

Arkadiusz DROBNICA

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, SAMODZIELNY ZAKŁAD ELEKTROTECHNIKI TEORETYCZNEJ I METROLOGII ELEKTRYCZNEJ

Analiza dyspersyjnej propagacji fal w elementach sprężystych czujników mechanicznych wymuszeń impulsowych

Dr inż. Arkadiusz DROBNICA

Jest adiunktem w Samodzielnym Zakładzie Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii Elektrycznej Politechniki Świętokrzyskiej. Zajmuje się analizą czasowo częstotliwościową w zastosowaniu do zagadnień metrologicznych w tym przede wszystkim do odtwarzania przebiegów pomiarowych.



e-mail: etmad@eden.tu.kielce.pl

Streszczenie

Przedstawiono doświadczalną metodę wyznaczenia charakterystyki dyspersyjnej przetwornika mechanicznego stosowanego w pomiarach impulsowych wymuszeń mechanicznych. Metoda bazuje na analizie czasowo częstotliwościowej sygnału wyjściowego czujnika pomiarowego. Do analizy wykorzystano ciągle przekształcenie falkowe z funkcją okna Gabora. Dla zobrazowania metody, zastosowano ją do wyznaczenia charakterystyki dyspersyjnej przetwornika mechanicznego przy wymuszeniu w postaci mechanicznego uderzenia stalowej kulki.

Abstract

This work presents an experimental method of determining the dispersive characteristic of the mechanical transducer using in impulsive force and pressure measurements. The method is based on continuous wavelet transform with the Gabor analyzing function applied to the output signal of the sensor. An experimental verification of the method is presented.

1. Wprowadzenie

Cylindryczny metalowy pręt, nazywany prętem Hopkinsona, wykorzystywany jest często jako przetwornik mechaniczny w pomiarach sił i ciśnień impulsowych. Dla wymuszeń, które wywołują fale odkształceń o długościach porównywalnych lub mniejszych niż średnica pręta, ich propagacja w pręcie odbywa się dyspersyjnie. Analityczny opis propagacji fal sprężystych w pręcie, najbardziej zgodny z wynikami doświadczeń, dany jest równaniem częstotliwościowym Pochhammera-Chree [2, 5]. Jako charakterystykę dyspersyjną takiego przetwornika podaje się zwykle rozwiązanie tego równania dla pierwszej postaci drgań pręta (pierwszego modu). Charakterystyka ta przy określonym współczynnikiem Poissona ν przedstawiana jest jako funkcja $c_f/c_0 = f(d/\Lambda)$, gdzie c_f - prędkość fazowa fali w pręcie, c_0 - prędkość fali bez dyspersji, d - średnica pręta oraz Λ - długość fali w pręcie.

Warunkiem wykorzystania pręta, w zakresie jego pracy dyspersyjnej jako przetwornika mechanicznego jest znajomość jego charakterystyki dyspersyjnej, umożliwiającej skompensowanie wpływu dyspersji na proces przetwarzania.

W artykule przedstawiono doświadczalną metodę wyznaczenia właściwości dyspersyjnych przetwornika mechanicznego w czujniku mechanicznych wymuszeń impulsowych. Istota tej metody polega na wyznaczeniu przesunięć czasowych poszczególnych składników częstotliwościowych wprowadzanych przez dyspersję w przetworniku. Przesunięcia czasowe wyznaczono wykorzystując analizę czasowo-częstotliwościową sygnału wyjściowego czujnika. Do analizy czasowo-częstotliwościowej wykorzystano przekształcenie falkowe z funkcją okna Gabora.

W wyniku analizy czasowo-częstotliwościowej otrzymuje się rozkład poszczególnych składników częstotliwościowych analizowanego sygnału w czasie. Porównując umiejscowienie w czasie

poszczególnych składników, wyznaczyć można prędkości grupowe c_g w funkcji częstotliwości.

2. Ciągłe przekształcenie falkowe

Ciągłe przekształcenie falkowe jednowymiarowej funkcji $f(t)$ definiuje się jako [1]:

$$WT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (1)$$

gdzie $a > 0$ oznacza tzw. współczynnik skalujący, b jest tzw. współczynnikiem przesunięcia, natomiast $\overline{\psi(t)}$ oznacza funkcję sprzężoną do $\psi(t)$ będącą tzw. bazową funkcją analizującą. Wykorzystując zależność Parsevala, równanie (1) przekształcone może być do postaci:

$$WT(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega b} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega \quad (2)$$

gdzie $\hat{f}(\omega)$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $f(t)$ zdefiniowaną jako:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

Funkcja analizująca $\psi(t)$ spełniać powinna następujący warunek [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4)$$

W praktyce funkcja ta dobierana jest w taki sposób aby $\psi(t)$ oraz jej transformata Fouriera $\hat{\psi}(\omega)$ spełniały następujące dwa warunki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t \psi(t)|^2 dt < \infty \quad (5)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (6)$$

Zakładając, że funkcja $\psi(t)$ skoncentrowana jest wokół czasu $t = 0$, natomiast jej transformata Fouriera $\hat{\psi}(\omega)$ wokół częstotliwości $\omega = \omega_0$, wtedy funkcja analizująca $\psi((t-b)/a)$ oraz jej transformata Fouriera $a e^{-j\omega b} \hat{\psi}(a\omega)$ zlokalizowane będą wokół odpowiednio $t = b$ oraz $\omega = \omega_0/a$. W konsekwencji, przekształcenie falkowe $WT(a, b)$ przy określonych wartościach a i b , będące iloczynem skalarnym dwóch funkcji: funkcji analizowanej $f(t)$ oraz funkcji analizującej $\psi((t-b)/a)$, określa właściwości funkcji $f(t)$ w otoczeniu czasu $t = b$ oraz częstotliwości $\omega = \omega_0/a$. Przekształcenie takie związane jest więc ze składnikiem czasowo-częstotliwościowym funkcji $f(t)$ określonym przez parametry a i b . Zmieniając niezależnie wartości parametrów a i b otrzymać można rozkład czasowo-częstotliwościowy analizowanej funkcji $f(t)$.

Zgodnie z teorią próbkowania, aby dobrze scharakteryzować sygnał o niskiej częstotliwości zastosować należy okno czasowe o odpowiednio dużej szerokości. Dodatkowo, w przypadku kiedy należy zlokalizować w czasie określony wysokoczęstotliwościowy składnik analizowanego sygnału, zastosowane okno czasowe powinno być wystarczająco wąskie. Podstawowa zaleta przekształcenia falkowego przy analizie sygnałów polega na tym, iż wymagania powyższe przy analizie tego typu są automatycznie spełnione, gdyż szerokość okna czasowego funkcji $\psi((t-b)/a)$ jest proporcjonalna do parametru a , a więc odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości. Innymi słowy, rozdzielczość czasowa i częstotliwościowa analizy dokonywanej przy pomocy przekształcenia falkowego jest funkcją współczynnika skalującego a . Zaleta ta ma duże znaczenie szczególnie przy analizie mechanicznych sygnałów uderowych, zawierających z natury składniki z szerokiego zakresu częstotliwości.

W pracy jako bazową funkcję analizującą wykorzystano funkcję Gabora określoną jako [4]:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}} \exp\left[-\frac{(\omega_0/\gamma)^2}{2} t^2 + j\omega_0 t\right] \quad (7)$$

Jej transformata Fouriera ma postać:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega_0}} \exp\left[-\frac{(\gamma/\omega_0)^2}{2} (\omega - \omega_0)^2\right] \quad (8)$$

gdzie: ω_0, γ - dodatnie stałe.

Zgodnie z zasadą nieoznaczoności [1], funkcja ta posiada najmniejsze z możliwych okno czasowo-częstotliwościowe ($\Delta t \Delta \omega = 0,5$).

Pomimo tego, iż funkcja Gabora nie spełnia warunku (4) w ścisłym sensie, warunek ten jest przez nią w przybliżeniu spełniony w przypadku wystarczająco małej wartości współczynnika γ .

W pracy wartość γ ustalono jako $\pi\sqrt{2/\ln 2}$.

3. Analiza dyspersyjnej propagacji fal

Zakładając, że w przetworniku mechanicznym propagują się w kierunku x dwie fale harmoniczne o jednostkowej amplitudzie i częstotliwościach odpowiednio ω_1 i ω_2 zapisane w postaci:

$$u(x, t) = e^{-j(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{-j(k_2 x - \omega_2 t)} \quad (9)$$

gdzie: k_1 i k_2 są liczbami falowymi.

Równanie powyższe zapisać można w postaci:

$$u(x, t) = 2 \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) e^{-j(k_c x - \omega_c t)} \quad (10)$$

gdzie:

$$k_c = (k_1 + k_2)/2, \quad \omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad (11)$$

oraz:

$$\Delta k = (k_1 - k_2)/2, \quad \Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2)/2 \quad (12)$$

Transformata falkowa funkcji $u(x, t)$ wynosi:

$$WTu(x, a, b) = \sqrt{a} \left[e^{-j(k_1 x - \omega_1 b)} \overline{\hat{\psi}(a\omega_1)} + e^{-j(k_2 x - \omega_2 b)} \overline{\hat{\psi}(a\omega_2)} \right] \quad (13)$$

zaś jej moduł:

$$\begin{aligned} |WTu(x, a, b)| &= \\ &= \sqrt{a} \left\{ [\hat{\psi}(a\omega_1)]^2 + [\hat{\psi}(a\omega_2)]^2 + 2\hat{\psi}(a\omega_1)\hat{\psi}(a\omega_2)\cos(2\Delta kx - 2\Delta \omega b) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

Jeśli przebieg $u(x, t)$ zawiera dwie częstotliwości znacząco od siebie oddalone (duża wartość $\Delta \omega$) oraz do transformaty falkowej wykorzystano funkcję bazową Gabora wtedy $\hat{\psi}_g(a\omega_1)\hat{\psi}_g(a\omega_2) \approx 0$. Tak więc moduł transformaty falkowej w takim przypadku wynosi:

$$|WTu(x, a, b)| = \sqrt{a} \left\{ [\hat{\psi}_g(a\omega_1)]^2 + [\hat{\psi}_g(a\omega_2)]^2 \right\}^{1/2} \quad (15)$$

Oznacza to, że moduł transformaty falkowej przedstawia dwa maksima przy $a = \omega_0 / \omega_1$ oraz $a = \omega_0 / \omega_2$ niezależnie od wartości współczynnika b . Maksima te reprezentują w sposób bezpośredni oba składniki częstotliwościowe zawarte w przebiegu $u(x, t)$.

Odmierna sytuacja ma miejsce w przypadku kiedy przebieg $u(x, t)$ zawiera dwie mało różniące się częstotliwości, tzn. $\omega_1 \approx \omega_2$. Wtedy $\hat{\psi}(a\omega_1) \approx \hat{\psi}(a\omega_2) \approx \hat{\psi}(a\omega_c)$, stąd:

$$|WTu(x, a, b)| = \sqrt{2a} |\hat{\psi}(a\omega_c)| [1 + \cos(2\Delta kx - 2\Delta \omega b)]^{1/2} \quad (16)$$

Przy założeniu, że $\Delta \omega$ jest bardzo małe, prędkości: fazową oraz grupową wyrazić można jako:

$$c_f = \omega_c / k_c, \quad c_g = \Delta \omega / \Delta k \quad (17)$$

Jeśli w transformacie falkowej wykorzystana zostanie funkcja bazowa Gabora to przy ustalonej wartości x moduł tej transformaty przedstawia maksimum przy $a = \omega_0 / \omega_c$ oraz współczynnikiem $b = (\Delta k / \Delta \omega)x = x / c_g$ na płaszczyźnie czasowo-częstotliwościowej. Maksimum to w bezpośredni zatem sposób związane jest z falą o częstotliwości ω_c propagującą się z prędkością grupową c_g .

4. Istota metody

Metodę analizy dyspersyjnej propagacji fal zastosowano przy czujniku pomiarowym wykorzystującym jednopunktowy pomiar odkształceń w przetworniku mechanicznym. W rozwiązaniu tym, przekształcenie falkowe dokonywane jest na sygnale pomiarowym z jednego przetwornika mechano-elektrycznego zainstalowanego na przecię w odległości L od jego początku (rys. 1).

Zakłada się, że materiał pręta jest jednorodny oraz, że odcinek pręta pomiędzy jego początkiem i przetwornikiem mechano-elektrycznym jest dwukrotnie większy niż odcinek zawarty między przetwornikiem mechano-elektrycznym a końcem pręta. Rozwiązanie równania ruchu pręta dla tego przypadku jest następujące [3]:

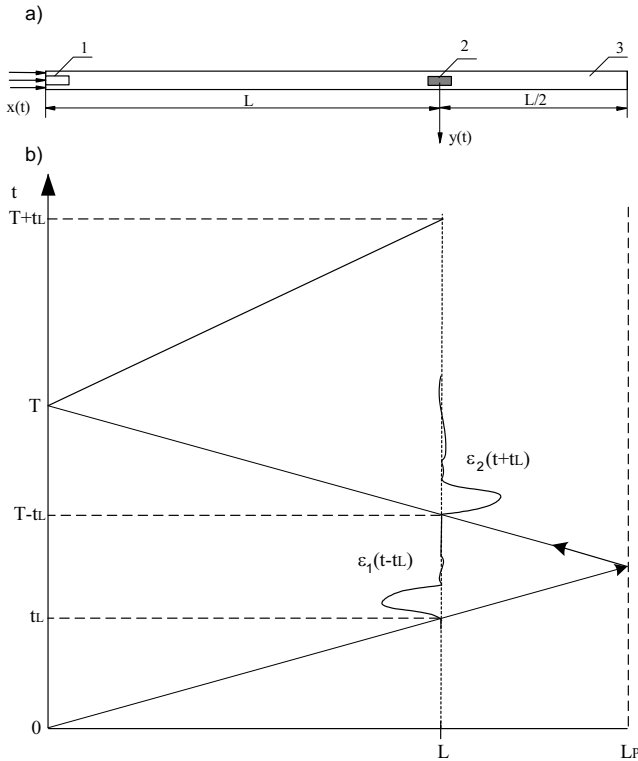
$$\varepsilon_L(t) = \varepsilon_1(t - t_L) + \varepsilon_2(t + t_L) \quad (18)$$

gdzie:

$$\varepsilon_L(t) = \varepsilon(L, t) \text{ i } t_L = L / c_0.$$

W równaniu powyższym ε_1 oznacza pierwotną falę odkształcenia propagującą się w prawo, natomiast ε_2 falę odbitą propagującą się w lewo wzdłuż długości przetwornika.

Dla poprawnego przetwarzania przez przetwornik tensometryczny przebiegów odkształcenia spełnione powinny być dwa warunki: $L \geq 20d$, gdzie d jest średnicą pręta i $2(L_p - L) / c_0 > \alpha$, gdzie α jest czasem trwania wymuszenia.



Rys. 1. Budowa czujnika do pomiaru impulsowych wielkości mechanicznych przy jednopunktowym pomiarze odkształceń (a) oraz przebiegi odkształceń w przetworniku mechano-elektrycznym (b): 1 - hipotetyczny przetwornik mechano-elektryczny; 2 - przetwornik mechano-elektryczny; 3 - przetwornik mechaniczny

Dla $t < T - t_L$ przez przetwornik tensometryczny nie propaguje się fala odbita tzn. $\varepsilon_2(t+t_L) = 0$. Tak więc:

$$\varepsilon_L(t) = \varepsilon_1(t-t_L) \quad (19)$$

Dla $T - t_L < t < T + t_L$ przy $\alpha < T - 2t_L$ przez przetwornik tensometryczny nie propaguje się fala pierwotna tzn. $\varepsilon_1(t-t_L) = 0$. Tak więc:

$$\varepsilon_L(t) = \varepsilon_2(t+t_L) \quad (20)$$

Dla $t > T + t_L$ obie fale pierwotna $\varepsilon_1(t-t_L)$ i odbita $\varepsilon_2(t+t_L)$ nie są zerowe. Przebiegi z tego zakresu czasowego nie są wykorzystywane przy analizie. W czujniku wykorzystuje się przebiegi odpowiadające nie nałożonym falom: pierwotnej $\varepsilon_1(t-t_L)$ oraz pierwszej odbitej $\varepsilon_2(t+t_L)$.

Efektom analizy czasowo-częstotliwościowej, dokonanej na sygnale $y(t)$, jest określenie dla każdego składnika propagowanego sygnału o częstotliwości f przesunięcia czasowego $\Delta t_g(f)$ powstałego na długości L . Wyznaczone w ten sposób przesunięcie czasowe związane jest z prędkością grupową c_g fali o częstotliwości f następującą zależnością:

$$c_g(f) = \frac{L}{\Delta t_g(f)} \quad (21)$$

Zależność powyższą przedstawić można w bardziej dogodnym do dalszej analizy zapisie:

$$\frac{c_g}{c_0} = g\left(\frac{d}{\Lambda}\right) \quad (22)$$

gdzie: c_0 - prędkość propagacji fali w pręcie bez dyspersji, d - średnica pręta, Λ - długość fali.

Zależność pomiędzy prędkością fazową i prędkością grupową wyrazić można następującym równaniem różniczkowym:

$$c_g(\Lambda) = c_f(\Lambda) - \Lambda \frac{dc_f}{d\Lambda} \quad (23)$$

Po odpowiednim przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{c_g}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda}\right) = \frac{c_f}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda}\right) + \frac{d}{\Lambda} \frac{d \frac{c_f}{c_0}}{d \frac{d}{\Lambda}} \quad (24)$$

Rozwiązanie ogólne powyższego równania jest następujące:

$$\frac{c_f}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda}\right) = \frac{1}{d/\Lambda} \left(C + \int_{c_0}^{c_g} \left(\frac{d}{\Lambda}\right) d \frac{d}{\Lambda} \right) \quad (25)$$

gdzie: C - stała.

Przy warunku początkowym:

$$\frac{c_f}{c_0}(0) = 1 \quad (26)$$

rozwiązanie szczególne równania (25) jest następujące:

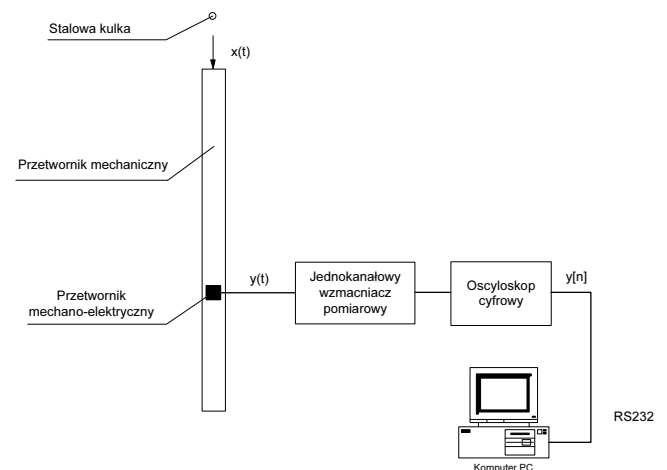
$$\frac{c_f}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda}\right) = \frac{1}{d/\Lambda} \int_{c_0}^{c_g} \left(\frac{d}{\Lambda}\right) d \frac{d}{\Lambda} \quad (27)$$

Tak więc poprzez operację całkowania funkcji $\frac{c_g}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda}\right)$ otrzymać

można zależność $\frac{c_f}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda}\right)$, charakteryzującą przetwornik mechaniczny użyty w eksperymencie.

5. Doświadczalna weryfikacja metody

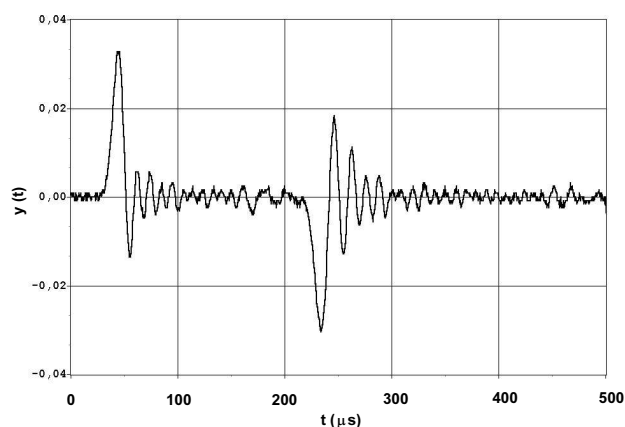
W celu praktycznej weryfikacji opisaną metodę, zastosowano ją do analizy propagacji fal w przetworniku mechanicznym przy pomiarach przebiegów siły uderzenia wywołanych uderzeniem kulki. Budowę stanowiska przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Stanowisko badawcze do pomiarów siły uderzenia

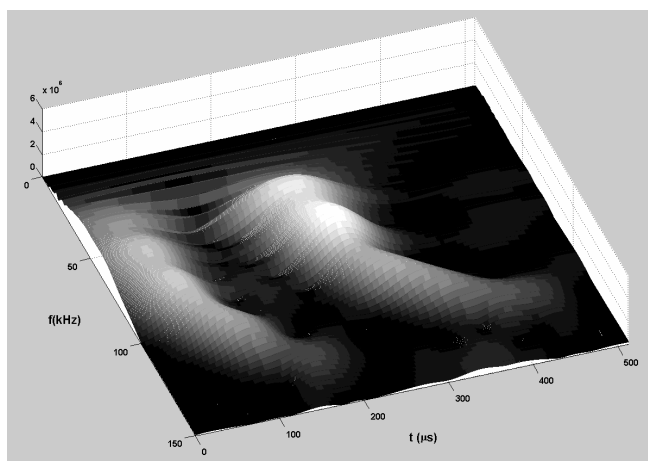
Jako przetwornik mechaniczny wykorzystano metalowy, cylindryczny pręt o długości 1.5m. Na pręcie tym w odległości 1m od powierzchni czołowej gdzie uderza stalowa kulka zamocowano 4 tensometry półprzewodnikowe połączone w układzie mostkowym stanowiące przetwornik mechano-elektryczny. Tensometry zainstalowano w taki sposób, że składowe zginające fal naprężeń są eliminowane, a jedynie rejestrowany jest impuls fali ściskającej, propagującej się od miejsca uderzenia. Doświadczenia przeprowadzone zostały z pionowo zamocowanym prętem, na którego powierzchnię czołową spuszczone były kulki o średnicach od 3mm do 10mm. Dla uzyskania dużych wartości dyspersji, przy takich średnicach kulek, wykorzystano pręt o średnicy 22mm.

Dla uzyskania charakterystyki dyspersyjnej w jak najszerszym paśmie częstotliwościowym, analizy falkowej dokonano na przebiegu czasowym zarejestrowanym przy uderzeniu kulki o średnicy 3mm spuszczonej z wysokości 200mm na powierzchnię czołową przetwornika mechanicznego. Zarejestrowany przebieg naprężenia przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Zarejestrowany przebieg $y(t)$ przy wymuszeniu w postaci uderzenia kulką stalową o średnicy 3mm

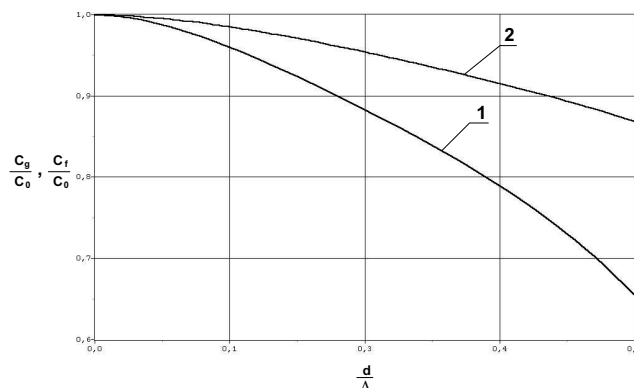
Moduł dokonanej w ten sposób transformaty falkowej przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Moduł transformaty falkowej dokonanej na sygnale wyjściowym $y(t)$ z czujnika pomiarowego przy uderzeniu kulką o średnicy 3mm

Porównując przesunięcia czasowe pomiędzy pierwotną falą naprężenia i falą odbitą dla częstotliwości w zakresie do 120kHz, określono zależność przesunięcia czasowego Δt_g w funkcji częstotliwości f powstałego na odcinku 1m, a następnie wykorzystując

zależności podane w pkt. 4 wyznaczono charakterystykę dyspersyjną pręta $\frac{c_g}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda} \right)$ (rys. 5).



Rys. 5. Wyznaczone eksperymentalnie charakterystyki: 1) $\frac{c_g}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda} \right)$ oraz 2) $\frac{c_r}{c_0} \left(\frac{d}{\Lambda} \right)$

6. Podsumowanie

W artykule pokazano, że przebiegi, pierwotnej i pierwszej odbitej, sprężystych fal odkształceń, powstałe w przetworniku mechanicznym pod wpływem działania na jedną z jego powierzchni czołowych siły lub ciśnienia impulsowego, umożliwiają wyznaczenie charakterystyki dyspersyjnej tego przetwornika. Narzędziem umożliwiającym wyznaczenie charakterystyki dyspersyjnej z zarejestrowanych fal odkształceń może być transformata falkowa z odpowiednią funkcją bazową.

Dla uzasadnienia metody pokazano, że wartość szczytowa modułu ciągłej transformaty falkowej jest ściśle związana z prędkością grupową fal dyspersyjnych. Dla uzyskania najlepszej rozdzielczości czasowo-częstotliwościowej w analizie falkowej wykorzystano funkcję analizującą Gabora.

Z przeprowadzonych badań eksperymentalnych wynika, że ciągła transformata falkowa umożliwia analizę propagacji fal z dyspersją w strukturach mechanicznych w dziedzinie częstotliwości. Pozwala to znakomicie ułatwić interpretację wpływu zjawiska dyspersji na przebiegi czasowe, oraz wykorzystać otrzymane charakterystyki do korekcji wpływu dyspersji w procesie odtwarzania impulsowych wymuszeń mechanicznych.

7. Literatura

- [1] Chui C. H.: An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego, CA, 1992.
- [2] Davis R. M.: Wolny naprężenij w twierdych tielach, Izdaatielstwo Inostrannoj Litieratury, Moskwa, 1961.
- [3] Drobnica A.: Korekcja zniekształceń dyspersyjnych w przetworniku mechanicznym typu pręt Hopkinsona, Rozprawa doktorska, Politechnika Świętokrzyska, Kielce, 2002.
- [4] Kishimoto K., Inoue H., Hamada M., Shibuya T.: Time Frequency Analysis of Dispersive Waves by Means of Wavelet Transform, Journal of Applied Mechanics, vol. 62, pp. 841-846, December 1995.
- [5] Kolsky H.: Stress Waves in Solids, New York: Dover, 1963.

Title: The analysis of waves dispersive propagation in mechanical transducers of impulsive force and pressure sensors

Artykuł recenzowany