

Jadwiga LAL-JADZIAK¹, Elżbieta KAWECKA²

¹UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej

²UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki

Ocena dokładności estymacji funkcji korelacyjnych z użyciem modelu wirtualnego korelatora

Dr hab. inż. Jadwiga LAL-JADZIAK

Profesor Uniwersytetu Zielonogórskiego oraz UMK w Toruniu. Autor lub współautor 45 publikacji, w tym 2 monografii, twórca 3 patentów. Członek Sekcji Podstawowych Problemów Metrologii Komitetu Metrologii i Aparatury Pomiarowej PAN. Uprawiane aktualnie kierunki prac: technika korelacyjna, miernictwo sygnałów przypadkowych, estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie a-c z sygnałem ditherowym.



e-mail: j.jadziak@ime.uz.zgora.pl

Mgr inż. Elżbieta KAWECKA

Asystent w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Autor 10 publikacji oraz referatów konferencyjnych. W 2003 roku otworzyła przewod doktorski w dyscyplinie elektrotechnika. Tematem jej rozprawy doktorskiej jest Kształtowanie niepewności cyfrowych pomiarów korelacyjnych.



e-mail: e.kawecką@iie.uz.zgora.pl

Streszczenie

Przedmiotem badań jest niepewność towarzysząca cyfrowym pomiarom korelacyjnym. Analityczne modele błędów estymacji funkcji korelacyjnych są skomplikowane i na ich podstawie trudno szacować dokładność w wielu sytuacjach pomiarowych. Opracowanie odpowiedniego narzędzia informatycznego (modelu wirtualnego korelatora) umożliwiło przeprowadzenie badań eksperymentalnych z tego zakresu. W artykule zaprezentowano model wirtualnego korelatora oraz wybrane wyniki badań wykonanych w celu sprawdzenia poprawności działania aplikacji.

Evaluation of estimation accuracy of correlation functions with use of virtual correlator model

Abstract

The subject of the research is uncertainty in digital correlation measurements. Analytical models of estimation errors of correlation functions are highly complex, therefore evaluation of accuracy is difficult and in many cases is unachievable. For that reason a virtual correlator model is proposed as an alternative to analytical modeling. The model enables determining of digital measurements uncertainty. In this article some preliminary research results are presented and discussed. A comparison of bias of the mean square value estimator modeled in Mathcad (Eq. 14) and obtained by means of virtual correlator model (Eq. 11) is carried out.

1. Wstęp

Funkcje korelacyjne znajdują wciąż wiele zastosowań. Najważniejsze z nich to pomiary sygnałów deterministycznych i losowych w obecności zakłóceń oraz wyznaczanie odległości, prędkości i opóźnień. Estymatory funkcji korelacyjnych realizowane są za pomocą analizatorów sygnałów oraz specjalistycznej aparatury.

Obecnie większość pomiarów realizowanych jest cyfrowo. Na dokładność estymatorów parametrów i charakterystyk sygnałów zdeterminowanych wpływa głównie rozdzielczość kwantowania, natomiast jakość estymacji sygnałów losowych zależy przede wszystkim od liczby użytych próbek. Niewielkie wymagania stawiane kwantowaniu sygnałów przypadkowych były inspiracją opracowania przetwarzania a-c z losowym sygnałem *ditherowym*, które jest obecnie ważnym sposobem udoskonalania systemów pomiarowych.

2. Podstawy teoretyczne

Funkcja autokorelacji ergodycznego procesu $\{x(t)\}$ może być wyrażona zależnością [1]:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt, \quad (1)$$

natomiast funkcja korelacji wzajemnej ergodycznych procesów $\{x(t)\}$ i $\{y(t)\}$ wyrażeniem [1]:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt, \quad (2)$$

gdzie: $x(t)$ i $y(t)$ – realizacje procesów, τ – opóźnienie, T – czas obserwacji.

Każda z nich może być określana na podstawie cyfrowej reprezentacji sygnałów. Zastosowanie konwersji a-c z *ditherem* w zastosowaniu do korelacji wzajemnej oznacza, że do sygnałów $x(t)$ oraz $y(t)$ dodawane są dwa dodatkowe sygnały $d_1(t)$ i $d_2(t)$ nazywane *ditherowymi*. Uzyskane sygnały $x_1(t)$ i $y_1(t)$ są przetwarzane odpowiednio z krokiem próbkowania Δt oraz kwantowania q_1 i q_2 do postaci cyfrowej $x_{1q_1}(i)$ i $y_{1q_2}(i)$. Następnie są one opóźniane względem siebie o k próbek, mnożone, a wynik mnożenia jest uśredniany. Uzyskany w ten sposób estymator przyjmuje postać:

$$\tilde{R}_{xy}^d(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q_1}(i)y_{1q_2}(i+k). \quad (3)$$

Sygnały *ditherowe* $d_1(t)$ i $d_2(t)$ mają wartości średnie równe zero i są niezależne od siebie i od sygnałów $x(t)$ i $y(t)$.

Zastosowanie kwantowania typu *roundoff* w każdym z dwóch kanałów korelatora jest źródłem obciążenia estymatora [2]:

$$\begin{aligned} b[\tilde{R}_{xy}^d(k)] = & \\ = & \frac{q_1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \Phi_{d_1} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i \right) \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2) = (0, 0)} \\ & + \frac{q_2}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \Phi_{d_2} \left(-\frac{2\pi}{q_2} l \right) \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2) = (0, 0)} \\ & - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{d_1} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i \right) \Phi_{d_2} \left(-\frac{2\pi}{q_2} l \right) \Phi_{xy} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: $\Phi_{xy}(v_1, v_2)$ – łączna funkcja charakterystyczna sygnałów badanych x i y , $\Phi_{d_1}(v_1)$, $\Phi_{d_2}(v_2)$ – funkcja charakterystyczna sygnału *ditherowego* $d_1(t)$, $d_2(t)$.

Jeśli przetwarzanie a-c realizowane jest bez *dithera*, to obciążenie jest postaci [2]:

$$\begin{aligned}
b[\tilde{R}_{xy}(k)] = & \\
= & \frac{q_1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i / q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2) = (0,0)} \quad (5) \\
+ & \frac{q_2}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l / q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2) = (0,0)} \\
- & \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{i=-\infty, i \neq 0}^{\infty} \sum_{l=-\infty, l \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{xy} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right)
\end{aligned}$$

Warunki, jakie muszą spełniać sygnały badane oraz *ditherowe*, aby obciążenie nie wystąpiło, szczegółowo analizowano m.in. w [2]. Zwrócono uwagę na konwersję a-c z *ditherem* jako doskonałe narzędzie służące do zmniejszania obciążenia estymatora.

Niestety, stosując takie przetwarzanie należy liczyć się z występowaniem wariancji. Jeśli sygnały *ditherowe* dobrane są tak, że estymator (3) jest nieobciążony, to wariancja może być wyrażona zależnością [3]:

$$Var[\tilde{R}_{xy}^d(k)] = Var[\tilde{R}_{xy}^d(k)] + Var_2[\tilde{R}_{xy}^d(k)], \quad (6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
Var_1[\tilde{R}_{xy}^d(k)] = & \\
\frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} E[x(i)y(i+k)x(l)y(l+k)] - R_{xy}^2(k) & \quad (7)
\end{aligned}$$

jest wariancją korelatora, w którym nie występuje kwantowanie z *ditherem*, natomiast:

$$\begin{aligned}
Var_2[\tilde{R}_{xy}^d(k)] = & \\
\frac{1}{M} \{E[x_{1q}^2(0)y_{1q}^2(k)] - E[x^2(0)y^2(k)]\} & \quad (8)
\end{aligned}$$

jest składową wariancji powodowaną kwantowaniem z sygnałem *ditherowym*.

Matematyczna analiza wariancji jest dość skomplikowana. W pracy [4] dokonano przykładowej analizy dla przypadku, gdy sygnały *ditherowe* mają rozkład prostokątny. Niestety, uzyskane wnioski są dosyć skąpe.

Biorąc pod uwagę złożoność analitycznych modeli obciążenia i wariancji postanowiono opracować oprogramowanie, nazywane dalej modelem wirtualnego korelatora, które może być użyte do oceny jakości estymacji.

3. Model wirtualnego korelatora

Do realizacji modelu wirtualnego korelatora zastosowano środowisko LabWindows® firmy National Instruments w wersji 7.0. Środowisko to umożliwia projektowanie złożonych aplikacji pomiarowych przeznaczonych do pracy w systemie operacyjnym Windows [5].

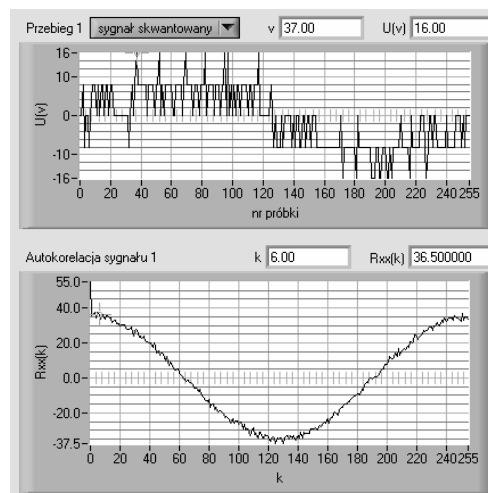
Wykonany model umożliwia m.in. przeprowadzanie badań symulacyjnych wpływu kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na składowe niepewności cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych:

- autokorelacji sygnału w torze pierwszym modelu korelatora (rys.1);
- korelacji wzajemnej sygnałów w torze pierwszym i drugim.

W każdym kanale korelatora można generować sygnał okresowy (harmoniczny, prostokątny, trójkątny i in.) o zadanych przez użytkownika parametrach oraz dodatkowo jeden z dwóch sygnałów *ditherowych*:

- sygnał o rozkładzie normalnym, zerowej wartości średniej i zadanej wartości odchylenia standardowego;

- sygnał o rozkładzie równomiernym, zerowej wartości średniej i zadanej wartości amplitudy.



Rys. 1. Sygnał harmoniczny z *ditherem* o rozkładzie normalnym oraz jego funkcja autokorelacji

Fig. 1. A harmonic signal with Gaussian dither and its autocorrelation function

W obu kanałach korelatora możliwe jest kwantowanie sygnałów. Przetwarzanie a-c realizowane jest za pomocą bipolarnego przetwornika o podanych przez użytkownika parametrach przetwarzania takich jak: liczba B bitów oraz zakres przetwarzania $U_{FS}[V]$. Podczas przetwarzania należy zwrócić uwagę, aby sygnał z *ditherem* nie przekroczył zakresu przetwornika. W tym celu maksymalną wartość generowanego napięcia należy obliczyć korzystając z zależności, dla *dithera* gaussowskiego:

$$U_{FS} = A + 3\sigma_{\max}, \quad (9)$$

gdzie: A – amplituda przetwarzanego sygnału, σ_{\max} – przyjęta maksymalna wartość odchylenia standardowego *dithera*,

oraz dla *dithera* o rozkładzie równomiernym:

$$U_{FS} = A + A_{\max}, \quad (10)$$

gdzie A_{\max} jest maksymalną wartością amplitudy *dithera*.

Program umożliwia ustawienie następujących parametrów przetwarzania:

- częstotliwości próbkowania sygnału;
- liczby próbek sygnału;
- wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacji oraz umożliwia obliczenie:
- wartości średniej arytmetycznej z N wyników estymacji funkcji autokorelacji lub korelacji wzajemnej;
- oceny obciążenia estymatora (miary błędu systematycznego);
- oceny wariancji estymatora opisującej losową składową błąd;
- oceny względnego błędu standardowego (względnej niepewności standardowej typu A).

W opracowanym programie do realizacji przetwarzania a-c, korelacji sygnałów oraz wyznaczania składowych niepewności, zastosowano funkcje spoza bibliotek LabWindows.

W celu zobrazowania sposobu przeprowadzania badań symulacyjnych z użyciem modelu korelatora przedstawiono niżej przebieg przykładowego eksperymentu.

4. Przebieg eksperymentu, uzyskane wyniki oraz ich ocena

Ważnym etapem eksperymentu było porównanie wyników uzyskanych za pomocą modelu korelatora z teoretycznymi błędami

estymacji wartości średniokwadratowej sygnału harmonicznego [6]. Badania wykonano dla sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym. Wartość średniokwadratowa jest wartością funkcji autokorelacji dla argumentu równego zero. Względne obciążenie estymatora określono na podstawie zależności:

$$\delta(\sigma/q) = \frac{\overline{R}_x^d(0, N) - R_x(0)}{A^2/2}, \quad (11)$$

gdzie $\overline{R}_x^d(0, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości funkcji autokorelacji dla argumentu równego zero.

Eksperyment przebiegał w ten sposób, że w wirtualnym korelatorze zostały wygenerowane sygnały harmoniczne i *ditherowe* o rozkładzie normalnym oraz wartości skutecznej $\sigma = 0, 0.2q, 0.3q, 0.5q, 0.8q, 1q$. Aby sygnał z *ditherem* nie przekroczył zakresu przetwornika, dobrano maksymalną wartość generowanego sygnału dla *dithera* o odchyleniu $\sigma_{max} = 1q$ zgodnie z zależnością (9) oraz wzorem:

$$q = \frac{2 \cdot U_{FS}}{2^B}, \quad (12)$$

gdzie: q – krok kwantowania, U_{FS} – zakres przetwarzania, B – liczba bitów przetwornika bipolarnego.

Następnie obliczono wartość średniokwadratową sygnału harmonicznego z *ditherem*:

$$R_x(0) = \frac{A^2}{2} + \sigma^2. \quad (13)$$

Po wprowadzeniu do programu obliczonych parametrów dokonano estymacji względnego obciążenia dla liczby powtórzeń eksperymentu $N = 1000$.

Otrzymane wyniki porównano z obliczonymi za pomocą programu Mathcad na podstawie zależności [6]:

$$\begin{aligned} \delta_M(\sigma/q) = & \frac{1}{6} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2} + \\ & + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \cdot \left[\left(\left(2 \cdot \frac{\sigma}{q} \cdot \left(\frac{A}{q} \right)^{-1} \right)^2 + \beta^{-2} \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot J_0(2\beta) + 2\beta^{-1} \cdot J_1(2\beta) \right] \cdot e^{-2 \left(\frac{\pi \cdot \sigma}{q} \right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

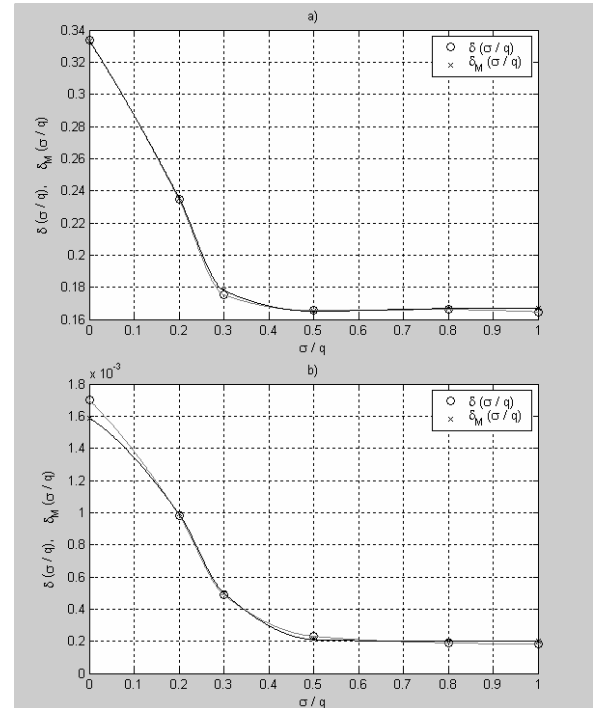
gdzie $\beta = \pi \cdot i \cdot \frac{A}{q}$.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowe wyniki badań uzyskane z eksperymentu zgodnie z (11) oraz analiz matematycznych na podstawie (14). Jak wynika z wykresów, względne obciążenie estymatora maleje wraz ze wzrostem stosunku odchylenia standardowego sygnału *ditherowego* do kroku kwantowania przetwornika, a uzyskane z eksperymentu wyniki są zbliżone z obliczonymi w programie Mathcad. Wartości względnego obciążenia estymatora dla $A/q = 1$ i $\sigma/q = 0,5$ wynoszą odpowiednio:

$$\delta(0,5) = 1,65 \cdot 10^{-1}, \quad \delta_M(0,5) = 1,65 \cdot 10^{-1},$$

natomiast dla $A/q = 29$:

$$\delta(0,5) = 2,31 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_M(0,5) = 2,11 \cdot 10^{-4}.$$



Rys. 2. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału harmonicznego z gaussowskim *ditherem* w funkcji σ/q : a) $A/q=1$, b) $A/q=29$

Fig. 2. Relative bias of the mean square value estimator of the harmonic signal with Gaussian *dither* as function of σ/q : a) $A/q=1$, b) $A/q=29$

5. Podsumowanie

Analityczne modele błędów estymacji określanych cyfrowo funkcji korelacyjnych mają ograniczone zastosowanie praktyczne z powodu dużej złożoności. W tej sytuacji dla celów badawczych został opracowany w środowisku LabWindows firmy National Instruments model wirtualnego korelatora. W programie zostały użyte oryginalne procedury określania estymatorów funkcji korelacyjnych, ponieważ dostępne funkcje pakietu LabWindows prowadziły do niewiarygodnych wyników. Zaprezentowane w artykule rezultaty badań obciążenia estymatora w zależności od poziomu sygnału *ditherowego*, będące częścią prowadzonych badań, są zbliżone z wynikami analiz teoretycznych.

Planowane jest zastosowanie modelu korelatora w badaniach wpływu sygnałów *ditherowych* na wariancję estymatorów funkcji korelacyjnych odpowiedzialną za niepewność typu A.

6. Literatura

- [1] J. S. Bendat, A. G. Piersol: Random data: analysis and measurement procedures. Wiley, New York 1986.
- [2] J. Lal-Jadziak.: Accuracy in determination of correlation functions by digital methods. Metrology and Measurement Systems, vol. VIII, no. 2, 2001.
- [3] K. Y. Chang, A. D. Moore: Modified digital correlator and its estimation errors. IEEE Trans. on IT, 1970, pp. 699-706.
- [4] J. Lal-Jadziak: Bias and variance of crosscorrelation function estimator determined on the basis of signals resulting from A/D conversion with dither. Metrology and Measurement Systems, vol. X, no. 4, 2003.
- [5] LabWindows/CVI Internet Developers Toolkit Online Help.
- [6] J. Lal-Jadziak: Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych. Monografia, no. 101, Wyd. Pol. Zielonogórskiej, Zielona Góra 2001.