

## Lucjan MIĘKINA, Andrzej KLEPKA

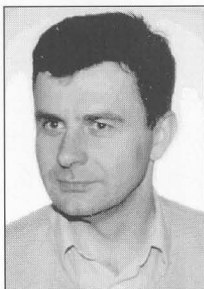
AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI, KATEDRA ROBOTYKI I DYNAMIKI MASZYN

# Estymacja widma z wykorzystaniem transformaty falkowej dla celów diagnostyki.

Dr inż. Lucjan MIĘKINA

Jest adiunktem w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH Jego zainteresowania dotyczą cyfrowych pomiarów i analizy sygnałów, identyfikacji układów dynamicznych, obiektowo-zorientowanej inżynierii oprogramowania dla systemów akwizycji i analizy sygnałów w diagnostyce przemysłowej i w innych zastosowaniach. Jest autorem prac nad wykorzystaniem powyższych technik w systemach monitorujących pracujących w czasie rzeczywistym.

miekina@agh.edu.pl



Mgr inż. Andrzej KLEPKA

Mgr inż. Andrzej Klepka jest doktorantem w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn, Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. W swoich pracach zajmuje się zagadnieniami analizy modalnej i diagnostyki, a w szczególności nowymi technikami analizy sygnałów.

andrzej.klepka@agh.edu.pl



### Streszczenie

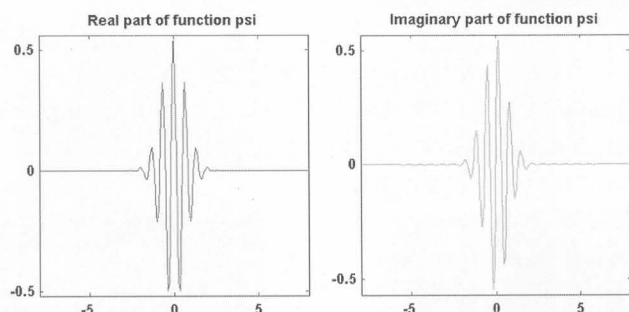
W artykule przedstawiono koncepcję estymacji widm sygnałów o wysokim poziomie zakłóceń i szumów generowanych przez procesy niestacjonarne, z wykorzystaniem transformaty falkowej z falką Morleta. Przedstawiono wyniki uzyskane dla danych symulowanych i rzeczywistych przebiegów sygnałów akustycznych, charakteryzujących się złożonym widmem.

### Abstract

In this paper the problem concerning estimation of a spectrum of signals generated by non-stationary processes, with high level of extraneous noise is presented. The continuous wavelet transform has been used to eliminate the noise. The results of analysis of data collected from a simulated process as well as real signals, having rich spectrum, were presented and discussed

## 1. Wstęp

Transformata falkowa jest metodą dekompozycji sygnału. Transformata ta obejmuje jednocześnie zarówno dziedzinę czasu jak i dziedzinę częstotliwości. Nośnikami transformaty falkowej są funkcje elementarne zwane falkami. Falki są to przebiegi oscylacyjne o skończonym czasie trwania i zróżnicowanym widmie. Przykładową funkcję falkową przedstawiono na rysunku 1.



Rys.1 Przykładowa falka Morleta

Matematycznie transformate sygnału  $x(t)$  możemy zapisać jako:

$$(W_g x)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

gdzie  $b$  jest translacją (przesunięciem) oznaczającym rejon,  $a$  jest dylatacją (rozszerzeniem) lub parametrem skali,  $g(t)$  jest podstawową funkcją falkową, a  $g^*(\cdot)$  jest funkcją zespoloną, sprzężoną do  $g(\cdot)$ . Każda wartość  $(W_g x)(a, b)$  jest znormalizowana przez współczynnik  $1/\sqrt{a}$ . Ta normalizacja zapewnia warunek, że wewnętrzna energia reprezentowana przez każdą falkę  $g_{a,b}(t)$  jest niezależna od parametru  $a$ . Jak wynika ze wzoru (1) transformata falkowa może być traktowana jako transformacja liniowa dekomponująca dany sygnał  $x(t)$  w elementarne funkcje  $g_{a,b}(t)$ , które możemy uzyskać z analizowanej falki  $g(t)$  przez dylatację i translację. Za dekompozycję czasową odpowiedzialna jest translacja  $b$ , a skala dekompozycji (segmenta-

cja częstotliwościowa), uzyskiwana jest przez dylatację  $a$ . To przekształcenie ma znaczną przewagę nad innymi transformacjami stosowanymi w technice. Np. transformata Fouriera nie daje w przeciwieństwie do transformaty falkowej, żadnych lokalnych informacji, ze względu na nieskończony charakter funkcji trygonometrycznych używanych w tej analizie. Ta własność transformacji falkowej pozwala na analizowanie i diagnozowanie układów o parametrach zmiennych w czasie, co często ma miejsce w warunkach rzeczywistych. Jedną z funkcji, często używanych do przekształceń falkowych jest falka Morleta, opisana wzorem:

$$g(t) = e^{j2\pi f_0 |t|} e^{-\frac{|t|^2}{2}} \quad (2)$$

Szczegółowe formalizmy matematyczne transformaty falkowej omówiono szerzej w [1,2,13].

Coraz częściej w praktycznych zastosowaniach diagnostyki wykorzystuje się modele konstrukcji. W tym celu konieczna jest identyfikacja parametrów modelu, co niejednokrotnie jest bardzo trudne. Istnieje w literaturze wiele metod pozwalających na wyznaczenie parametrów mechanicznych [7,9,10,12]. Istnieją również silne ograniczenia stosowalności tych metod. Większość nich wymaga by proces był ustalony, czyli by parametry układu nie zmieniały się w czasie. Niezapewnienie tego założenia może prowadzić do błędnych wyników analizy [12].

W pracy przedstawiono możliwość zastosowania analizy czasowo - częstotliwościowej do wyznaczania charakterystyk widmowych układu w stanie niestacjonarnym, z jednoczesną filtracją, pozwalającą na pozbycie się z sygnału zakłóceń powstałych w trakcie pomiaru.

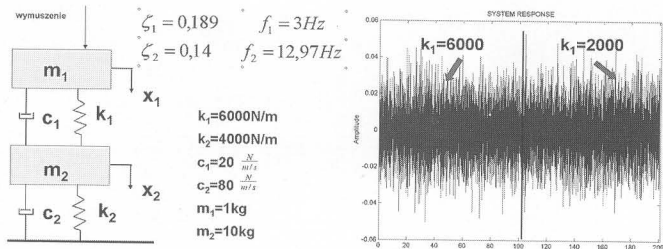
## 2. Wytyczne doboru parametrów falki.

Aby odpowiednio zinterpretować wyniki analizy przeprowadzonej przy użyciu transformaty falkowej, konieczny jest odpowiedni dobór parametrów falki bazowej. Warto zauważyć, że falka podstawowa posiada większość energii w pewnym paśmie, co oznacza, że transformata Fouriera poza tym przedziałem jest pomijalna. Korzystając z definicji częstotliwości środkowej falki podstawowej oraz szerokości jej pasma, [2] można stwierdzić, że transformata falkowa przy małych wartościach parametru  $a$  (skali) wyodrębnia składowe wysokoczęstotliwościowe. Zwiększenie parametru skali pozwala na analizowanie niższych częstotliwości, przy czym, dla rosnącej skali zawęża się pasmo falki powodując zwiększenie rozdzielczości w dziedzinie częstotliwości. Aby wyniki analizy falkowej dawały dobre rezultaty, sygnał musi być próbkowany z częstotliwością, dla której pasma falek dla małych wartości  $a$  są poza istotnym pasmem analizowanego sygnału [2]. Konieczna jest tutaj wiedza a priori na temat pasma analizowanego sygnału.

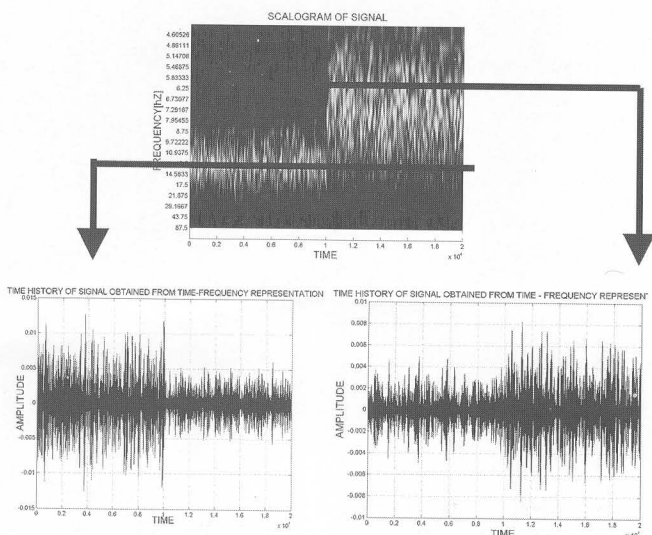
### 3. Zastosowanie transformaty falkowej do analizy układów niestacjonarnych.

Za pomocą transformaty falkowej można analizować układu w stanach niestacjonarnych [4,5,6]. Możliwość taką daje własność skończonego nośnika transformaty falkowej (falki). Własność tę wykorzystano do analizy następującego układu.

W celu weryfikacji metody założono układ jak na rys. 2. Dodatkowo w trakcie trwania symulacji zmieniono parametr sztywności w celu zasymulowania uszkodzenia (np. pęknięcia sprężyny). Układ wymuszono losowo.



Rys.2. Układ symulacyjny i jego odpowiedź.



Rys.3 Rekonstrukcja sygnału z dziedziny czasowo - częstotliwościowej.

Z rysunków pokazanych powyżej wynika, że część sygnału dobrze skorelowana z falką ma wyższą amplitudę. Częstotliwość zawarta w sygnale może być odczytana za pomocą parametru skali a:

$$a_f = f_0 \left( \frac{f_s}{f_w} \right) \left( \frac{1}{f_x} \right) \quad (3)$$

gdzie  $f_s$  to częstotliwość próbkowania sygnału,  $f_w$  częstotliwość próbkowania falki.,  $f_0$  - częstotliwość centralna falki.

### 4. Estymacja widma wykorzystaniem transformaty falkowej.

Wprowadźmy pojęcia grzbietu i szkieletu transformaty falkowej.

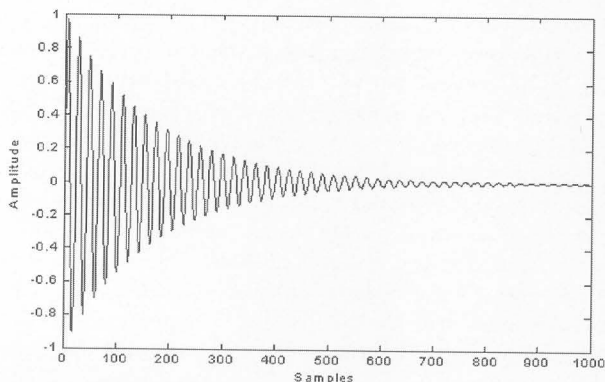
Definicja 1: Grzbietem transformaty falkowej  $(W_g x)(a, b)$  sygnału  $x(t)$  nazywamy zbiór punktów  $(a, b)$  w dziedzinie transformaty falkowej, gdzie faza  $x(t)g_{(a,b)}(t)$  jest stacjonarna, czyli spełniony jest warunek[8,11]:

$$t(a, b) = b \quad (4)$$

Definicja 2: Szkieletem transformaty falkowej  $(W_g x)(a, b)$  sygnału  $x(t)$  nazywamy zbiór współczynników transformaty falkowej wyliczonych z grzbietu  $(W_g x)(a_f(b), b)$ , gdzie  $a_f$  jest parametrem skali grzbietu[8,11].

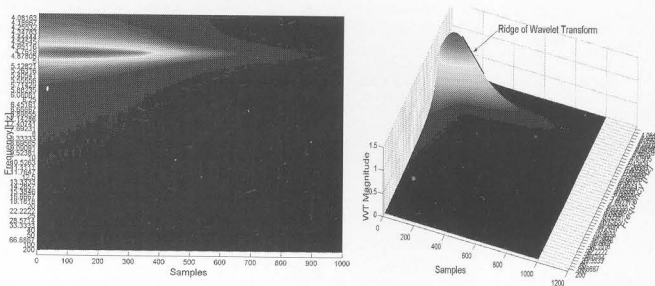
Założmy sygnał odpowiedzi wyrażony jako:

$$x(t) = e^{-0,6t} \sin(30t) \quad (5)$$



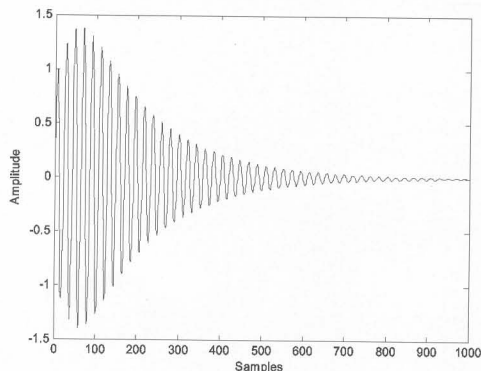
Rys.4 Analizowany sygnał.

W wyniku transformaty falkowej analizowanego sygnału możemy otrzymać tzw. skalogram



Rys.5 Skalogram analizowanego sygnału.

Dla danego parametru a możemy uzyskać szkielet transformaty falkowej zgodnie z definicją 2:



Rys. 6 Szkielet Transformaty falkowej dla a=21.

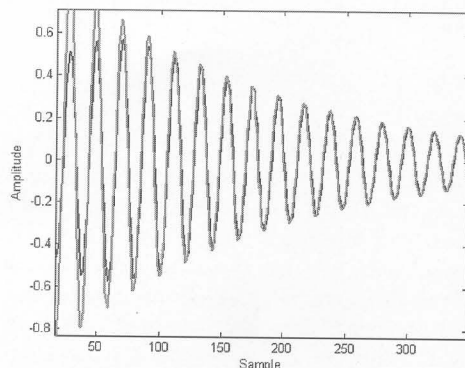
W celu rekonstrukcji sygnału stosujemy przekształcenia odwrotne transformaty falkowej wyrażone jako[11]:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (W_g x)(a, b) g_{(a,b)}(t) \frac{dad b}{a} \quad (6)$$

gdzie:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{\omega} d\omega \quad (7)$$

Z równań (6,7) wynika, że równanie szkieletu zależy wyłącznie od grzbietu i parametrów wybranej falki.

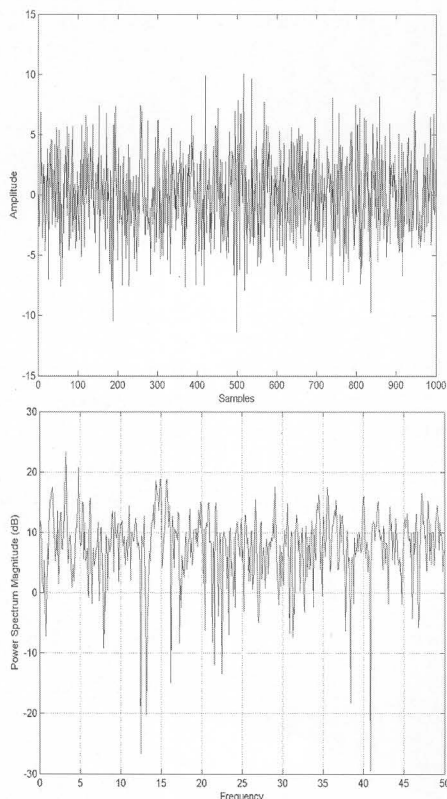


Rys. 7 Porównanie sygnału oryginalnego i sygnału przeskalowanego uzyskanego ze szkieletu transformaty falkowej.

Z powodu tych własności postanowiono opracować algorytm analizy widmowej sygnału z wykorzystaniem transformaty falkowej. Z przeprowadzonych wcześniej symulacji wynika że transformata falkowa rozkłada sygnał na pojedyncze sygnały o jednej częstotliwości. Poszczególne sygnały składowe można odzyskać ze współczynników transformaty falkowej stosując podane wcześniej procedury. Jeżeli w sygnale wystąpi szum można się spodziewać, że nie będzie on dobrze skorelowany tylko z jedną falką o danej częstotliwości. Odpowiedni wybór grzbietów transformaty falkowej a następnie skalowanie współczynników może prowadzić do pozbycia się większości szumu z badanego sygnału. Schemat zaproponowanej metody przedstawiono poniżej.



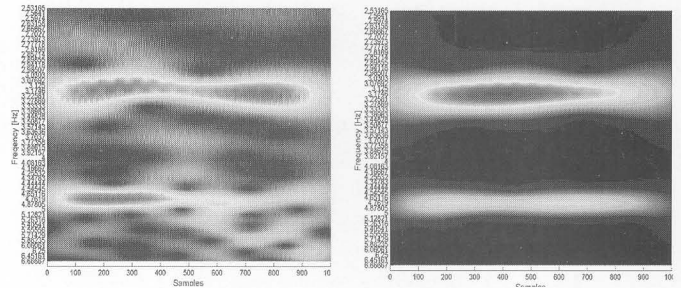
Rys. 8 Schemat blokowy zaproponowanej metody.



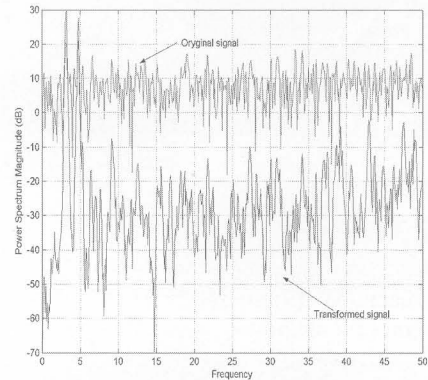
Rys. 9 Analizowany sygnał i jego gęstość mocy

Za pomocą transformaty falkowej możemy określić składowe występujące w analizowanym sygnale. Już sam skalogram oryginalnego sygnału daje informacje o częstotliwościach sygnału. Dodatkowa obróbka polegająca na wyszukiwaniu składowych najlepiej skorelowanych z daną falką, a jednocześnie niosących dużą energię pozwala na pozbycie się tła.

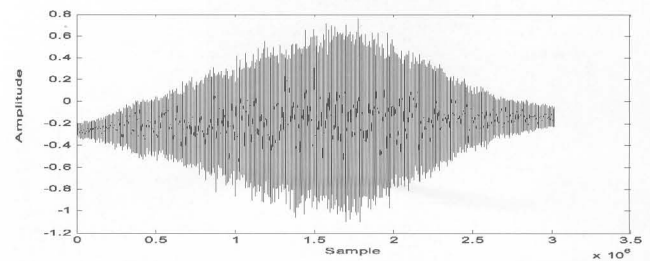
Do weryfikacji metody z wykorzystaniem danych rzeczywistych, przyjęto sygnał akustyczny rozbiegu i wybiegu komutatorowego silnika elektrycznego.



Rys.10 Porównanie skalogramów sygnału oryginalnego i po transformacji.

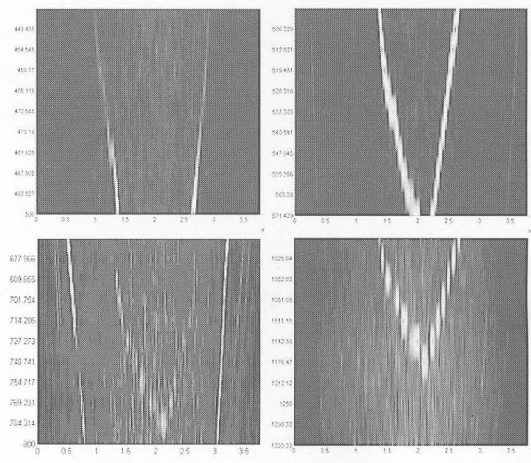


Rys.11 Porównanie gęstości widmowych mocy sygnału przed i po transformacji falkowej.



Rys.12 Analizowany sygnał

Zmienność w czasie niektórych częstotliwości pokazano na poniższych skalogramach:



Rys.13 Skalogramy analizowanego sygnału.

Następnie dokonano detekcji grzbietów oraz skalowania szkieletów transformaty falkowej dla danego parametru skali. Wybór grzbietu dokonywany był na podstawie funkcji entropii. Entropia Shannona sygnału (wektora) określona jest jako[2]:

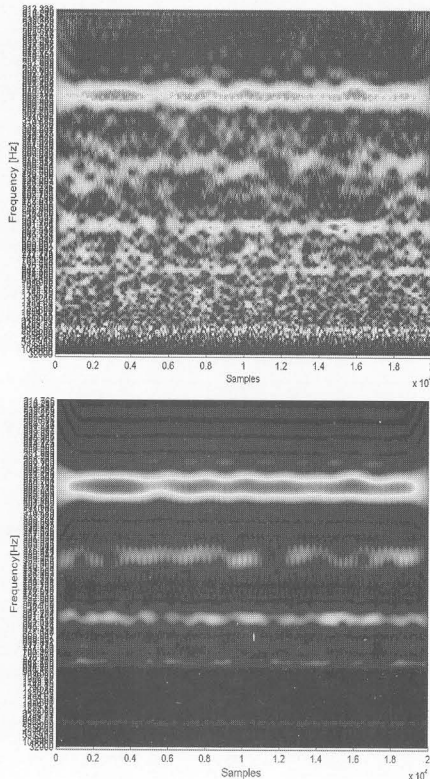
$$E(x) = -\sum_i x_i^2 \log(x_i^2) \quad (8)$$

przy założeniu, że  $\log(0) = 0$ .

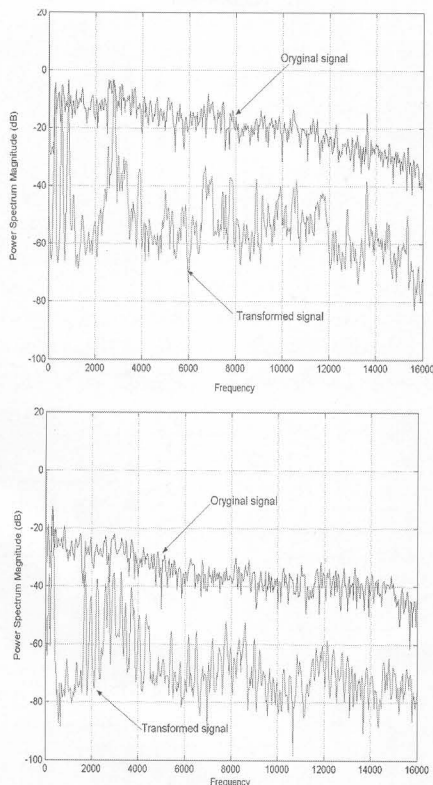
Entropia jest funkcją koncentracji energii. Wartości tej funkcji są małe dla dużej koncentracji energii (gdy nieduża liczba współczynników ma znaczące wartości).

Korzystając z powyższych zależności dokonano transformacji sygnału. Jako kryterium porównawcze przyjęto gęstość widmową

mocy sygnału. W tym celu na sygnał nałożono warunek chwilowej stacjonarności. Założenie takie jest poprawne, ponieważ sygnał został odpowiednio nadpróbkowany. Wyniki analizy pokazano poniżej.



Rys.14 Porównanie skalogramów sygnału oryginalnego i po transformacji.



Rys.15 Porównanie przykładowych gęstości widmowych mocy sygnału przed i po transformacji falkowej.

## 5. Wnioski

Z przeprowadzonej analizy wynika, że z sygnału oryginalnego zostały wybrane zostały składowe o największej energii. Wyraźnie widać, które składowe są dominujące. Pozwala to na poprawne określenie częstości zawartych w sygnale w przeciwieństwie do sy-

gnału przed transformacją, którego widmo było płaskie. Nie widać wówczas wyraźnie dominujących składowych sygnału. Można więc uznać, że metoda pozwala na eliminację szumu z analizowanego sygnału. Podejście takie jest bardzo przydatne przy analizie układów w stanach niestacjonarnych, gdzie trudno jest stosować klasyczne podejście filtracji ze względu na zmianę w czasie parametrów sygnału.

Dalsze prace nad metodą będą dotyczyły optymalizacji obliczeń, ponieważ wyliczanie transformaty falkowej dla całego pasma sygnałów o dużej częstości próbkowania jest czasochłonne. Następnym problemem jest sposób dobierania funkcji falkowych. Wiąże się to z rozdzielczością transformaty falkowej. Dla dużych częstotliwości rozdzielczość transformaty falkowej jest mała, co może powodować pominięcie niektórych składowych sygnału. Z kolei dla mniejszych częstotliwości może występować rozmycie widma oraz wzrost amplitudy niektórych składowych spowodowane wyborem kilku sąsiednich grzbietów transformaty falkowej (duża rozdzielczość dla niskich częstotliwości). Znalezienie optimum doboru jest tutaj rzeczą konieczną.

## 6. Literatura

1. Batko W., Ziółko M: Zastosowanie teorii falek w diagnostyce technicznej. Problemy Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, nr 7, Kraków 2002.
2. Białasiewicz J. T., Falki i aproksymacje, WNT W - wa, 2000.
3. Gouttebroze S., Lardies L.: On using the wavelet transform in modal analysis. Mechanics Research Communications. Vol 38 No. 5. pp. 561 - 569, 2000.
4. Klepka A., Uhl T, Zastosowanie wielorozdzielczej analizy sygnałów do diagnostyki układów mechanicznych, DIAGNOSTICS ' 2004 - 3rd INTERNATIONAL CONGRESS of TECHNICAL DIAGNOSTICS, 6 - 9 wrzesień 2004, ISSN 641-6414, volume 30, tom 1, p.161 - 165.
5. Klepka A., Uhl T.: An application of the wavelet analysis for identification of damping coefficient. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Z. 3(135), vol. 38, 2003, str. 65 - 82.
6. Klepka A., Uhl T.: Zastosowanie transformaty falkowej do rozprzegania postaci drgań oraz do wyznaczania współczynnika tłumienia, Górnictwo odkrywkowe nr 2 - 3/2003, str. 61 - 64.
7. Ruzzene M., Fasana A., Garibaldi L., Piombo B., Natural frequencies and damping identification using wavelets transform: application to real data, Mechanical Systems and Signal Processing, vol.11, 1997, pp. 207-218.
8. Staszewski W. J. Identification of damping in MDOF systems using time - scale decomposition. Journal of Sound and Vibration (1997) 203(2), 283 - 305.
9. Staszewski W., Giacomini J., Application of the wavelet based FRF's to the analysis of nonstationary vehicle data, Proc. Of IMAC 1997, pp. 425-431.
10. Staszewski W., Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transforms, Journal of Sound and Vibration, vol.214, 1998, pp. 639-658.
11. Todorowska M. I. Estimation of instantaneous frequency of signals using the continuous wavelet transform, Raport CE 01 - 07, University of Southern California, Department of Civil Engineering, December 2001.
12. Uhl T. Komputerowo wspomaganą identyfikacji konstrukcji mechanicznych. WNT W - wa 1997.
13. Young K.: Wavelet theory and its applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego, nr 8 T07C 031 21, finansowanego przez KBN.

**Title:** Spectrum estimation for diagnostic purposes with the use of wavelet transform.

Artykuł recenzowany