

## Józef GIERGIEL<sup>1</sup>, Tomasz BURATOWSKI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>POLITECHNIKA RZESZOWSKA, WYDZIAŁ BUDOWY MASZYN, KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ I ROBOTYKI

<sup>2</sup>AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI, KATEDRA ROBOTYKI I DYNAMIKI MASZYN

# Modelowanie kinematyki i dynamiki w konstrukcjach mobilnych minirobotów kołowych.

Prof. hab. dr inż. Józef GIERGIEL

Jest pracownikiem w Katedrze Mechaniki Stosowanej i Robotyki Politechniki Rzeszowskiej, emerytowanym prof. Katedry Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Głównymi zainteresowaniami są szeroko rozumiana Mechanika Stosowana, Robotyka i Mechatronika.

[jgiergie@agh.edu.pl](mailto:jgiergie@agh.edu.pl)



Dr inż. Tomasz BURATOWSKI

Jest pracownikiem w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Jego zainteresowania skupiają się na mechatronice oraz wykorzystaniu sztucznej inteligencji w technice.

[tburatow@agh.edu.pl](mailto:tburatow@agh.edu.pl)



### Streszczenie

W artykule przedstawiono konstrukcję dwukołowego mobilnego minirobota uwzględniając kinematykę i dynamikę tego typu układów. Opisano konstrukcję robota. Przedstawiono formalizmy matematyczne najczęściej wykorzystywane do opisu kinematyki i dynamiki tych nieholonomicznych układów.

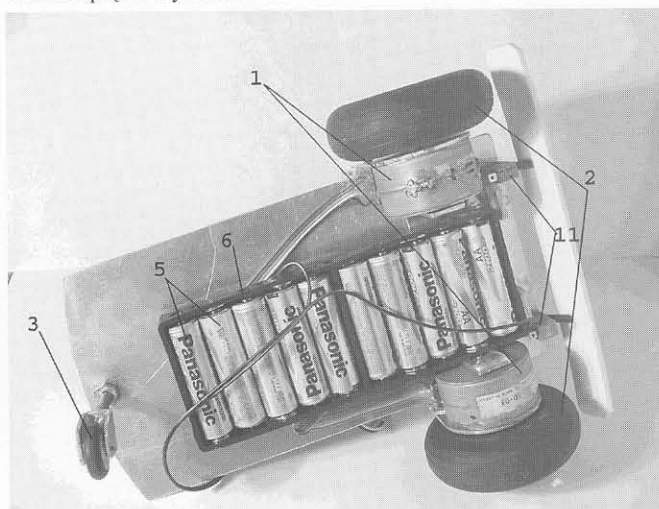
### Abstract

In this paper the problem concerning kinematics and dynamics of wheeled mobile robot is discussed. The motion of the analysed model can be described in xy plane. Taking account of equations of non-holonomic constraints, motion phenomenon is described using system of differential equations, based on Maggi equations.

## 1. Wstęp

Wykorzystując doświadczenia związane z modelowaniem kinematyki i dynamiki mobilnych robotów kołowych autorzy wraz z grupą studentów postanowili przygotować mobilnego minirobota.

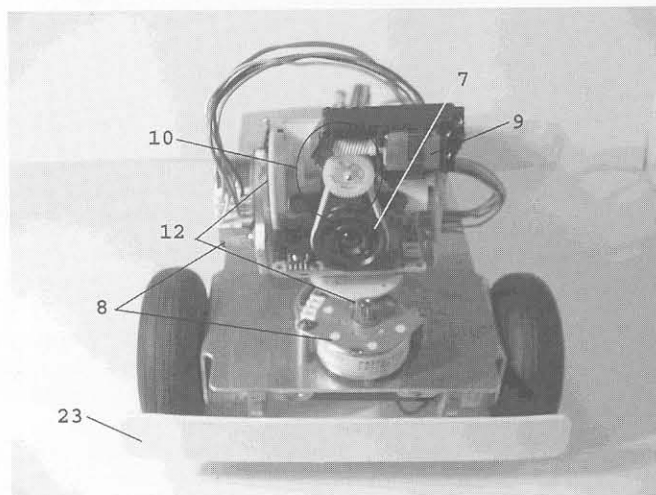
Zbudowany układ jest dwukołowym robotem mobilnym napędzanym dwoma silnikami krokowymi 1 (rys.1). Koła napędzane 2 są zamocowane bezpośrednio na wałkach silników krokowych 1, koło trzecie 3 jest podpierające i samonastawne. Ramą robota jest płytka aluminiowa 4. Silniki krokowe 1 oraz pozostałe urządzenia są bezpośrednio zamocowane na korpusie 4. Robot jest zasilany 10 akumulatorami 5 po 1,2V zamieszczonymi w koszyku 6 od spodu robota. Akumulatory są połączone szeregowo, dzięki temu otrzymane napięcie wynosi 12 V.



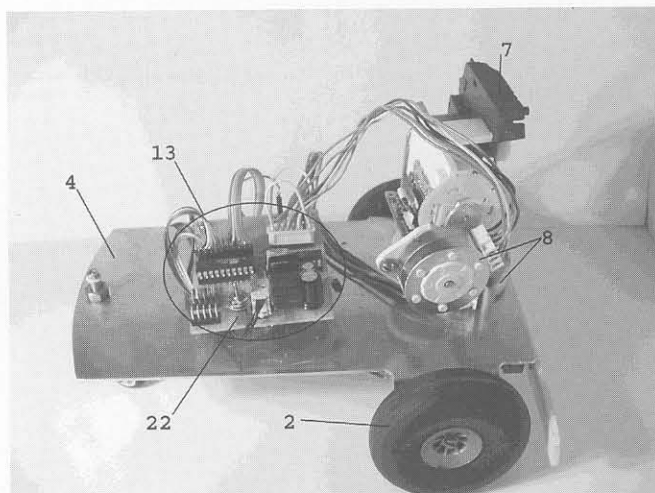
Rys.1 Widok robota z dołu

Do ramy 4 jest obrotowo zamocowana kamera 7 o dwóch stopniach swobody, z dodatkowym napędem ustawiającym ostrość kamery. Napęd kamery to dwa silniki krokowe 8 (rys.2 i rys.3) umożliwiające obrót kamery względem dwóch osi (pionowej i poziomej), oraz silnik DC 9 z przekładnią ślimakową 10 ustawia-

jący ostrość kamery. Moment obrotowy z silników krokowych 8 poruszających kamerą przenoszony jest za pomocą przekładni zębatej redukcyjnej 12, dzięki temu zwiększamy rozdzielczość pozycjonowania kamery 7. Na korpusie umieszczony jest układ sterowania robotem 13. Na przodzie robota są umieszczone dwa mikroстыki 11, do których jest zamocowany zderzak 24. Jeśli robot uderzy w przeszkodę mikroстыki podają stan niski na odpowiednie końcówki procesora.

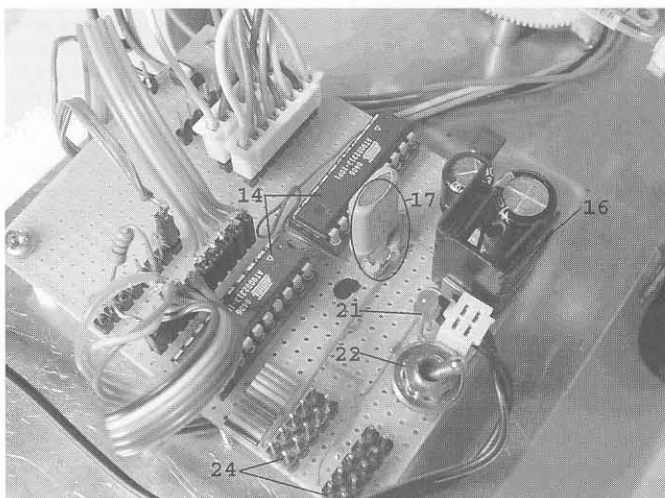


Rys.2 Widok robota z przodu



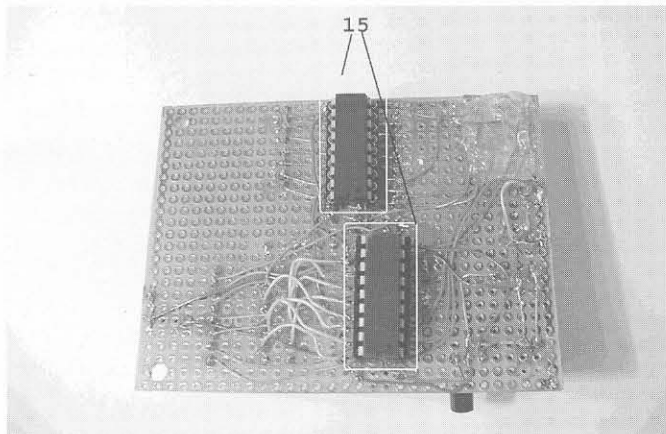
Rys.3 Widok robota z lewej strony

Zastosowane silniki 1 są dwufazowymi silnikami unipolarnymi. Aby uruchomić ten silnik należy podawać impulsy elektryczne na kolejne uzwojenia silnika.



Rys.4 Widok układu sterowania od góry

Można to bardzo łatwo zrobić za pomocą portu procesora. Do tego celu zastosowano procesor 14 (rys.ry.4) AVR AT90S2313. Kolejne podawanie impulsów jest wykonywane przez program zapisany w procesorze. Jednak sygnały z procesora są zbyt słabe, aby poruszyć silnik, należy je wzmocnić. Do wzmocnienia sygnału z procesora wykorzystano układ 15 ULN2803A (rys.5), który zawiera odpowiednie nożki do masy. Układ ten ma taką zaletę, że można go bezpośrednio podłączyć do portu, napięciem sterującym z portu 5V można sterować napięciem nawet do 60V i maksymalnym prądem do 500mA, dzięki temu na wyjściu otrzymano napięcie 12V.



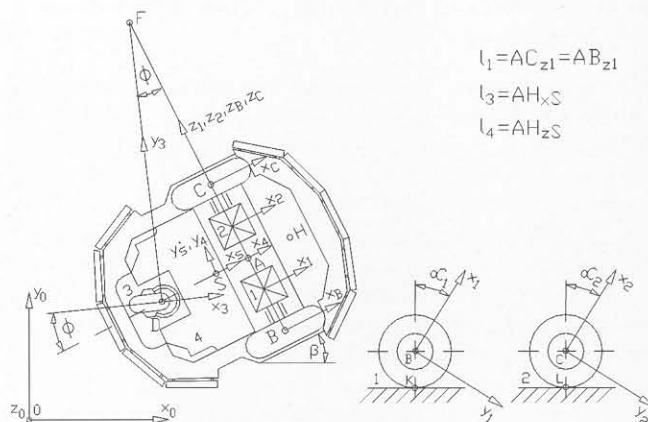
Rys.5 Widok układu sterowania od dołu

W procesie konstruowania mobilnego robota zamodelowano kinematykę i dynamikę tego układu.

## 2. Modelowanie kinematyki mobilnego robota 2-kołowego

Aby opisać ruch dwu-kołowego mobilnego robota, przyjęto model pokazany na rys.6. Podstawowymi elementami tego modelu są: rama 4 pojazdu, układ napędzający 1 i 2, koła tego układu obracają się wokół własnych osi, które nie zmieniają położenia względem ramy, oraz samonastawne koło podpierające 3.

Przy opisie zjawiska ruchu złożonego układu, jakim jest mobilny robot 2-kołowy korzystnym jest związanie z każdą ruchomą częścią oddzielnego układu współrzędnych [1,2,3]. Z częścią 4 związano układ  $x_4 y_4 z_4$  o początku w środku masy tej części. Układ  $x_0 y_0 z_0$  jest nieruchomym bazowym układem odniesienia. Z zespołem 1 i 2 związano odpowiednio układy  $x_1 y_1 z_1$ ,  $x_2 y_2 z_2$  o początku w charakterystycznych punktach B i C, które leżą na osiach obrotu kół napędzających i są środkami mas zespołów 1 i 2. Układ następny można przenieść do układu poprzedniego, wykonując trzy elementarne przesunięcia i trzy elementarne obroty, co związane jest z podaniem tzw. macierzy



Rys.6 Model robota przyjęty do obliczeń

przeniesienia lub transformacji. Do opisu układu zastosowano równania kinematyki dla charakterystycznych

punktów wykorzystując notację Denawita-Hartenberga. Po przeprowadzeniu stosownych obliczeń otrzymano równania kinematyki dla analizowanego robota zakładając ruch robota po łuku kołowym, w postaci [1,2,3]:

$$\dot{x}_A - l_3 \dot{\beta} \sin(\beta) - R\dot{\phi} \cos(\phi) = 0 \quad (1)$$

$$\dot{y}_A + l_3 \dot{\beta} \cos(\beta) - R\dot{\phi} \sin(\phi) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{x}_A - V_A \cos(\beta) = 0 \quad (3)$$

$$\dot{y}_A - V_A \sin(\beta) = 0 \quad (4)$$

$$\dot{x}_A - r_1 \dot{\alpha}_1 \cos(\beta) + l_1 \dot{\beta} \cos(\beta) = 0 \quad (5)$$

$$\dot{x}_A - r_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\beta) - l_1 \dot{\beta} \cos(\beta) = 0 \quad (6)$$

Powyższy układ sześciu równań umożliwia wyznaczenie wszystkich podstawowych parametrów ruchu jeżeli założono prędkość punktu A czyli  $V_A$ , oraz promień  $R$  trajektorii kołowej i promienie kół jezdnych. W układzie tym równania (1), (2) wynikają z rzutów wektora prędkości punktu H na osie  $x$  i  $y$  zerowego układu odniesienia. Równania (3), (4) wynikają z rozkładu prędkości punktu A. Ostatnie dwa równania (5), (6) określają rzuty wektorów prędkości punktów styczności odpowiednich kół z jezdnią na oś  $x$ .

Powyższe równania są obowiązujące dla ruchu robota po trajektorii kołowej, natomiast uwzględniając wcześniejsze założenia  $\beta=0$ ,  $\phi=0$ ,  $R=0$  otrzymano równania obowiązujące dla ruchu po torze prostym:

$$\dot{x}_A - V_A = 0 \quad (7)$$

$$\dot{x}_A - r_1 \dot{\alpha}_1 = 0 \quad (8)$$

$$\dot{x}_A - r_2 \dot{\alpha}_2 = 0 \quad (9)$$

Przy projektowaniu trajektorii o złożonym kształcie, występuje konieczność analizy zjawiska ruchu w pewnych przedziałach założonej trajektorii, praktycznie przedziały te to odcinki proste i łuki kołowe. Wówczas porównanie odpowiednich wartości parametrów kinematyki na początku i końcu danego przedziału umożliwią analizę interesującego nas ruchu. Należy podkreślić, że ze względu na występowanie w analizowanych równaniach funkcji trygonometrycznych, spotykamy się z nieciągłością rozwiązania, czyli punktami osobliwymi. Opisywanie takich rozwiązań wymaga stosowania odpowiednio rozbudowanych procedur obliczeniowych. Analiza kinematyki wszystkich innych podobnych układów może być przeprowadzona wykorzystując przedstawioną metodykę postępowania.

Ze względu na nieliniowość równań różniczkowych opisujących ruch mobilnych robotów kołowych, koniecznym jest symulacja komputerowa tych równań. Do obliczeń można wykorzystywać różne programy, jednym z nich jest program Maple™, który umożliwia przeprowadzenie obliczeń symbolicznych i symulację komputerową.

### 3. Modelowanie dynamiki mobilnego robota 2-kołowego

Do opisu dynamiki tego typu układów można stosować różne formalizmy matematyczne. Najczęściej do opisu dynamiki tych nieholonomicznych układów stosuje się równia Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami. Jednak równania te są trudne do analizy i konieczne jest odsprężanie momentów napędowych od mnożników Lagrange'a reprezentujących siły tarcia. Innym sposobem opisu dynamiki jest wykorzystanie równań Maggiego. W tym formalizmie nie trzeba wykonywać żadnych operacji związanych z odsprężaniem mnożników, gdyż otrzymuje się równania dynamiczne ruchu w ilości równej liczbie stopni swobody układu.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń symbolicznych otrzymano równania dynamiki dla przyjętego modelu. W równaniach tych nie uwzględniono masy samonastawnego koła podpierającego 3 [4,5,6,7], gdyż jego wpływ na dynamikę jest niewielki:

$$\begin{aligned} a_2 \ddot{\alpha}_2 + a_1 \ddot{\alpha}_1 + a_3 \dot{\alpha}_1^2 - a_3 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 &= M_1 - a_4 \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}_1) \\ a_2 \ddot{\alpha}_1 + a_1 \ddot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_1^2 - a_3 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 &= M_2 - a_5 \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}_2) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \frac{r^2 m_4 l_1^2 + r^2 m_4 l_2^2 + r^2 I_{z_4} + 2 r^2 I_{x_1} + 4 r^2 m_1 l_1^2 + 4 I_{z_1} l_1^2}{l_1^2} \\ a_2 &= \frac{1}{4} \frac{-r^2 m_4 l_2^2 + r^2 m_4 l_1^2 - r^2 I_{z_4} - 2 r^2 I_{x_1}}{l_1^2} \\ a_3 &= \frac{1}{4} \frac{r^3 m_4 l_2}{l_1^2} \quad a_4 = N_1 f_1 \quad a_5 = N_2 f_2 \end{aligned} \quad (11)$$

natomiast:

$m_2 = m_1$ ,  $m_4$  - masy poszczególnych elementów układu  
 $I_{x_2} = I_{x_1}$ ,  $I_{z_2} = I_{z_1}$ ,  $I_{z_4}$  - momenty bezwładności względem poszczególnych osi

$M_1, M_2$  - momenty napędowe

$N_1, N_2$  - siły nacisku odpowiednich kół

$f_1, f_2$  - współczynniki tarcia toczenia odpowiednich kół

$\alpha_1, \alpha_2$  - kąty obrotu kół 1 i 2

Przyjmując zmienne stanu następująco:

$\alpha_1 = x_1, \dot{\alpha}_1 = \dot{x}_1 = x_2, \alpha_2 = x_3, \dot{\alpha}_2 = \dot{x}_3 = x_4$

dynamiczne równania ruchu (10) zapisano w postaci:

$$\dot{x} = Ax + B[f(x, a) + G(x, a)u] \quad (12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ G(x, a) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2} & -\frac{a_2}{a_1^2 - a_2^2} \\ -\frac{a_2}{a_1^2 - a_2^2} & \frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2} \end{bmatrix} \\ f(x, a) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_2 a_4 \operatorname{sgn}(x_4) + a_2 a_3 x_2^2 - a_2 a_3 x_2 x_4 + a_1 a_3 x_2 x_4 - a_1 a_3 x_4^2 - a_1 a_4 \operatorname{sgn}(x_2)}{a_1^2 - a_2^2} \\ \frac{-a_1 a_2 \operatorname{sgn}(x_4) - a_1 a_3 x_2^2 + a_1 a_3 x_2 x_4 - a_2 a_3 x_2 x_4 + a_2 a_3 x_4^2 - a_2 a_4 \operatorname{sgn}(x_2)}{a_1^2 - a_2^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Zapis dynamicznych równań ruchu dla 2-kołowego mobilnego robota w postaci (13) umożliwia przeprowadzenie identyfikacji modelu matematycznego robota.

Rozwiązując przykładowo zadanie odwrotne dynamiki można wyznaczyć momenty napędowe kół robota, który porusza się z prędkością  $v_A$ . Wyznaczenie dynamicznych równań ruchu mobilnego robota dwukołowego jest niezwykle istotne ze względu na sterowanie tym układem. Jednak wyznaczone równania ruchu należy poddać identyfikacji ze względu na parametry występujące w tych równaniach.

### 4. Identyfikacja dynamicznych równań ruchu mobilnego robota 2-kołowego

Ponieważ zależność  $f(x, a)$  w równaniu (12) nie ma formy liniowej ze względu na parametry  $a$ , w zależnościach tych występują niedokładności modelowania, wektor stanu i momenty napędzające są dostępne pomiarowo. Układ identyfikacji w strukturze równoległej przyjęto w postaci [4,7,8]:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[\hat{f}(\hat{x}, \hat{a}) + G(a)u] + K\tilde{x} \quad (14)$$

gdzie wektor  $\hat{x}$  jest estymatą wektora stanu  $x$ ,  $\hat{f}(\hat{x}, \hat{a})$  to estymata nieliniowych funkcji występujących w równaniach (12). Przyjmując błąd estymacji wektora stanu w postaci  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  oraz odejmując równanie (14) od równania (12) otrzymano opis układu identyfikacji w przestrzeni błędów.

$$\dot{\tilde{x}} = A_H \tilde{x} + B[\tilde{f}(x, \hat{x}, a, \hat{a}) + G(a)u] \quad (15)$$

gdzie:  $A_H = A - K$ , a macierz  $K$  jest tak dobrana aby równanie charakterystyczne macierzy  $A_H$  było ściśle stabilne.

$$\tilde{f}(x, \hat{x}, a, \hat{a}) = f(x, a) - \hat{f}(\hat{x}, \hat{a}) \quad (16)$$

Układy identyfikacji mogą mieć różną formę. Dodając i odejmując od równania (12) wyrażenie  $A_m x$ , gdzie  $A_m$  jest stabilną macierzą projektową otrzymano:

$$\dot{x} = A_m x + (A - A_m)x + B[f(x, a) + G(x, a)u] \quad (17)$$

Powyższe równanie (17) definiuje strukturę szeregowo-równoległą układu identyfikacji

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + (A - A_m)x + B[\hat{f}(\hat{x}, \hat{a}) + G(a)u] \quad (18)$$

gdzie analogicznie jak w strukturze równoległej wektor  $\hat{x}$  jest estymatą wektora stanu  $x$ , a błąd estymacji tego wektora przyjęto również w postaci  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , w wyniku odejmowania równania (9) od równania (8) przedstawiono opis układu identyfikacji w przestrzeni błędów.

$$\dot{\tilde{x}} = A_m \tilde{x} + B[\hat{f}(\hat{x}, \hat{a}) + G(a)u] \quad (19)$$

W procesie identyfikacji mając informację o rzeczywistym modelu można oszacować parametry dynamicznych równań ruchu, które można wykorzystać w sterowaniu tymi układami.

### 5 Podsumowanie

Analiza kinematyki i dynamiki tych mechatronicznych układów jakimi są mobilne roboty kołowe pozwala na precyzyjne przygotowanie konstrukcji a następnie posiadając dokładny model matematyczny takiego robota można wykorzystać różnego rodzaju algorytmy do ich sterowania.

### Literatura

- [1] ŻYLSKI W.: Kinematyka i dynamika mobilnych robotów kołowych, Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 1996.
- [2] GIERGIEL J., ŻYLSKI W.: Kinematyka mobilnych robotów kołowych, Zeszyty Naukowe AGH, Mechanika, Tom 15, Zeszyt 3/1996.
- [3] BURATOWSKI T.: Modelowanie kinematyki mobilnych robotów kołowych przy zastosowaniu procesora symbolicznego MapleTM, Praca magisterska, Kraków, 1999
- [4] GIERGIEL J., HENDZEL Z., ŻYLSKI W.: Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych, PWN, Warszawa, 2002.
- [5] RÓD J., UHL T., CHUŹDIKIEWICZ A.: Obliczenia symboliczne w badaniach dynamiki układów mechanicznych, Materiały I Krajowej Konferencji "Metody i systemy komputerowe w badaniach naukowych i projektowaniu inżynierskim", Kraków, 1997.
- [6] ŻYLSKI W., BURATOWSKI T.: Przekształcenia symboliczne w modelowaniu dynamiki mobilnych robotów kołowych, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Zeszyt 15, 2001.
- [7] GIERGIEL J., HENDZEL Z., ŻYLSKI W.: Zagadnienia dynamiki mobilnych robotów kołowych, Przegląd Mechaniczny, Zeszyt 13, 1999.
- [8] BURATOWSKI T.: Modelowanie i identyfikacja mobilnych robotów kołowych, Praca doktorska, Kraków, 2003.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego, nr 5 T07C 0007 22 finansowanego przez KBN.

**Title:** Kinematics And Dynamics Modelling In Wheeled Mobile Minirobot Constructions

Artykuł recenzowany