

## Józef KUŚMIERZ

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, SAMODZIELNY ZAKŁAD ELEKTROTECHNIKI TEORETYCZNEJ I METROLOGII ELEKTRYCZNEJ

# Analiza funkcji przetwarzania przetwornika indukcyjnościowego zanurzeniowego do bezstykowego pomiaru konduktywności roztworów przewodzących

Dr inż. Józef KUŚMIERZ

Ukończył specjalność Metrologia Elektryczna w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej w 1972 roku. Stopień doktora uzyskał w 1981 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej. Autor ok. 30 publikacji i współautor 5 patentów. Główne zainteresowania naukowe: bezstykowe pomiary konduktywności materiałów przewodzących.



e-mail: kusmierz@tu.kielce.pl

### Streszczenie

Opisano sposób wyprowadzenia równania przetwarzania dla przetwornika indukcyjnościowego, przeznaczanego do pomiaru konduktywności elektrolitów znajdujących się w zbiornikach np. kadziach. W oparciu o otrzymaną funkcję przetwarzania przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych, umożliwiające analizę metrologiczną tego układu. W wyniku przeprowadzonej analizy uzyskano informację odnośnie charakterystyki przetwarzania, wpływu na jej wartości właściwości elektrycznych i magnetycznych ścian zbiornika zawierającego badany ośrodek, a także odległości umieszczenia przetwornika od ścian o powyższych właściwościach. Dokonano weryfikacji doświadczalnej otrzymanych zależności analitycznych, która polegała na pomiarze konduktywności elektrolitu (roztworu kwasu siarkowego) o znanym stężeniu w stałej temperaturze za pomocą wykonanego przetwornika. Uzyskane wyniki wskazują na poprawność otrzymanego modelu przetwornika.

### Abstract

This paper contains the processing formula of an inductive transducer in an immersion version for contactless measurements of conductivity of conductive media. Dependencies determining the influence of the electric and magnetic properties of the walls of the vessel, which contains the investigated medium upon the transfer function of the transducer have also been formulated. These dependencies can also be used to designing the transducer in a shield with aforementioned properties. Moreover, experiments have been carried out which consisted in the measurement of the conductivity of the  $H_2SO_4$  electrolyte solutions of known concentrations in a constant temperature by means of the transducer designed and using the theoretical dependencies derived. The results obtained demonstrate that the measurements – by means of the proposed methodology – can be carried out with a sufficient accuracy.

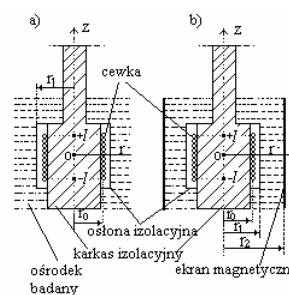
## 1. Wstęp

W dziedzinie pomiarów wykorzystujących przetworniki parametryczne istotnym zagadnieniem jest znajomość ich charakterystyki przetwarzania. Do przetworników parametrycznych należą przetworniki indukcyjnościowe, w których funkcja przetwarzania wyrażana jest w postaci zależności wiążącej zmiany impedancji obserwowanej na zaciskach cewki z konduktywnością badanego medium, strukturą geometryczną i częstotliwością napięcia zasilającego uzwojenie cewki. W literaturze dotyczącej bezstykowego pomiaru konduktywności różnych substancji za pomocą przetworników indukcyjnościowych otrzymano wzory albo przy zbyt dużym uproszczeniu (np. dla cewki długiej [1], albo dla określonej struktury geometrycznej [2, 3, 4] i których nie można wykorzystać do analizy metrologicznej innej struktury. Rozwiązania przedstawione w [3, 4 i 2] dotyczą odpowiednio: konstrukcji przetwornika w wersji przepływowej i konstrukcji w wersji zanurzeniowej bez karkasu i osłony izolacyjnej. W tej pracy poddano analizie przetwornik indukcyjnościowy z uzwojeniem nawiniętym na karkasie izolacyjnym w postaci krótkiej cewki jednowarstwowej (rys. 1a). Uzwojenie od strony substancji badanej jest zabezpieczone osłoną

izolacyjną. Wpływ otoczenia na funkcję przetwarzania ustabilizowano poprzez umieszczenie cewki przetwornika w magnetycznym ekranie o własnościach przewodzących (rys. 1b).

## 2. Modele obliczeniowe

Dla rozwiązania zagadnienia przyjęto modele konstrukcyjne przetwornika w wersji zanurzeniowej (rys. 1).



Rys. 1. Modele przetwornika zanurzeniowego: a) bez ekranu, b) z ekranem  
Fig. 1. Computational models of immersion transducers

W analizowanych modelach przyjęto następujące parametry ośrodków:

- ośrodek badany

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } r > r_1, \\ \text{b) } r_1 \leq r \leq r_2, \end{array} \right\} \sigma > 0, \quad \mu = \mu_0,$$

gdzie:  $\sigma$  - konduktywność ośrodka,  $\mu$  - przenikalność magnetyczna ośrodka,  $\mu_0$  - przenikalność magnetyczna próżni

- cewka wzbudzająca

$$r = r_0, \quad i = \begin{cases} \frac{Iw}{2l}, & \text{dla } |z| < l, \\ 0, & \text{dla } |z| > l, \end{cases}$$

- obszary bezprądowe

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 0 \leq r < r_0, \\ \quad r_0 < r \leq r_1, \end{array} \right\} \sigma = 0, \quad \mu = \mu_0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } 0 \leq r < r_0, \\ \quad r_0 < r < r_1, \\ \quad r > r_2, \end{array} \right\} \sigma = 0, \quad \mu = \mu_0,$$

Właściwości ekranu przyjęto jako idealne i stąd w modelu nie uwzględniono ich grubości. W modelach obliczeniowych równaniami wyjściowymi są równania Maxwella[4,5], których rozwiązanie poszukuje się za pomocą składowej kątowej potencjału wektorowego  $A_\phi(r, z)$  w walcowym układzie współrzędnych.

Wynika to z symetrii osiowej przetwornika oraz przyjętego modelu cewki wzbudzenia w postaci prądów powierzchniowych o składowych kątowych płynących na powierzchni walca o promieniu  $r_0$  i wysokości  $2l$ . Potencjał wektorowy  $A_\phi$  spełnia w obszarach bezprądowych równanie Laplace'a [5] ( $\nabla^2 A_\phi = 0$ ), natomiast w obszarze wypełnionym ośrodkiem badanym równanie Helmholtza [5]  $\nabla^2 A_\phi = k^2 A_\phi$ ,  $k = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma}$ ,  $j^2 = -1$ .

W celu zrealizowania funkcji przetwarzania wyznaczono potencjał wektorowy w obszarze bezprądowym ( $r_0 \leq r \leq r_1$ ), w którym

znajduje się uzwojenie cewki. Dla ułatwienia obliczeń rachunkowych zastosowano następujący sposób rozwiązania:

- 1) najpierw obliczono rozkład pola wzbudzenia związany z gęstością prądu płynącego przez uzwojenie cewki,
- 2) przyjęto w obszarach bezprądowych superpozycję pola wzbudzenia i pola prądów wirowych spełniającego równanie Laplace'a ( $\nabla^2 A_\varphi = 0$ ),
- 3) w obszarze z wyindukowanymi prądami wirowymi bezpośrednio wyznaczono pole z rozwiązaniem równania Helmholtza ( $\nabla^2 A_\varphi = k^2 A_\varphi$ ).

Przy wyznaczaniu rozwiązania powyższych równań zastosowano całkowite przekształcenie Fouriera [6] względem zmiennej „z” otrzymując dla każdego podobzaru odpowiednie równanie Bessela rzędu pierwszego. Rozwiązanie tych równań wyraża się za pomocą zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju z odpowiednimi stałymi całkowania. Wyznacza się je na podstawie warunków brzegowych, które dotyczą ciągłości pól  $A_\varphi$  na powierzchniach rozdziału obszarów obliczeniowych ( $r = r_0$  i  $r = r_1$ ) oraz porównania składowych stycznych natężenia pola magnetycznego ( $\mu^{-1} \nabla \times A_\varphi$ ) na tych powierzchniach (rys.1a). W przypadku modelu z rys.1b na powierzchni idealnie przewodzącej ( $\sigma_1 \rightarrow \infty$ ) o promieniu  $r = r_2$  zachodzi dodatkowo zerowanie się składowej normalnej indukcji magnetycznej i  $A_\varphi = 0$ , dla  $r = r_2$ , a ponieważ przyjęto, że powierzchnia ta ma idealne własności magnetyczne ( $\mu \rightarrow \infty$ ), to na tej powierzchni następuje zerowanie się składowej stycznej indukcji magnetycznej tzn.  $B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = 0$ , dla  $r = r_2$ . Uwzględniając powyższe warunki brzegowe otrzymuje się zależność określającą potencjał wektorowy na powierzchni modelującej cewkę

$$A_\varphi(r_0, z) = \frac{\mu_0 I w r_0}{\pi l} \int_0^\infty f_{1-3}(\lambda) I_1(\lambda r_0) \frac{\sin \lambda l \cos \lambda z}{\lambda} d\lambda, \quad (1)$$

gdzie:

- dla modelu z rys. 1a:

$$f_1(\lambda) = K_1(\lambda r_0) + \frac{\lambda K_0(\lambda r_1) K_1(q r_1) - q K_0(q r_1) K_1(\lambda r_1)}{\lambda I_0(\lambda r_1) K_1(q r_1) + q K_0(q r_1) I_1(\lambda r_1)} I_1(\lambda r_0),$$

- dla modelu z rys. 1b (dla  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ ):

$$f_2(\lambda) = K_1(\lambda r_0) + \frac{\lambda K_0(\lambda r_1) A_1(\lambda) + q K_1(\lambda r_1) A_2(\lambda)}{\lambda I_0(\lambda r_1) A_1(\lambda) - q I_1(\lambda r_1) A_2(\lambda)} I_1(\lambda r_0),$$

- dla modelu z rys. 1b (dla  $\mu \rightarrow \infty$ ):

$$f_3(\lambda) = K_1(\lambda r_0) + \frac{\lambda K_0(\lambda r_1) B_1(\lambda) - q K_1(\lambda r_1) B_2(\lambda)}{\lambda I_0(\lambda r_1) B_1(\lambda) + q I_1(\lambda r_1) B_2(\lambda)} I_1(\lambda r_0),$$

i

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= K_1(q r_2) I_1(q r_1) - K_1(q r_1) I_1(q r_2), \\ A_2(\lambda) &= K_1(q r_2) I_0(q r_1) + K_0(q r_1) I_1(q r_2), \\ B_1(\lambda) &= K_0(q r_2) I_1(q r_1) + K_1(q r_1) I_0(q r_2), \\ B_2(\lambda) &= K_0(q r_1) I_0(q r_2) - K_0(q r_2) I_0(q r_1), \\ q^2 &= \lambda^2 + j \omega \mu_0 \sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda$  - zmienna wynikająca z transformacji Foriera,  $I_1, I_0, K_1, K_0$  - zmodyfikowane funkcje Bessla.

Dalej wyznaczono składową styczną pola elektrycznego:  $E_\varphi(r_0, z) = -j \omega A_\varphi(r_0, z)$ , a następnie napięcie na zaciskach

$$\text{cewki: } U = \frac{2\pi_0 w}{2l} \int_{-l}^l E_\varphi(r_0, z) dz \text{ oraz impedancję ze wzoru } Z = \frac{U}{I}.$$

### 3. Równania przetwarzania

Równanie przetwarzania zdefiniowano zależnością:

$$\Delta^0 Z = \frac{Z - Z_0}{|Z_0|} = \Delta^0 R + j \Delta^0 X, \quad (3)$$

gdzie:  $Z, Z_0$  - impedancja cewki z próbką i bez próbki. Dla zapewnienia uniwersalności otrzymanych równań wprowadzono nową zmienną:  $y = \frac{\lambda}{\sqrt{\omega \mu_0 \sigma}}$ , a pozostałe parametry wyrażono

w postaci względnej:  $\delta = r_0 \sqrt{\omega \mu_0 \sigma}$  i przyjęto:

a) dla modelu z rys. 1a:  $\alpha = \frac{r_1}{r_0}, \xi = \frac{l}{r_0},$

b) dla modelu z rys. 1b:  $\alpha_1 = \frac{r_0}{r_1}, \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}, \xi = \frac{l}{r_0}.$

Po wprowadzeniu tych zmian, równania przetwarzania mają postać:

- dla modelu z rys. 1a:

$$\Delta^0 Z = \frac{j \int_0^\infty F_1(y) [I_1(y\delta) \frac{\sin y\delta\xi}{y}]^2 dy}{\int_0^\infty I_1(y\delta) K_1(y\delta) [\frac{\sin y\delta\xi}{y}]^2 dy}, \quad (4)$$

gdzie

$$F_1(y) = \frac{y K_0(x_1) K_1(x_2) - \sqrt{y^2 + j} K_0(x_2) K_1(x_1)}{y I_0(x_1) K_1(x_2) + \sqrt{y^2 + j} K_0(x_2) I_1(x_1)},$$

$$x_1 = \delta \alpha y, \quad x_2 = \delta \alpha \sqrt{y^2 + j},$$

- dla modelu z rys. 1b z  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ :

$$\Delta^0 Z = \frac{j \int_0^\infty F_2(y) [I_1(y\delta) \frac{\sin y\delta\xi}{y}]^2 dy}{\int_0^\infty I_1(y\delta) K_1(y\delta) [\frac{\sin y\delta\xi}{y}]^2 dy}, \quad (5)$$

gdzie

$$F_2(y) = \frac{y K_0(y\delta/\alpha_1) A_1(y) + \sqrt{y^2 + j} K_1(y\delta/\alpha_1) A_2(y)}{y I_0(y\delta/\alpha_1) A_1(y) - \sqrt{y^2 + j} I_1(y\delta/\alpha_1) A_2(y)},$$

- dla modelu z rys. 1b z  $\mu_1 \rightarrow \infty$ :

$$\Delta^0 Z = \frac{j \int_0^\infty F_3(y) [I_1(y\delta) \frac{\sin y\delta\xi}{y}]^2 dy}{\int_0^\infty I_1(y\delta) K_1(y\delta) [\frac{\sin y\delta\xi}{y}]^2 dy}, \quad (6)$$

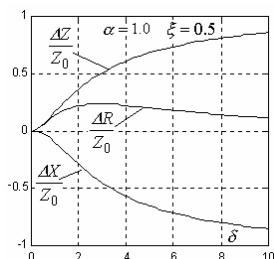
gdzie

$$F_3(y) = \frac{y K_0(y\delta/\alpha_1) B_1(y) - \sqrt{y^2 + j} K_1(y\delta/\alpha_1) B_2(y)}{y I_0(y\delta/\alpha_1) B_1(y) + \sqrt{y^2 + j} I_1(y\delta/\alpha_1) B_2(y)}$$

Wyrażenia  $A_1(y), A_2(y), B_1(y)$  i  $B_2(y)$  otrzymuje się po podstawieniu we wzorach (2) w miejsce argumentów  $q r_2$  i  $q r_1$  odpowiednio  $\frac{\delta}{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{y^2 + j}$  i  $\frac{\delta}{\alpha_1} \sqrt{y^2 + j}$ .

### 4. Wyniki obliczeń

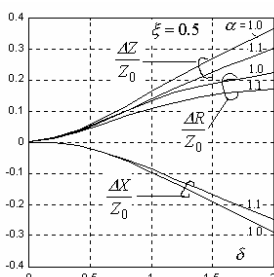
W celu ujawnienia właściwości metrologicznych wynikających z otrzymanych zależności poddano je analizie numerycznej za pomocą programów napisanych w środowisku Matlab. Na rys. 2 przedstawiono wyniki obliczeń uzyskane w oparciu o wzór (4). Wyrażają one zmiany poszczególnych składowych przyrostu impedancji ( $\Delta^0 Z$ ) w funkcji argumentu  $\delta$  w szerokim zakresie zmian jego wartości.



Rys. 2. Funkcje przetwarzania przetwornika w szerokim zakresie zmian parametru  $\delta$

Fig. 2. Transfer functions of the transducer in a wide range of changes of argument  $\delta$

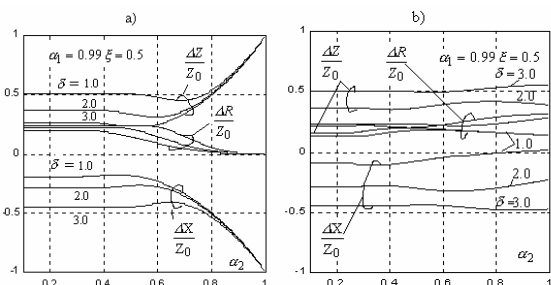
Z przedstawionych wykresów wynika, że składowa rezystancyjna traci charakter funkcji monotonicznej dla  $\delta > 2$  a składowa reakcyjna dla  $\delta > 4$  staje się coraz bardziej płaska, a przez to mniej czuła na zmiany parametru  $\delta$ . Wykresy dostarczają informacji na temat wyboru optymalnego zakresu parametru  $\delta$ , w którym składowe mają największe nachylenie w stosunku do osi  $\delta$ . Dla składowej  $\text{Re}(\Delta^0 Z)$  optymalnym zakresem jest przedział (0.4 - 2), a dla składowej  $\text{Im}(\Delta^0 Z)$  przedział (0.4 - 4). W związku z tym dalsze obliczenia przeprowadzono dla wartości  $\delta$  z przedziału (0 - 2) i przy różnych wartościach współczynnika  $\alpha$ . Wyniki obliczeń przedstawiono na rys.3.



Rys. 3. Funkcje przetwarzania przetwornika w zakresie praktycznego jego zastosowania

Fig. 3. Transfer functions of the transducer in the area of practical applications

Wykresy (rys. 3) dodatkowo obrazują wpływ grubości osłony izolacyjnej na funkcję przetwarzania (parametr  $\alpha$ ). Natomiast wykresy na rys. 4a i 4b przedstawiają wpływ odległości ekranu o idealnych właściwościach przewodzących ( $\sigma_1 = \infty$ ) i magnetycznych ( $\mu = \infty$ ) na funkcje przetwarzania przetwornika. Za ekran można również uważać ściany naczynia (kadzi) zawierającego badane medium. Na podstawie tych wykresów istnieje możliwość określenia odległości umieszczenia przetwornika od ścian naczynia tak, by wpływ tych ścian był mniejszy od założonego, lub całkowicie pominięty.



Rys. 4. Wpływ odległości ekranu (ściany naczynia) od powierzchni uzwojenia cewki na funkcje przejścia, a) - o własnościach przewodzących, b) - o własnościach magnetycznych.

Fig. 4. Influence of the distance of the shield (vessel walls) upon transfer functions for: a) the shield with conductive properties, b) the shield with magnetic properties

## 5. Pomiar

W eksperymencie jako badanego ośrodka użyto roztworu kwasu siarkowego o stężeniu 20%. Jego konduktywność zmierzono za pomocą konduktometru Ok.-102/l f-my Radelkis o błędzie granicznym 2 %i uzyskano 65,3 S/m. Wartość tą przyjęto za wartość odniesienia ( $\sigma_0$ ) w stosunku do wyniku uzyskanego za pomocą opracowanego według kryteriów wynikających z przedstawionej analizy przetwornika indukcyjnościowego. Przetwornik ten został wykonany w postaci cewki jednowarstwowej nawiniętej drutem miedzianym bezpośrednio na powierzchni karkasu izolacyjnego o średnicy 100,0 mm. Uzwojenie od strony zewnętrznej zostało zabezpieczone osłoną izolacyjną o grubości 1,0mm. Dla wykonanego przetwornika współczynniki ( $\alpha, \xi$ ) wynikające z wymiarów geometrycznych i wchodzące do równań przetwarzania wynosiły odpowiednio: 1,0 i 0,5.

Pomiaru zmian parametrów elektrycznych przetwornika wywołanych zanurzeniem przetwornika w badanym ośrodku dokonano za pomocą transformatorowego mostka RLC przy częstotliwości równej 1MHz. Zmierzone pośrednio wartości  $\text{Re}(\Delta^0 Z)$  i  $\text{Im}(\Delta^0 Z)$  i obliczone numerycznie charakterystyki  $\text{Re}(\Delta^0 Z) = f_1(\delta)$  umożliwiły określenie wartości argumentu  $\delta$ , a następnie z zależności

$$\sigma = \frac{\delta^2}{r_0^2 \omega \mu_0} - \text{wartości konduktywności badanego ośrodka. Otrzy-$$

mano wynik  $\sigma = 67,2 \text{ S/m}$ . Porównując wartości  $\sigma$  i  $\sigma_0$  można stwierdzić, że ich różnica nie przekracza 3 %.

## 6. Uwagi końcowe

Uzyskane wzory i opracowane programy komputerowe, realizujące na ich podstawie obliczenia numeryczne umożliwiają dobór wymiarów geometrycznych przetworników i częstotliwości zasilania w taki sposób, aby pracowały w korzystnym punkcie charakterystyki (rys.2). Jeżeli konduktywność badanego ośrodka jest mała, to korzystne punkty na charakterystykach osiąga się zwiększając promień cewki i częstotliwość zasilania. W przypadku pomiaru konduktywności badanego ośrodka znajdującego się w zbiorniku, którego ściany mają właściwości przewodzące i magnetyczne, wpływ ich na charakterystykę przetwarzania można uczynić pomijalnie mały, posługując się w tym celu wykresami z rys. 4, lub dokonując obliczeń w oparciu o podane zależności analityczne. Uzyskane wyniki wskazują, że pomiary tą metodą mogą być wykonywane bezstykowo z niepewnością nie przekraczającą kilku procent.

## 7. Literatura

- [1] Hepner H., Stroppe H.: Magnetyczne i indukcyjne badanie metali. Wydawnictwo Śląsk, Warszawa 1972
- [2] Przygodzki J., Kuśmierz J.: Oscillometric Inductance Transducer Design Taking Into Consideration Actual Dimensions of The Coil And Medium. Journal Electroanal. Chem. 190, 1985, str. 75-84
- [3] Nakane H.: A method for simultaneously measuring resistivity. IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 38, No. 2, 1989, str. 438-441
- [4] Kuśmierz J.: Analiza funkcji przetwarzania przetworników indukcyjnościowych do bezstykowego pomiaru przewodności elektrycznej. Metrologia i Systemy Pomiarowe, PAN, Tom 5, z. 3, 1998, str. 173-182
- [5] Bochenek K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa 1969
- [6] Fichtenholz G. M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1978 Kaczmarek Z.: Pomiar i odtwarzanie przebiegów sił i ciśnień impulsowych. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, seria Monografie, nr 26, Kielce 2002.

**Title:** The inductive transducer in an immersion version for the contactless conductivity measurements of conductive solutions