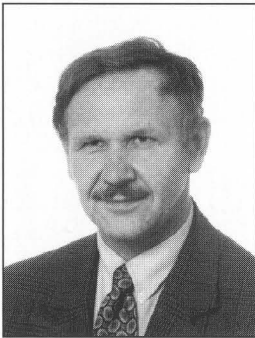


**Antoni BOGDAN, Tadeusz CITKO**  
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, KATEDRA ENERGOELEKTRONIKI I NAPĘDÓW ELEKTRYCZNYCH

**Analiza stanów dynamicznych przekształtnika DC/DC sterowanego metodą PWM**

prof. dr hab. inż. Tadeusz CITKO



Tytuł zawodowy magistra inżyniera elektryka uzyskał w 1970r, a stopień doktora nauk technicznych w 1976r na Politechnice Warszawskiej. Od 1995r jest profesorem w Katedrze Energoelektroniki i Napędów Elektrycznych Politechniki Białostockiej. Prowadzi prace badawcze w zakresie przekształtników rezonansowych, przekształtników AC/DC z ograniczonym oddziaływaniem na sieć i układów sterowania maszyn indukcyjnych

e-mail: tcitkon@pb.bialystok.pl

dr inż. Antoni BOGDAN



Adiunkt w Katedrze Energoelektroniki i Napędów Elektrycznych Politechniki Białostockiej. Tytuł zawodowy magistra inżyniera elektryka uzyskał w 1980r, a stopień doktora nauk technicznych w 1990 na Politechnice Warszawskiej. Jego zainteresowania naukowe dotyczą falowników rezonansowych z miękkim przełączaniem i przekształtników AC/DC z ograniczonym oddziaływaniem na sieć.

e-mail: abogdan@pb.bialystok.pl

**Streszczenie**

W artykule przedstawiono liniowy model dynamiczny przekształtnika impulsowego sterowanego metodą PWM w odniesieniu do zmiennych uśrednionych. Na konkretnym przykładzie został zaprezentowany dobór regulatora w napięciowej pętli regulacyjnej. Dynamiczne właściwości układu zostały potwierdzone za pomocą jego symulacji w programie PSIPICE.

**Abstract**

In the paper a linear dynamic model of an impulse DC/DC converter is presented and discussed. The converter is controlled with the use of the PWM (pulse width modulation) method, applied to the averaged variables. The simulation example presents the process of tuning the controller, which works in the voltage control loop. Dynamic properties of the system have been extensively investigated in the series of numerical experiments, performed in the PSIPICE simulation package.

**1. Wstęp**

PWM (pulse width modulation) jest powszechnie stosowaną metodą regulacji napięcia wyjściowego przekształtników. Jest to typowa impulsowa metoda regulacji, gdyż regulowane napięcie przyjmuje alternatywnie dyskretne wartości równe zeru lub napięciu źródła. W wyniku stosowanych filtrów lub reakcji samego odbiornika prąd wyjściowy ma jednak charakter ciągły. Własności dynamiczne układu są determinowane przez wartości elementów filtrujących i powiązane są z zakresem częstotliwości znacznie mniejszych od częstotliwości kluczkowania. Częstotliwość kluczkowania w impulsowych zasilaczach mocy wykorzystujących tranzystory MOSFET może wynosić powyżej 100kHz bez stosowania specjalnych metod przełączania (miękkich metod przełączania czy sieci odciażających). Dlatego analizując dynamikę takiego układu jako jego zmienne stanu przyjmuje się wielkości uśrednione za okres kluczkowania [1].

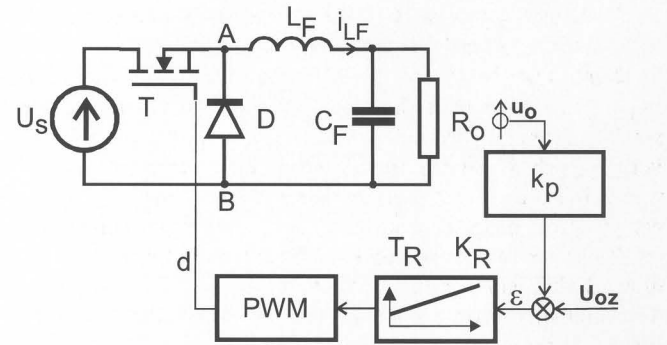
W artykule przedstawiony jest dobór regulatora napięcia w elementarnym układzie zasilacza impulsowego poparty przykładem obliczeniowym i weryfikacją symulacyjną w programie PSIPICE. Parametry filtru w układzie decydujące o własnościach dynamicznych zostały narzucone poprzez dopuszczalne pulsacje napięcia w stanie ustalonym.

**2. Model przekształtnika impulsowego dla zmiennych uśrednionych**

Oznaczając okres kluczkowania przez  $T$  wielkość  $x(t)$  określamy jako zmienną uśrednioną  $\tilde{x}(t)$  za pomocą równania:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{\text{entier}\left(\frac{t}{T}\right)T}^{\text{entier}\left(\frac{t}{T}+1\right)T} x(\tau) d\tau \tag{1}$$

Schemat elementarnego zasilacza impulsowego wraz z blokowym schematem układu regulacji przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Schemat przekształtnika impulsowego wraz z obwodem regulacji

Zmienną sterowaną w układzie jest współczynnik wypełnienia  $\delta$  definiowany jako stosunek czasu przewodzenia tranzystora w okresie do okresu kluczkowania  $\delta = t_p/T$ . Stan układu jest jednoznacznie określony poprzez następujące trzy równania:

– równanie określające zmiany uśrednionego prądu w indukcyjności filtru, wynikające z uśrednionego napięcia na tej indukcyjności:

$$L_F \frac{d\tilde{i}_{LF}(t)}{dt} = \tilde{u}_{LF}(t) = \delta(t) [\tilde{u}_s(t) - \tilde{u}_o(t)] + [1 - \delta(t)] \tilde{u}_o(t) = \delta(t) [\tilde{u}_s(t) - \tilde{u}_o(t)] \tag{2}$$

– równanie określające zmiany uśrednionego napięcia na kondensatorze filtru wynikające z uśrednionego prądu kondensatora:

$$C_F \frac{d\tilde{u}_o(t)}{dt} = \tilde{i}_{LF}(t) - \frac{\tilde{u}_o(t)}{R_o} \tag{3}$$

– zależność uśrednionego prądu źródła  $\tilde{i}_s(t)$  od uśrednionego prądu w indukcyjności wynikająca z porównania mocy chwilowych



na wejściu i wyjściu układu:

$$\tilde{i}_s(t) = \delta(t) \tilde{i}_{LF}(t) \quad (4)$$

Powyższy układ równań stanu jest nieliniowy ponieważ w równaniach (2), (4) występują iloczyny zmiennych. Linearyzacji układu dokonujemy w punkcie pracy ustalonej w odniesieniu do małych przyrostów zmiennych, nazywanych zmiennymi małosygnałowymi. Stąd przy zaburzeniu układu w punkcie pracy ustalonej jego zmienne stanu mają postać:

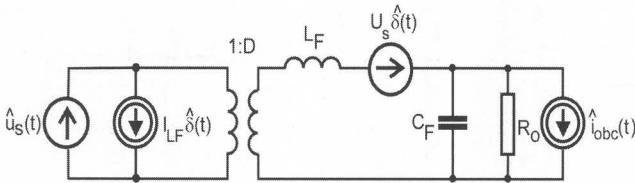
$$\begin{aligned} \tilde{u}_s(t) &= U_s + \hat{u}_s(t) \\ \delta(t) &= D + \hat{\delta}(t) \\ \tilde{u}_o(t) &= U_o + \hat{u}_o(t) \\ \tilde{i}_{LF}(t) &= I_{LF} + \hat{i}_{LF}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie: duże litery dotyczą ustalonego punktu pracy, a małe z „daszkiem” zmian małosygnałowych.

Podstawiając tak określone zmienne do układu równań (2-4) z uwzględnieniem zależności obowiązujących w stanie ustalonym ( $U_o = D U_s$ ,  $I_{LF} = U_o/R_o$ ) oraz zaniedbując składniki nieliniowe jako nieistotnie małe otrzymamy następujący liniowy układ równań stanu:

$$\begin{aligned} L_F \frac{d\hat{i}_{LF}(t)}{dt} &= D\hat{u}_s(t) + U_s\hat{\delta}(t) - \hat{u}(t) \\ \hat{i}_{LF}(t) &= \frac{\hat{u}_o(t)}{R_o} + C_F \frac{d\hat{u}_o(t)}{dt} \\ \hat{i}_s(t) &= I_{LF}\hat{\delta}(t) + D\hat{i}_{LF}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

W oparciu o powyższy układ równań można zbudować schemat zastępczy układu dla zmiennych małosygnałowych, pokazany na rys. 2.



Rys 2. Schemat zastępczy przekształtnika DC/DC dla zmiennych małosygnałowych

Układ równań (6) został wyprowadzony przy stałej wartości obciążenia  $R_o$ , aby uwzględnić możliwość zakłócenia poprzez zmianę obciążenia w schemacie zastępczym, zostało wprowadzone dodatkowe źródło prądowe  $\hat{i}_{obc}(t)$  symbolizujące zmiany obciążenia. Przechodząc z dziedziny czasu do dziedziny zmiennej zespolonej oraz stosując zasadę superpozycji ze względu na liniowość układu, możemy go opisać następującym równaniem:

$$\hat{u}_o(s) = G_{\hat{u}_o\delta} \hat{\delta}(s) + G_{\hat{u}_o\hat{u}_s} \hat{u}_s(s) - Z_{wyj} \hat{i}_{obc}(s) \quad (7)$$

gdzie:

$$G_{\hat{u}_o\delta} = \left. \frac{\hat{u}_o(s)}{\hat{\delta}(s)} \right|_{\hat{u}_s=0, \hat{i}_{obc}=0} \quad \text{transmitancja wyjście-sterowanie}$$

$$G_{\hat{u}_o\hat{u}_s} = \left. \frac{\hat{u}_o(s)}{\hat{u}_s(s)} \right|_{\hat{\delta}=0, \hat{i}_{obc}=0} \quad \text{transmitancja wyjście-zasilanie}$$

$$Z_{wyj} = \left. \frac{\hat{u}_o(s)}{\hat{i}_{obc}(s)} \right|_{\hat{\delta}=0, \hat{u}_s=0} \quad \text{impedancja wyjściowa układu}$$

Wymienione transmitancje oraz impedancję wyjściową układu można wyznaczyć w oparciu o schemat zastępczy przedstawiony na rys. 2.

$$G_{\hat{u}_o\delta} = U_s \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + \frac{s}{Q_o\omega_o} + 1} \quad (8)$$

$$G_{\hat{u}_o\hat{u}_s} = D \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + \frac{s}{Q_o\omega_o} + 1} \quad (9)$$

$$Z_{wyj} = L_F \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + \frac{s}{Q_o\omega_o} + 1} \quad (10)$$

gdzie:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{L_F C_F}} \quad \text{– pulsacja rezonansowa}$$

$$Q_o = R_o \sqrt{\frac{C_F}{L_F}} \quad \text{– dobroć układu}$$

Jak widać dynamiczne właściwości układu zależą od parametrów filtru i rezystancji obciążenia. W układzie praktycznym te parametry zależą od ustalonych warunków pracy układu.

### 3. Dobór parametrów układu

Przyrost prądu wyjściowego w stanie pracy ustalonej wynosi:

$$\frac{\Delta i_{LF}}{D \cdot T} = \frac{U_s - U_o}{L_F} \quad (11)$$

Biorąc pod uwagę, że  $U_o = D \cdot U_s$  oraz  $I_o = U_o/R_o$  względne pulсации prądu wyjściowego wynoszą:

$$\frac{\Delta i_{LF}}{I_o} = \frac{R_o}{L_F} T(1-D) \quad (12)$$

Ponieważ analizowany jest stan układu w warunkach przewodzenia ciągłego spełniony być musi warunek  $\Delta i_{LF}/I_o \leq 0,5$ . Stąd możemy wyznaczyć niezbędną wartość indukcyjności filtru:

$$L_F = 2R_o T(1-D_{min}) \quad (13)$$

gdzie:  $D_{min}$  – minimalny współczynnik wypełnienia

Z kolei przy założeniu stałego prądu obciążenia przyrost napięcia wyjściowego uzależniony będzie od przyrostu prądu  $\Delta i_{LF}$ :

$$\Delta u_o = \frac{1}{C_F} \frac{1}{2} \frac{\Delta i_{LF}}{2} \cdot \frac{T}{2} \quad (14)$$

Stąd względne wahania napięcia:

$$\frac{\Delta u_o}{U_o} = \frac{T}{8C_F f R_o} \frac{\Delta i_{LF}}{I_o} \quad (15)$$

Dlatego pojemność filtru możemy wyznaczyć jako równą:

$$C_F = \frac{T}{16R_o} \frac{\Delta u_o}{U_o} \quad (16)$$

Ostatecznie pulsacja i dobroć układu uzależnione będą od założonej dokładności stabilizacji napięcia w stanie ustalonym  $\frac{\Delta u_o}{U_o}$ :



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_F C_F}} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{8 \frac{\Delta u_o}{U_o}}{1 - D_{min}}}$$

(17)

$$Q_o = R_o \sqrt{\frac{C_F}{L_F}} = \frac{1}{\sqrt{32 \frac{\Delta u_o}{U_o} (1 - D_{min})}}$$

(18)

Wynika stąd, że przy stałej częstotliwości kluczowania  $T$  dynamiczne parametry układu zależą od przyjętej dokładności stabilizacji napięcia  $\frac{\Delta u_o}{U_o}$  oraz wymaganego zakresu regulacji  $D_{min}$ .

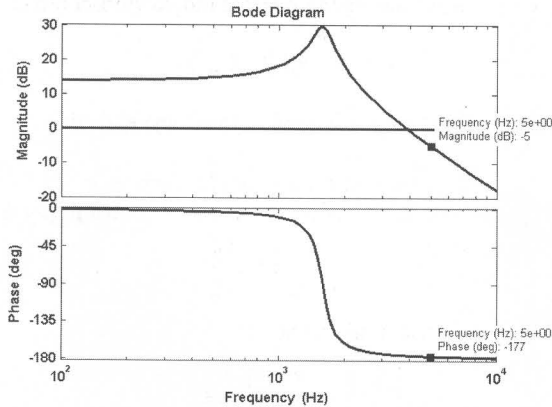
4. Przykład

Założmy, że napięcie wyjściowe ma być regulowane w zakresie  $U_0 = 40 \div 120V$  przy napięciu zasilającym  $U_s = 200 \div 150V$  oraz rezystancji obciążenia  $R_0 = 6\Omega$ . Zakładamy częstotliwość kluczowania  $f = 1/T = 100\text{ kHz}$ , stąd minimalne wypełnienie wynosi  $D_{min} = 40/200 = 0,2$ . Dla przyjętej częstotliwości kluczowania i minimalnym wypełnieniu relacje dynamicznych parametrów układu, w zależności od założonej dokładności stabilizacji napięcia, przedstawia tabela 1. Dobroć układu otwartego rośnie wraz z dokładnością stabilizacji, a tym samym rosną tendencje układu do oscylacji.

Tabela 1

$\frac{\Delta u_o}{U_o}$	0,1	0,01	<b>0,001</b>	0,0001
$f_0$ [kHz]	16	5	<b>1,6</b>	0,5
$Q_0$	0,625	1,98	<b>6,25</b>	19,8

Przyjmując dokładność stabilizacji  $\frac{\Delta u_o}{U_o} = 0,001$  otrzymujemy częstotliwość rezonansową  $f = 1,6\text{kHz}$  oraz dobroć  $Q_0 = 6,25$ , zakładając przy tym wzmocnienie w torze pomiarowym napięcia  $k_p = 0,1$  oraz wzmocnienie regulatora PWM=0,25 możemy wyznaczyć transmitancję układu otwartego. Logarytmiczną amplitudowo – fazową charakterystykę układu otwartego, wyznaczoną przy wykorzystaniu pakietu Matlab [3], przedstawia rys. 3.



Rys 3. Logarytmiczna amplitudowo-fazowa charakterystyka układu otwartego

Biorąc pod uwagę założoną częstotliwość kluczowania  $f = 100\text{kHz}$  ze względu na fakt, że dynamika związana ze zmiennymi uśrednionymi musi być ograniczona do częstotliwości co najmniej o rząd mniejszych przyjmujemy, że częstotliwość odcięcia charakterystyki amplitudowej powinna wynosić  $f_c = 100/20 = 5\text{kHz}$ . Jak wynika z rys. 3 przy tej częstotliwości 5 kHz zapas fazy układu otwartego jest praktycznie równy zeru. Aby dobroć układu zamkniętego wynosiła  $Q_0 = 1$  (co gwarantuje niewielkie przeregulowanie ~16%)

zapas fazy układu otwartego powinien wynosić  $52^\circ$  [2]. Wprowadzamy więc regulator PD, który zapewni zapas fazy układu otwartego równy  $52^\circ$  przy częstotliwości  $f_c = 5\text{kHz}$ . Transmitancja tego regulatora ma postać:

$$G_{REG}(s) = G_{REG0} \frac{\frac{s}{\omega_z} + 1}{\frac{s}{\omega_p} + 1}$$

(19)

przy tym pulsacje  $\omega_z$  i  $\omega_p$  powiązane są z wartością założonego zapasu fazy  $\Theta = 52^\circ$  [2]

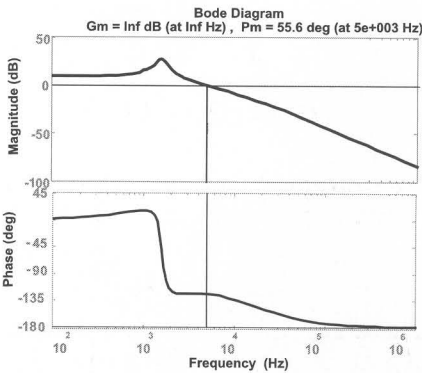
$$\omega_z = 2\pi f_c \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{1 + \sin \Theta}} = 10600$$

$$\omega_p = 2\pi f_c \sqrt{\frac{1 + \sin \Theta}{1 - \sin \Theta}} = 91000$$

Wzmocnienie  $G_{REG0}$  dobieramy tak, aby częstotliwość przejścia logarytmicznej charakterystyki amplitudowej wynosiła  $f_c = 5\text{kHz}$  (wzmocnienie układu otwartego dla częstotliwości  $f_c$  ma wynosić 1). Wynikająca stąd wartość  $G_{REG0} = 0,548$ . Ostatecznie transmitancja układu otwartego z regulatorem PD przybierze postać:

$$T(s) = 3 \frac{1 + \frac{s}{10600}}{\left(1 + \frac{s}{91000}\right) \left(1 + \frac{s}{62500} + \left(\frac{s}{10000}\right)^2\right)}$$

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa tego układu przedstawiona jest na rys. 4.



Rys. 4. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa układu otwartego z regulatorem PD

Charakterystyka ta jest świadectwem, że układ zamknięty spełni oczekiwania przyjęte w założeniu. Dodatkowo jednak należy wziąć pod uwagę fakt, że napięcie zasilające  $U_s$  może posiadać niskoczęstotliwościowe pulsacje, gdy układ jest zasilany z prostownika diodowego. Przy zasilaniu układu poprzez prostownik dwupulsowy diodowy zasadnicza harmoniczna napięcia zasilającego posiada częstotliwość 100 Hz. Tłumienie tej zakłócającej harmonicznej możemy zwiększyć wprowadzając regulator PID o transmitancji [2]:

$$G_{REG}(s) = G_{REG0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_z}\right) \left(1 + \frac{\omega_L}{s_z}\right)}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

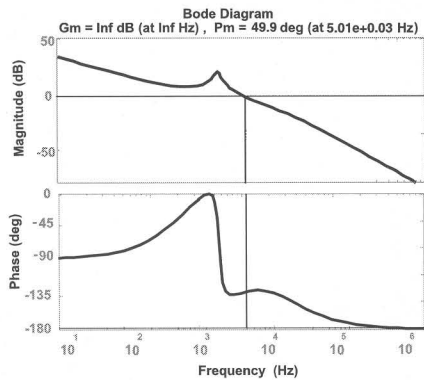
Aby nie zmieniać właściwości układu w zakresie wyższych częstotliwości pozostawiamy poprzednio dobrane parametry regulatora  $G_{REG0}$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_p$ , natomiast pulsację  $\omega_L$  przyjmujemy mniejszą o rząd w stosunku do częstotliwości  $f$  czy  $f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 500$

Transmitancja układu otwartego z regulatorem PID wyniesie:

$$T(s) = 3 \frac{\left(1 + \frac{s}{10600}\right) \left(1 + \frac{3100}{s}\right)}{\left(1 + \frac{s}{91000}\right) \left(1 + \frac{s}{62500} + \left(\frac{s}{10000}\right)^2\right)}$$



Odpowiednią logarytmiczną charakterystykę amplitudową i fazową układu otwartego z regulatorem PID przedstawia rys. 5.

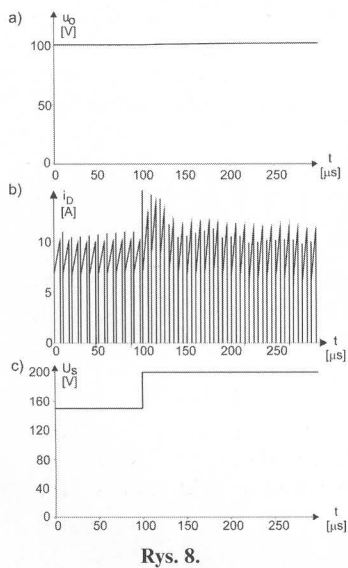
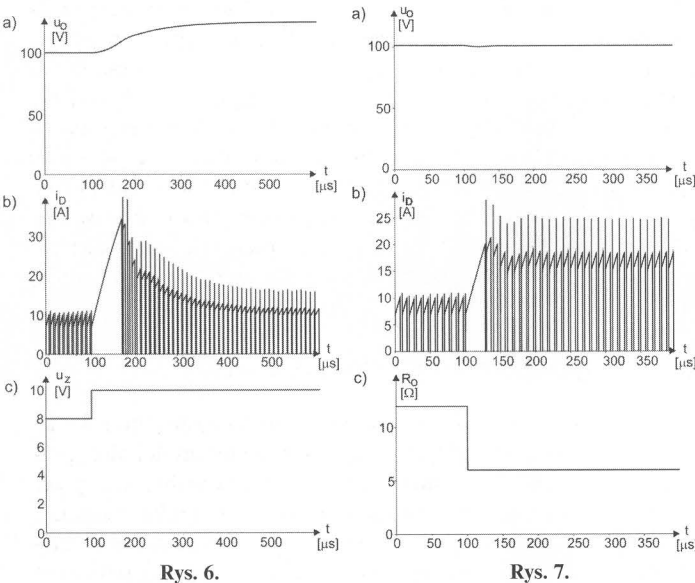


Rys. 5. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa układu otwartego z regulatorem PID

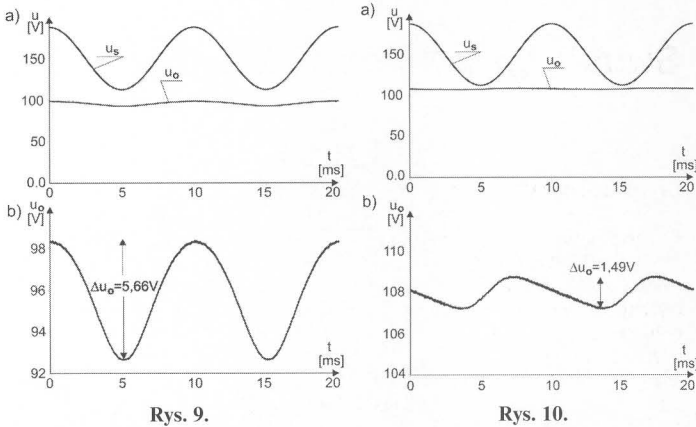
5. Wyniki badań symulacyjnych układu w programie PSIPICE

W modelu symulacyjnym wykorzystano tranzystor IRF 460, diodę HFA30TB60 oraz parametry filtru wynikające z przytoczonych obliczeń:  $L_F = 96 \mu\text{H}$  oraz  $C_F = 100 \mu\text{F}$ .

Kolejne wyniki prezentują przebieg czasowy zmian napięcia wyjściowego oraz prądu tranzystora po skokowym zakłóceniu układu. Rys. 6 dotyczy skokowej zmiany napięcia zadanego, rys. 7 przedstawia odpowiedź układu na skokową zmianę obciążenia, zaś rys. 8 dotyczy skokowej zmiany napięcia zasilającego.



Rys. 6. Przebiegi czasowe napięcia wyjściowego (a) i prądu drenu tranzystora przekształtnika (b) przy skokowej zmianie napięcia zadanego (c)  
Rys. 7. Przebiegi czasowe napięcia wyjściowego (a) i prądu drenu tranzystora przekształtnika (b) przy skokowej zmianie obciążenia (c).  
Rys. 8. Przebiegi czasowe napięcia wyjściowego (a) i prądu drenu tranzystora przekształtnika (b) przy skokowej zmianie napięcia wejściowego (c).



Rys. 9. Przebieg czasowy napięcia wyjściowego i wejściowego przekształtnika przy zasilaniu napięciem zawierającym składową przemienną o częstotliwości 100Hz z regulatorem napięcia typu PD; a) – napięcie wejściowe i wyjściowe w skali naturalnej, b) – napięcie wyjściowe w skali powiększonej

Rys. 10. Przebieg czasowy napięcia wyjściowego i wejściowego przekształtnika przy zasilaniu napięciem zawierającym składową przemienną o częstotliwości 100Hz z regulatorem napięcia typu PID; a) – napięcie zasilające i wyjściowe w skali naturalnej, b) – napięcie wyjściowe w skali powiększonej

Rysunki 9 i 10 dotyczą pracy w stanie ustalonym przy napięciu zasilającym zawierającym składową przemienną o częstotliwości 100Hz i amplitudzie równej  $1/4$  w stosunku do składowej stałej. Przy czym rys. 9 dotyczy układu z dobranym regulatorem PD, a rys. 10 układu z regulatorem PID.

Podsumowanie

W artykule wykazano, że liniowy, odniesiony do małosygnałowych zmiennych uśrednionych, model nieliniowego impulsowego przekształtnika napięcia sterowanego metodą PWM jest dostatecznie wierny i przydatny w praktyce do analizy i syntezy dynamicznej układu. W dyskutowanym układzie zastosowano jedynie napięciową pętlę regulacyjną, przez co prąd w układzie nie jest wielkością kontrolowaną. W układzie praktycznym należy zastosować dodatkową pętlę prądową przy szeregowym bądź równoległym połączeniu regulatorów dobranych w oparciu o zaprezentowany model przekształtnika.

Literatura

[1] Mohan N., Shaumugavel G., Holevarsipur P. and Nirquole G.: First course on power electronics simplified by unifying analysis of PWM converters as cycle – by – cycle averaged two-ports and by PSpice – based simulations. in Proc. 8<sup>th</sup> Eur. Conf. Power Electron. Applicat., Lausanne, Switzerland, 1999, p. 8  
[2] Erickson R. W., Maksimovic: Fundamentals od Power Electronics (second edition). Kluwer Academic Publishers, 2001.  
[3] Zalewski A., Cegieło R.: Matlab – obliczenia numeryczne. Nakom, Poznań, 2003.

**Title:** Analysis of dynamic states of a DC/DC converter with the PWM control scheme