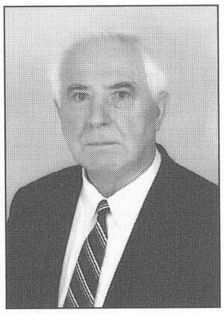
Tadeusz KACZOREK
POLITECHNIKA WARSZAWSKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Wyznaczanie macierzy przekształceń zmiennych stanu liniowych układów o zmiennych parametrach

Prof. dr hab. inż. TADEUSZ KACZOREK



Uzyskał dyplom magistra inżyniera elektryka w ròku 1956 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Na tym samym Wydziale w roku 1962 uzyskał stopień naukowy doktora nauk technicznych, a w roku 1964 - doktora habilitowanego. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego nadała Mu Rada Państwa w roku 1971, a profesora zwyczajnego w 1974 roku. Członkiem korespondentem PAN został wybrany w 1986 roku, a członkiem rzeczywistym w 1998. Od czerwca 1999 roku jest również członkiem zwyczajnym Akademii Inżynierskiej w Polsce. W latach 1969-1970 był dziekanem Wydziału Elektrycznego, a w latach 1970-1979 prorektorem ds. nauczania Politechniki Warszawskiej. W latach 1970-1981 był dyrektorem Instytutu Sterowania i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej. W latach 1988-1991 był dyrektorem Stacji Naukowej PAN w Rzymie. Jest autorem 18 książek, w tym 5-ciu wydanych za granicą oraz ponad 700 artykułów i rozpraw naukowych, opublikowanych w czasopismach krajowych i zagranicznych. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania i systemów, a w szczególności układy wielowymiarowe, układy singularne i układy dodatnie. Jest doktorem honoris causa czterech polskich uczelni: Uniwersytetu Zielonogórskiego (2002), Politechniki Lubelskiej, Politechniki Szczecińskiej i Politechniki Warszawskiej (2004).

e-mail: T.Kaczorek@ee.pw.edu.pl

Streszczenie

Podano metodę wyznaczania macierzy przekształcającej sterowalną parę macierzy liniowych układów ciągłych i dyskretnych o zmiennych parametrach o jednym wejściu do zadanej postaci kanonicznej. Sformułowano warunki przy spełnieniu, których macierz $A(t)$ układu wyjściowego i przekształconego $\bar{A}(t)$ mają ten sam wielomian charakterystyczny, czyli $\det[I_s-A(t)] = \det[I_s-\bar{A}(t)]$. Podano dwie procedury wyznaczania tej macierzy, które zilustrowano przykładami.

Abstract

A method is proposed for determination of state transformation of a pair of matrices to a given canonical form for linear time-varying continuous-time and discrete-time single input systems. Conditions are established under which the given matrix $A(t)$ and the transformed matrix $\bar{A}(t)$ have the same characteristic polynomial, i.e. $\det[I_s-A(t)] = \det[I_s-\bar{A}(t)]$.
Two procedures for determination of the transformation matrix are given and illustrated by examples.

1. Wprowadzenie

W teorii sterowania często zachodzi potrzeba przekształcania liniowych układów ciągłych i dyskretnych do zadanych postaci kanonicznych. Typowym przykładem jest zagadnienie przesuwania wartości własnych macierzy (biegunów układów) do zadanych położeń w układach sterowalnych [1-5]. Wyznaczanie macierzy sprzężeń zwrotnych jest łatwiejsze i obliczeniowo prostsze, jeżeli para macierzy (A,B) ma postać kanoniczną np. sterowalną [2-5]. Podobny problem występuje przy syntezie obserwatorów stanu. Znane są w literaturze [1-5] metody wyznaczania macierzy przekształcających dowolną sterowalna parę macierzy do postaci kanonicznych dla układów liniowych o stałych parametrach. Metody te są zwykle oparte na wyznaczaniu macierzy sterowalności i obserwowalności. Analogiczne metody są również stosowane dla liniowych układów o parametrach zmiennych w czasie [1].

W pracy tej zostanie podana inna, nowa metoda, rachunkowo znacznie prostsza, wyznaczania macierzy przekształcającej sterowalna parę macierzy liniowych układów ciągłych i dyskretnych o jednym wejściu do zadanych postaci kanonicznych.

2. Przekształcenie liniowe zmiennych stanu

Niech $R^{m\times n}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach m×n i elementach z ciała liczb rzeczywistych oraz $R^m=R^{m\times 1}$.

Weźmy też pod uwagę liniowy układ ciągły o zmiennych parametrach opisany równaniami

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\quad\left(\dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\right)\tag{1a}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)\tag{1b}$$

przy czym $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$ i $y(t)\in R^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia (sterowań) i odpowiedzi a macierze $A(t)\in R^{n\times n}$, $B(t)\in R^{n\times m}$, $C(t)\in R^{p\times n}$, $D(t)\in R^{p\times m}$ mają elementy zależne od czasu t i są dowolnie wiele razy ciągle różniczkowalne. Niech macierz nieosobliwa $P(t)$ przekształcenia liniowego zmiennych stanu

$$x(t)=P(t)\bar{x}(t),\ \det P(t)\neq 0 \text{ dla wszystkich } t\geq 0\tag{2}$$

ma ciągłe pochodne dowolnego rzędu.

Różniczkując względem czasu zależność (2) i korzystając z równania (1a) otrzymamy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\dot{P}(t)\,\bar{x}(t)+P(t)\,\dot{\bar{x}}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)=\\&=A(t)\,P(t)\,\bar{x}(t)+B(t)\,u(t)\end{aligned}\tag{3}$$

Wyznaczając z równania (3) $\dot{\bar{x}}$ otrzymujemy

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{B}(t)u(t)\tag{4a}$$

przy czym

$$\bar{A}(t)=P^{-1}(t)\left[A(t)P(t)-\dot{P}(t)\right],\ \bar{B}(t)=P^{-1}(t)B(t)\tag{5}$$

Podstawiając zależność (2) do równania (1b) dostaniemy

$$y(t)=\bar{C}(t)\bar{x}(t)+\bar{D}(t)u(t)\tag{4b}$$

przy czym

$$\bar{C}(t)=C(t)P(t),\ \bar{D}(t)=D(t)\tag{6}$$

Jak wiadomo macierz sterowalności (osiągalności) układu (1) ma postać [1]

$$S(t)=\left[S_1(t)\ \ S_2(t)\ \ \dots\ \ S_n(t)\right]\tag{7a}$$

przy czym

$$S_1(t)=B(t),\ S_i(t)=\dot{S}_{i-1}(t)-A(t)S_{i-1}(t)\ \text{dla } i=2,\dots n\tag{7b}$$

Układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy [1]

$$\text{rząd}\, S(t)=n\ \text{ dla wszystkich } t\geq 0\tag{8}$$

Analogicznie definiujemy macierz sterowalności układu przekształconego (4)

$$\bar{S}(t)=\left[\bar{S}_1(t)\ \ \bar{S}_2(t)\ \ \dots\ \ \bar{S}_n(t)\right]\tag{9a}$$

przy czym

$$\bar{S}_1(t)=\bar{B}(t),\ \bar{S}_i(t)=\dot{\bar{S}}_{i-1}(t)-\bar{A}(t)\bar{S}_{i-1}(t)\ \text{dla } i=2,\dots n\tag{9b}$$

Korzystając z zależności (5) łatwo wykazać, że macierze sterowalności (7) i (9) są związane zależnością [1]

$$S(t)=P(t)\bar{S}(t)\tag{10}$$

Sterowalność jest, więc niezmiennicza względem przekształcenia liniowego zmiennych stanu (2).

Jeżeli rząd $S(t)$ = rząd $\bar{S}(t)=n$ to znając macierze sterowalności $S(t)$ i $\bar{S}(t)$ z zależności (10) możemy wyznaczyć macierz $P(t)$ [1]. W pracy tej zostanie przedstawiona inna nowa metoda wyznaczania macierzy $P(t)$ przekształcającej marę macierzy $(A(t), B(t))$ do znanej postaci kanonicznej.

Z pierwszej z zależności (5) wynika, że

$$\bar{A}(t)=P^{-1}(t)A(t)P(t)\tag{11}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P^{-1}(t)\dot{P}(t)=0\tag{12}$$

Z zależności (11) mamy

$$\det[Is-\bar{A}(t)]=\det[Is-P^{-1}(t)A(t)P(t)]=$$
$$=\det\{P^{-1}(t)[Is-A(t)]P(t)\}=$$
$$=\det P^{-1}(t)\det[Is-A(t)]\det P(t)=$$
$$=\det[Is-A(t)]$$

gdyż $\det P^{-1}(t) = [\det P(t)]^{-1}$.

Jeżeli jest spełniony warunek (12) to macierze $A(t)$ i $\bar{A}(t)$ mają więc ten sam wielomian charakterystyczny.

3. Istota proponowanej metody

Istotę tej nowej metody przedstawimy dla układu o jednym wejściu ($m=1$, $B(t)=b(t)\in R^n$).

Niech para macierzy ($\bar{A}(t)$, $\bar{b}(t)$) ma następującą postać kanoniczną

$$\bar{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t)\end{bmatrix},\ \bar{b}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \tag{13}$$

Korzystając z (9) łatwo sprawdzić, że para (13) jest sterowalna dla wszystkich wartości parametrów $a_k(t)$, $k=0,1,\dots,n-1$ oraz każdej chwili $t\geq 0$

Zakładamy, że dana para ($A(t)$,$b(t)$) jest również sterowalna dla wszystkich jej parametrów i każdej chwili $t\geq 0$.

Niech $P_i(t)$ będzie i-tą kolumną ($i=1,\dots,n$) poszukiwanej macierzy $P(t)$. Z zależności (5) i (13) mamy

$$b(t)=P(t)\bar{b}(t)=[P_1(t)\ \ P_2(t)\ \dots\ P_n(t)]\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}=P_n(t) \tag{14}$$

oraz

$$[P_1(t)\ \ P_2(t)\ \dots\ P_n(t)]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t)\end{bmatrix}= \tag{15}$$
$$=A(t)[P_1(t)\ \ P_2(t)\ \dots\ P_n(t)]-[\dot{P}_1(t)\ \ \dot{P}_2(t)\ \dots\ \dot{P}_n(t)]$$

Z zależności (14) mamy

$$P_n(t)=b(t) \tag{16}$$

Znając macierz $b(t)$ możemy więc wyznaczyć n-tą kolumnę macierzy $P(t)$. Mnożąc macierz $P(t)$ przez n-tą kolumnę macierzy $\bar{A}(t)$ z równości (15) otrzymamy

$$P_{n-1}(t)-a_{n-1}(t)P_n(t)=A(t)P_n(t)-\dot{P}_n(t)$$

czyli

$$P_{n-1}(t)=a_{n-1}(t)P_n(t)+A(t)P_n(t)-\dot{P}_n(t) \tag{17}$$

Aby wyznaczyć elementy $a_k(t)$, $k=0,1,\dots,n-1$ macierzy $\bar{A}(t)$ znając macierz $A(t)$ obliczmy wielomian charakterystyczny tej macierzy

$$\det[I_n s-A(t)]=s^n-a_{n-1}(t)s^{n-1}-\dots-a_1(t)s-a_0(t) \tag{18}$$

Znając współczynnik $a_{n-1}(t)$ oraz $P_n(t)=b(t)$ możemy z zależności (17) wyznaczyć kolumnę $P_{n-1}(t)$ macierzy $P(t)$

Aby wyznaczyć kolumnę $P_{n-2}(t)$ macierzy $P(t)$ mnożymy macierz $P(t)$ przez n-1-szą kolumnę macierzy $\bar{A}(t)$ z równości (15) otrzymamy

$$P_{n-2}(t)-a_{n-2}(t)P_n(t)=A(t)P_{n-1}(t)-\dot{P}_{n-1}(t)$$

czyli

$$P_{n-2}(t)=a_{n-2}(t)P_n(t)+A(t)P_{n-1}(t)-\dot{P}_{n-1}(t) \tag{19}$$

Kontynuując tę procedurę możemy wyznaczyć kolejne kolumny $P_{n-3}(t),\dots,P_1(t)$ poszukiwanej macierzy $P(t)$.

Aby otrzymać kolumnę $P_1(t)$ mnożymy macierz $P(t)$ przez drugą kolumnę macierzy $\bar{A}(t)$ i wtedy z równości (15) otrzymamy

$$P_1(t)-a_1(t)P_n(t)=A(t)P_2(t)-\dot{P}_2(t)$$

czyli

$$P_1(t)=a_1(t)P_n(t)+A(t)P_2(t)-\dot{P}_2(t) \tag{20}$$

Zależności (17), (19) i (20) możemy zapisać w postaci

$$P_n(t)=b(t),\ P_k(t)=a_k(t)P_n(t)+$$
$$+A(t)P_{k+1}(t)-\dot{P}_{k+1}(t), \tag{21}$$
$$\text{dla } k=n-1,\dots,1$$

Znając $A(t)$ i $b(t)$ możemy wyznaczyć macierz $P(t)$ korzystając z następującej procedury

Procedura 1.

Krok 1. Mając macierz $A(t)$ wyznaczamy współczynniki $a_k(t)$, $k=0,1,\dots,n-1$

Krok 2. Korzystając ze wzoru (21) dla $k=n-1,n-2,\dots,1$ wyznaczamy kolejno kolumny $P_n(t)$,$P_{n-1}(t)$,..,$P_1(t)$ macierzy $P(t)$

Przykład 1. Wyznaczyć macierz $P(t)$ przekształcającą parę macierzy

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & -e^{-t}\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{22}$$

do postaci kanonicznej (13).

Para (22) jest sterowalna, gdyż

$$\text{rząd}[S_1(t)\ \ S_2(t)]=\text{rząd}[b(t)\ \ \dot{b}(t)-A(t)b(t)]=$$
$$=\text{rząd}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=2$$

Korzystając z procedury 1 otrzymamy

Krok 1. Wielomian charakterystyczny (18) w tym przypadku ma postać

$$\det[Is-A(t)]=\begin{vmatrix}s & e^{-t}\\ -1 & s-2\end{vmatrix}=s^2-2s+e^{-t}, \tag{23}$$
$$\left(a_0(t)=e^{-t},\ a_1(t)=-2\right)$$

Krok 2. Korzystając ze wzoru (21) otrzymamy

$$P_2(t)=b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$
$$P_1(t)=a_1(t)P_2(t)+A(t)P_2(t)-\dot{P}_2(t)=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

oraz

$$P(t)=[P_1(t)\ \ P_2(t)]=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{24}$$

W tym przypadku warunek (12) jest spełniony gdyż $\dot{P}(t)=0$.

Zgodnie z zależnościami (5) macierze $\bar{A}(t)$ i $\bar{b}(t)$ mają postać

$$\bar{A}(t)=P^{-1}(t)A(t)P(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -e^{-t}\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -e^{-t} & 2\end{bmatrix} \tag{25}$$
$$\bar{b}(t)=P^{-1}(t)b(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

a więc postać kanoniczna (13).

Niech tym razem para macierzy $\bar{A}(t)$ i $\bar{b}(t)$ ma następującą postać kanoniczną

$$\bar{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0(t)\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1(t)\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}(t)\end{bmatrix},\quad \bar{b}(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} \tag{26}$$

Korzystając z (9) łatwo sprawdzić, że para (26) jest sterowalna dla wszystkich wartości parametrów $a_k(t)$, $k=0,1,\dots,n-1$ oraz każdej chwili $t\geq 0$

Zakładamy, że dana para $(A(t),b(t))$ jest również sterowalna dla wszystkich jej parametrów i każdej chwili $t\geq 0$.

Niech P_i będzie i-tą kolumną $(i=1,\dots,n)$ poszukiwanej macierzy $P(t)$

Z zależności (5) i (26) mamy

$$b(t)=P(t)\bar{b}(t)=\begin{bmatrix}P_1(t) & P_2(t) & \dots & P_n(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=P_1(t) \tag{27}$$

oraz

$$\begin{bmatrix}P_1(t) & P_2(t) & \dots & P_n(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0(t)\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1(t)\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}(t)\end{bmatrix}= \tag{28}$$
$$=A(t)\begin{bmatrix}P_1(t) & P_2(t) & \dots & P_n(t)\end{bmatrix}$$

Z zależności (27) mamy

$$P_1(t)=b(t) \tag{29}$$

Znając macierz $b(t)$ możemy więc wyznaczyć pierwszą kolumnę macierzy $P(t)$. Mnożąc macierz $P(t)$ przez pierwszą kolumnę macierzy $\bar{A}(t)$ z równości (28) otrzymamy

$$P_2(t)=A(t)P_1(t) \tag{30}$$

a mnożąc $P(t)$ przez drugą kolumnę macierzy $\bar{A}(t)$

$$P_3(t)=A(t)P_2(t) \tag{31}$$

Kontynuując tę procedurę można wyznaczyć kolejne kolumny $P_4(t),\dots,P_n(t)$ poszukiwanej macierzy $P(t)$

Zależności (29)-(31) możemy zapisać w postaci

$$P_1(t)=b(t),\ P_k(t)=A(t)P_{k-1}(t),\quad \text{dla } k=2,\dots,n \tag{32}$$

Znając $A(t)$ i $b(t)$ możemy wyznaczyć macierz $P(t)$ korzystając z następującej procedury.

Procedura 2.

Krok 1. Mając macierz $A(t)$ wyznaczamy współczynniki $a_k(t)$, $k=0,1,\dots,n-1$

Krok 2. Korzystając ze wzoru (32) dla $k=2,\dots n$ wyznaczamy kolejno kolumny $P_2(t),P_3(t),\dots,P_n(t)$ macierzy $P(t)$

Przykład 2. Wyznaczyć macierz $P(t)$ przekształcającą parę macierzy

$$A(t)=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ te^{-t} & 3\end{bmatrix},\quad b(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{33}$$

do postaci kanonicznej (26).

Para (33) jest sterowalna, gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}S_1(t) & S_2(t)\end{bmatrix}=\text{rząd}\begin{bmatrix}b(t) & \dot{b}(t)-A(t)b(t)\end{bmatrix}=$$
$$=\text{rząd}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=2$$

Korzystając z procedury 2 otrzymamy

Krok 1. Wielomian charakterystyczny (18) w tym przypadku ma postać

$$\det\left[Is-A(t)\right]=\begin{vmatrix}s+1 & 2\\ -te^{-t} & s-3\end{vmatrix}=s^2-2s-3+2e^{-t}$$
$$\left(a_0(t)=2e^{-t}-3,\ a_1(t)=-2\right) \tag{34}$$

Krok 2. Korzystając ze wzoru (32) otrzymamy

$$P_1(t)=b(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ P_2(t)=A(t)b(t)=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

oraz

$$P(t)=\begin{bmatrix}P_1(t) & P_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \tag{35}$$

W tym przypadku warunek (12) jest spełniony, gdyż $\dot{P}(t)=0$. Zgodnie z zależnościami (5) macierze $\bar{A}(t)$ i $\bar{b}(t)$ mają postacie

$$\bar{A}(t)=P^{-1}(t)A(t)P(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ te^{-t} & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 3-2te^{-t}\\ 1 & -2\end{bmatrix} \tag{36}$$
$$\bar{b}(t)=P^{-1}(t)b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

a więc postać kanoniczna (26).

Niech

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{37}$$

Łatwo sprawdzić, że dla macierzy tej $P^{-1}=P$. Korzystając z macierzy permutacyjnej (37) oraz (13) i (26) możemy otrzymać następujące pary macierzy w postaci kanonicznej

$$P\bar{A}(t)P=P\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t)\end{bmatrix}P=$$
$$=\begin{bmatrix}-a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) & -a_0(t)\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{38}$$
$$P\bar{b}(t)=P\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix}$$

oraz odpowiednio

$$P\bar{A}(t)P=P\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0(t)\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1(t)\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}(t)\end{bmatrix}P=$$
$$=\begin{bmatrix}-a_{n-1}(t) & 1 & 0 & \dots & 0\\ -a_{n-2}(t) & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1(t) & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0(t) & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} \tag{39}$$
$$P\bar{b}(t)=P\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

Powyższą metodę wyznaczania macierzy $P(t)$ łatwo można uogólnić na pary macierzy (38) i (39).

4. Uogólnienie metody na układy dyskretne

Weźmy pod uwagę liniowy układ dyskretny o zmiennych parametrach opisany równaniami

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k = 0,1,... \tag{40a}$$

$$y_k = C_k x_k + D_k u_k \tag{40b}$$

przy czym $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$ i $y_k \in R^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszeń i odpowiedzi, a macierze $A_k \in R^{n\times n}$, $B_k \in R^{n\times m}$, $C_k \in R^{p\times n}$ i $D_k \in R^{p\times m}$ mają elementy rzeczywiste zależne od k.

Niech macierz P_k przekształcenia liniowego zmiennych stanu

$$x_k = P_k \bar{x}_k \tag{41}$$

będzie nieosobliwa dla wszystkich $k \geq 0$.

Korzystając z (41) i (40a) możemy napisać

$$x_{k+1} = P_{k+1}\bar{x}_{k+1} = A_k P_k \bar{x}_k + B_k u_k$$

oraz

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}_k \bar{x}_k + \bar{B}_k u_k \tag{42a}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \bar{A}_k &= P_{k+1}^{-1} A_k P_k, \\ \bar{B}_k &= P_{k+1}^{-1} B_k, k = 0,1,... \end{aligned} \tag{43}$$

Podstawiając (41) do (40b) otrzymamy

$$y_k = \bar{C}_k \bar{x}_k + \bar{D}_k u_k, \quad k = 0,1,... \tag{42b}$$

przy czym

$$\bar{C}_k = C_k P_k, \quad \bar{D}_k = D_k \tag{44}$$

Z pierwszej z zależności (43) wynika, że jeżeli $P_{k+1}=P_k$ dla $k=0,1,...$ to macierze $\bar{A}_k$ i A_k są podobne i mają te same wielomiany charakterystyczne tzn. $\det[Iz-A_k] = \det[Iz-\bar{A}_k]$. W tym przypadku podaną wyżej metodę można łatwo przenieść na układy dyskretne o zmiennych parametrach.

5. Uwagi końcowe

Dla układów o jednym wejściu (m=1) podano metodę wyznaczania macierzy $P(t)$ przekształcającej parę sterowalną $(A(t),b(t))$ do zadanej postaci kanonicznej $(\bar{A}(t),\bar{b}(t))$. Przekształcenie to nie zmienia wielomianu charakterystycznego układu ciągłego (dyskretnego), gdy jest spełniony warunek (12) ($P_{k+1}=P_k$ dla $k=0,1,..$). Przemienienie tej metody na dualną parę obserwowalna $(A(t),C(t))$ jest trywialnie i wynika z zasady dualizmu. Uogólnienie tej metody na przypadek układu o wielu wejściach ($m>1$) jest problemem otwartym i jest przedmiotem dalszych badań

6. Literatura

[1] T. Kaczorek, Teoria sterowania tom 1, PWN, Warszawa 1997

[2] T. Kaczorek, Teoria sterowania i systemów, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999

[3] T. Kaczorek, A. Dzieliński W. Dąbrowski, R. Łopatka, Podstawy teorii sterowania, WNT Warszawa 2004

[4] T. Kailath, Lineał Systems, Englewood Cliffs Prentice Hall, 180

[5] W. Kwiatkowski, Podstawy teorii sterowania, wybrane zagadnienia, WAT, Warszawa 2002.

Tytuł: Determination of state transformation matrices of linear time-varying systems

Artykuł recenzowany

przedruk: PAK 3/1999

O PAK-u inaczej

Z której półki

Teczka redakcyjna pełna. Prace autorów sypią się jak z rękawa , a fabryki niemal prześcigają się w nadsyłaniu materiałów reklamowych. To stan optymalny, godny pozazdroszczenia przez inne redakcje. Ba, ale tak nie jest.....

Z pocztą przychodzą dwie duże koperty. Na jednej stempel nadawcy: "Uniwersytet Stanisławowski", na drugiej: „Fabryka Urządzeń technicznych – Turbo" . Sprawa czysta! Redakcja bogaci się dwoma pozycjami: artykuł przyczynkowy np. „Stochastyczny rozkład atomów w próbce żeliwa steroidalnego" oraz reklama: np. .„Uniwersalna przekładnia bezstopniowa Torque – promocja na 1 półrocze 1999 "

Ciągłość wydawania czasopisma wymaga materialnych środków, za każdy przejaw działania redakcji trzeba płacić – robią to przede wszystkim autorzy reklam, którzy przekazując na redakcyjne konto niemałą sumkę, niosą na swoich barkach ciężar publikacji prac kolegów – teoretyków. I tu wkracza pan redaktor, podejmując decyzję o ewentualnych druku otrzymanych materiałów. Ukazanie się reklamy przedłuża żywot pisma i jednocześnie obwieszcza ogółowi możliwość zakupu interesującego urządzenia. Korzyść ogólna. Publikacja pewnych odkryć teoretycznych wzbogaca zasoby wiedzy w portfelu nauki, przyczyniając się jednocześnie do zwiększenia dorobku autora, a w przyszłości, być może do skonstruowania równie interesującego urządzenia stanowiącego również przedmiot reklamy, która z kolei również przedłuży pisma itd., itd.

I tu panie redaktorze, musi pan rozstrzygnąć co najpierw skierować do druku: czy obietnicę gotówki zaraz, czy przewidywanie pewnej informacji dla społeczeństwa potem. I musi Pan wziąć pod uwagę fakt, żeby nie zniechęcać autorów – naukowców długim oczekiwaniem na druk i żeby nie zmieścić redagowanego pisma na informator handlowy.

A na co komu ten właśnie tekścik? A po to, żeby myśli nieco odpoczęła od techniczno – naukowego farszu. NIC jest też rysunkiem, CISZA jest też słowem.

Z życzliwością kłania się

W.B.