do identyfikacji amplitudy i fazy początkowej sygnału sinusoidalnego [2]:

$$A = \sqrt{C_0^2 + C_1^2}, \quad (10)$$

$$\varphi = \arctg \frac{C_1}{C_0} + \left[1 - \operatorname{sgn}(C_0)\right] \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

Liczby C_0 i C_1 wyznaczone są jako rozwiązanie równania:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (12)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \omega t_0 & \cos \omega t_0 \\ \sin \omega t_1 & \cos \omega t_1 \\ \dots & \dots \\ \sin \omega t_{N-1} & \cos \omega t_{N-1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \dots \\ x(t_{N-1}) \end{bmatrix}$ - wektor pró-

bek zebranych w chwilach t_0, t_1, \dots, t_{N-1} .

Podstawą realizacji algorytmu jest wcześniejsza znajomość pulsacji identyfikowanego sygnału.

W przypadku sygnałów okresowych o dominującej podstawowej harmonicznej, można identyfikować okres i częstotliwość na zasadzie zliczania próbek przypadających na okres sygnału, między miejscami przejścia sygnału przez zero. Dla zwiększenia dokładności stosuje się aproksymację liniową sygnału między próbkami.

3. Modyfikacja dyskretnego przekształcenia Fouriera

W wyniku niesynchronicznego próbkowania, na okres sygnału przypada niecałkowita liczba okresów próbkowania. Stosując algorytm DFT pojawia się zjawisko tzw. przecieku widma, utrudniające dokładną identyfikację składowych harmonicznych. Problem wynika z niedopasowania, w procesie aproksymacji, pulsacji funkcji bazowych do pulsacji sygnału. Stąd pojawił się pomysł modyfikacji DFT.

Zakłada się niesynchroniczne próbkowanie, tzn.:

$$NT_p \neq T, \quad N'T_p = T, \quad (13)$$

gdzie: N – liczba próbek (liczba całkowita), N' – ilość okresów próbkowania przypadających na okres sygnału (liczba rzeczywista). W przypadku synchronicznego próbkowania $N=N'$.

Pomimo próbkowania sygnału okresowego $x(t+T) = x(t)$ uzyskany sygnał cyfrowy nie jest okresowy $x(n+N) \neq x(n)$, spełniona jest jednak zależność:

$$x((n+N')T_p) = x(nT_p). \quad (14)$$

Pulsacja badanego sygnału określona jest wyrażeniem:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N'T_p}. \quad (15)$$

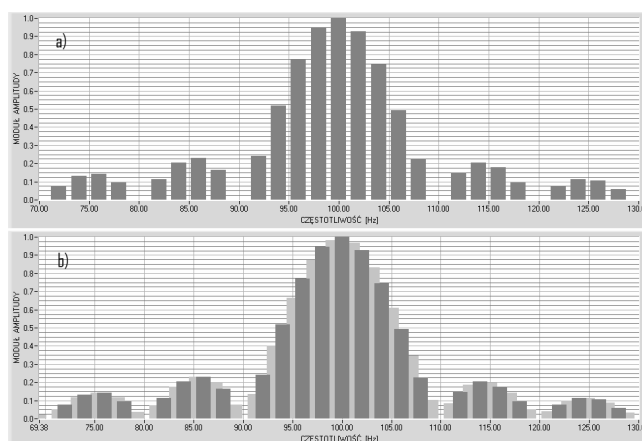
Wprowadzając tę pulsację i zastępując całkę (3) sumą:

$$c_k = \frac{1}{N'T_p} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_p) e^{-jk \frac{2\pi}{N'T_p} nT_p}, \quad (16)$$

otrzymuje się równanie analizy modyfikowanego DFT (MDFT):

$$c_k = \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N'} kn}. \quad (17)$$

Przekształcenie MDFT określone wzorem (17) zapewnia lepsze dopasowanie funkcji bazowych do składowych harmonicznych analizowanego sygnału. Ideę modyfikacji pokazano na rys. 1. Przedmiotem analizy był sygnał sinusoidalny o częstotliwości 100 Hz. Rysunek 1.a) pokazuje pokrywające się widma uzyskane metodami DFT i MDFT w przypadku synchronicznego próbkowania, tzn. $10T = 101T_p$. Widoczny tutaj efekt przecieku widma został sztucznie wywołany metodą dopisywania zerowych próbek, aby lepiej porównać widma. Badana sinusoida jest dziesiątą harmoniczną sygnału i została wyznaczona bezbłędnie, podobnie, jak inne widoczne tu harmoniczne o numerach: 7, 8, 9, 11, 12, i 13 (odpowiednio o częstotliwościach 70, 80, 90, 110, 120 i 130 Hz), których amplitudy wynoszą zero. Rysunek 1.b) pokazuje wynik stosowania metod DFT i MDFT w przypadku niesynchronicznego próbkowania, tj.: $10T = 101,1T_p$, tzn. ilość okresów próbkowania $N' = 101,1$ a liczba próbek $N = 102$. Na widmie wyznaczonym za pomocą DFT widać wyraźnie przeciek (nie tylko ten wywołany dopisywaniem zerowych próbek). Brakuje prążka dla częstotliwości sygnału, czyli 100 Hz, natomiast w okolicach częstotliwości innych harmonicznych (o zerowych amplitudach) wszystkie prążki mają niezerowe wartości. Metoda MDFT pozwoliła określić amplitudę badanej sinusoidy z błędem wynoszącym -0,0095%.



Rys. 1. Porównanie wyników działania metod DFT (kolor jasnoszary) i MDFT (kolor ciemnoszary). Badania sygnału sinusoidalnego o częstotliwości 100 Hz w przypadku: a) synchronicznego próbkowania $10T = 101T_p$, b) niesynchronicznego próbkowania $10T = 101,1T_p$.

Niesynchroniczne próbkowanie oznacza nierównomierny rozkład próbek w zakresie okresu (lub okresów) badanego sygnału. Utrudnia to uśrednianie zgodnie ze wzorem (3). W metodzie MDFT, wzór (17) sumowanie obejmuje N składników, co odpowiada przedziałowi czasu NT_p . Wynik sumowania dzielony jest natomiast przez N' , co odpowiada innemu, zazwyczaj krótszemu przedziałowi czasu równemu okresowi (lub okresom) badanego sygnału. Okazuje się, że taki sposób obliczeń daje najmniejszy błąd, jeżeli kosinusoidalny przebieg badanego sygnału ma fazę początkową $\varphi = \pm\pi/2$. Wyjaśnią to poniższe obliczenia zrealizowane dla czasu ciągłego, dla pierwszej harmonicznej.

Stosowany jest podobny sposób uśredniania, jak w MDFT, tzn. długość przedziału całkowania różni się od okresu badanego sygnału o wartość Δ .

Rozpatrywany jest sygnał:

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (18)$$

Amplituda zespolona sygnału wynosi:

$$X_1 = 1e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi. \quad (19)$$

Można ją obliczyć na podstawie wzoru:

$$X_1 = (a_1 - jb_1), \quad (20)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^{T+\Delta} \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) dt = \frac{T+\Delta}{T} \cos\varphi + \frac{\sin(2\omega\Delta)}{2\omega T} \cos\varphi - \frac{\sin^2\left(2\pi\frac{\Delta}{T}\right)}{\omega T} \sin\varphi, \quad (21)$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^{T+\Delta} \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t) dt = -\frac{T+\Delta}{T} \sin\varphi + \frac{\sin(2\omega\Delta)}{2\omega T} \sin\varphi - \frac{\sin^2\left(2\pi\frac{\Delta}{T}\right)}{\omega T} \cos\varphi. \quad (22)$$

Korzystając z przybliżenia dla małych wartości α :

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad (23)$$

dla $\varphi = \pi/2$, otrzymuje się:

$$a_1 = -\frac{\sin^2\left(2\pi\frac{\Delta}{T}\right)}{\omega T} \approx -2\pi\frac{\Delta^2}{T^2}, \quad (24)$$

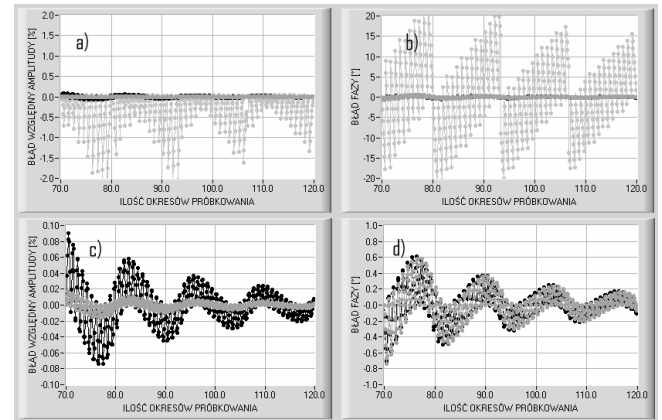
$$b_1 = -\frac{T+\Delta}{T} + \frac{\sin(2\omega\Delta)}{2\omega T} \approx -\frac{T+\Delta}{T} + \frac{\Delta}{T} = -1. \quad (25)$$

Uzyskany wynik obarczony jest niewielkim błędem (przy założeniu $\Delta \ll T$, gdy liczba próbek jest wystarczająco duża), który ma wpływ przede wszystkim na błąd fazy. Liczne eksperymenty obliczeniowe, według wzoru (17), potwierdziły osiągnięcie najmniejszych błędów dla $\varphi = \pm\pi/2$. Uzyskiwane wyniki potwierdzały trafność przybliżeń (24) i (25). Błędy były tego samego rzędu, różniły się jednak, co do wartości, ze względu na dyskretyzację.

4. Porównanie metod LSM, DFT i MDFT

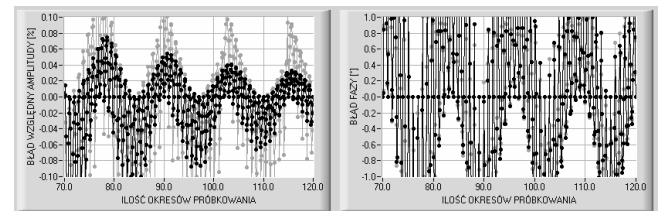
Na rysunku 2. pokazano porównanie wyników działania metod przy wyznaczaniu amplitudy zespolonej sygnału sinusoidalnego. Sygnał poddawany był próbkowaniu w taki sposób, że jego 10 okresów obejmowane było przez 70 do 120 okresów próbkowania. Pulsacja sygnału określana była na podstawie próbek z wykorzystaniem aproksymacji liniowej między próbkami, w miejscach przejścia przez zero. Błąd wyznaczenia pulsacji powodował zwiększenie błędów analiz, jednak taki sposób postępowania jest bardziej zbliżony do identyfikacji sinusoidy na podstawie pomiarów. Wykresy 2.a) oraz 2.b) to porównanie błędów, odpowiednio, modułu i fazy dla trzech metod. Błędy algorytmu DFT są wielokrotnie większe niż błędy pozostałych metod. Wykresy 2.c) oraz

2.d) to zbliżenie poprzednich wykresów dla metod LSM i MDFT. Metoda LSM daje kilkakrotnie mniejszy błąd amplitudy, błędy fazowe są w przybliżeniu takie same.



Rys. 2. Porównanie wyników identyfikacji amplitudy zespolonej sygnału sinusoidalnego, metodami: LSM – kolor szary, DFT – kolor jasnoszary, MDFT – kolor czarny.

W przypadku podobnego badania sygnału sinusoidalnego z nałożonymi harmonicznymi (harmoniczna nr 2 o amplitudzie równej 10% amplitudy harmonicznnej podstawowej i fazy początkowej $\pi/6$, oraz harmoniczna nr 3 o amplitudzie 20% i fazy początkowej $\pi/12$), dokładniejsze wyniki amplitudy daje metoda MDFT w porównaniu z LSM. Wyniki pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Porównanie wyników identyfikacji amplitudy zespolonej sygnału sinusoidalnego z nałożonymi harmonicznymi, metodami: LSM – kolor szary, MDFT – kolor czarny.

5. Podsumowanie

Zaproponowano oryginalny sposób modyfikacji dyskretnego przekształcenia Fouriera w celu dokładniejszego wyznaczania składowych harmonicznymi sygnałów próbkowanych niesynchronicznie. Metoda MDFT, w porównaniu do metod DFT i LSM, daje mniejsze błędy analizy w przypadku sygnałów wieloharmonicznych.

6. Literatura

- [1] T.P. Zieliński: „Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, Wyd. EAIE AGH Kraków 2002.
- [2] J. Gajda, R. Sroka: Pomiary kąta fazowego, metody, układy, algorytmy. Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków 2000.