

**Maciej PETKO, Grzegorz KARPIEL, Daniel PRUSAK, Adam MARTOWICZ**

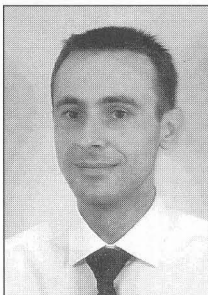
AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI, KATEDRA ROBOTYKI I DYNAMIKI MASZYN

## Kinematyka nowego typu manipulatora równoległego o trzech stopniach swobody

dr inż. Maciej PETKO

Asiunkt w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Jego zainteresowania skupiają się na mechanice, robotyce, zagadnieniach prototypowania i implementacji algorytmów przetwarzania sygnałów, głównie w sterowaniu i diagnostyce technicznej.

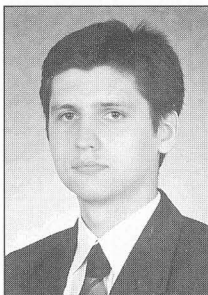
*petko@agh.edu.pl*



mgr inż. Grzegorz KARPIEL

Ukończył studia na Wydziale Inżynierii Mechanicznej i Robotyki AGH w 2001 roku. Obecnie doktorant w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Główne zainteresowania skupiają się na mechatronice, zagadnieniach dotyczących robotów równoległych oraz projektowaniu sterowników opartych na układach FPGA

*gkarpie@agh.edu.pl*



mgr inż. Daniel PRUSAK

Ukończył studia na Wydziale Inżynierii Mechanicznej i Robotyki na kierunku Automatyka i Robotyka, AGH w Krakowie. Obecnie doktorant w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z kalibracją robotów.

*daniel.prusak@agh.edu.pl*



mgr inż. Adam MARTOWICZ

Ukończył studia na Wydziale Inżynierii Mechanicznej i Robotyki na kierunku Automatyka i Robotyka, AGH w Krakowie. Obecnie doktorant w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z generowaniem trajektorii dla robotów.

*adam.martowicz@agh.edu.pl*



### Streszczenie

W artykule przedstawiono kinematykę nowego typu manipulatora trójramiennego o trzech stopniach swobody, zbudowanego w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Wyprowadzono analityczne rozwiązanie zadania kinematyki odwrotnej oraz zaproponowano i zbadano metodę szybkiego i dokładnego numerycznego rozwiązywania zadania kinematyki prostej. Podano także sposób przybliżonego rozwiązania analitycznego tego problemu

### Abstract

In the paper, kinematics of a new type of threelimbs, 3-DOF manipulator, built in Dept. of Robotics and Machine Dynamics, AGH is presented. The symbolic, closed form of inverse kinematics is derived. A method of fast and accurate numerical solution of forward kinematic problem is proposed and investigated. The way of approximate, analytic solving of this problem is given.

### 1. Wstęp

Manipulatory równoległe są zwykle zbudowane z nieruchomej podstawy i ruchomej platformy, połączonych kilkoma niezależnymi, szeregowymi łańcuchami kinematycznymi (ramionami). Tylko niektóre pary kinematyczne w tych łańcuchach są napędzane i ich liczba zwykle równa jest liczbie stopni swobody, które posiada platforma względem podstawy. Zalety manipulatorów równoległych, takie jak mała bezwładność, wysoka sztywność, wysoka dynamika, czy korzystny stosunek obciążalności do masy własnej, spowodowały duże zainteresowanie tego typu konstrukcjami. Najczęściej wykorzystywane są konfiguracje o sześciu stopniach swobody, oparte na konstrukcji platformy Stewarda-Gougha [8], jednakże nie zawsze jest potrzebna tak duża ruchliwość. W związku z tym analizowane są konfiguracje o mniejszej liczbie stopni swobody, jako potencjalnie prostsze i tańsze (wymagają mniejszej ilości napędów). Pierwszą tego typu konstrukcją, która odniosła duży sukces komercyjny, dzięki znakomitym własnościom dynamicznym, był robot DELTA [7]. Później analizowano wiele innych architektur manipulatorów o trzech stopniach swobody [1][4] i prawie wszystkie sprawiają problemy z wyznaczeniem analitycznego rozwiązania zadania kinematyki prostej.

Dzięki opracowaniu nowego typu przegubu, stanowiącego równocześnie ruchomą platformę, oraz zastosowaniu liniowych

napędów bezpośrednich, możliwe było skonstruowanie nowego typu manipulatora równoległego o dużej przestrzeni roboczej i dużej obciążalności. Niniejszy artykuł poświęcony jest rozwiązaniom problemu kinematyki prostej i odwrotnej tego manipulatora.

### 2. Manipulator równoległy typu tripod

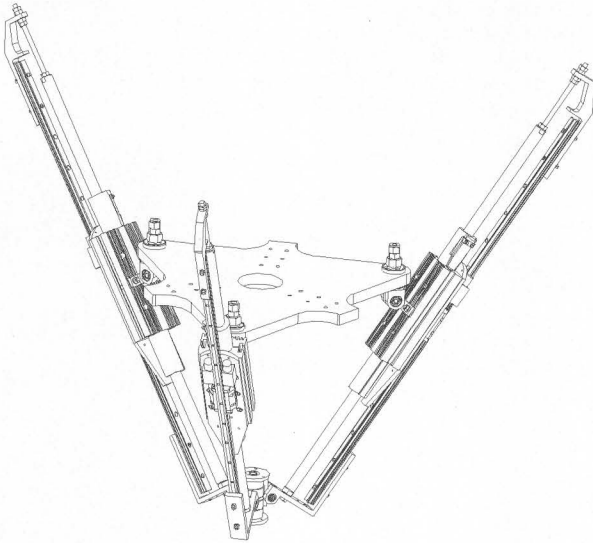
Zbudowany w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH manipulator równoległy o trzech stopniach swobody przedstawiono na rys. 1. Manipulator posiada trzy ramiona wychodzące od podstawy i połączone wspólnym przegubem potrójnym. Przegub główny potrójny pełni rolę ruchomej platformy, do której montowany jest chwytak lub narzędzie obrabiające. Każde z ramion robota tworzy łańcuch kinematycznym RRPRR (rys. 2), w którym człon przyzmatyczny 3 jest napędzany silnikiem liniowym. Napęd liniowy prowadzony jest przez prowadnicę przymocowaną poprzez elementy obrotowe do wspólnej podstawy. Zarówno przeguby łączące napęd z podstawą, jak i elementy przegubu potrójnego zostały tak skonstruowane, aby składały się z połączeń o jednym stopniu swobody. Takie rozwiązanie konstrukcyjne gwarantuje możliwość łatwego wykonania i montażu oraz łatwiejsze uzyskanie wymaganych dokładności.

Oś przegubu głównego jest zawsze skierowana prostopadle do podstawy, co jest zapewnione przez odpowiednie usytuowanie osi przegubów obrotowych [6] oraz oryginalną konstrukcję przegubu głównego potrójnego [5]. Przegub potrójny składa się z jednego elementu głównego i dwóch pomocniczych. Ponieważ chwytak przymocowany jest bezpośrednio do części głównej przegubu potrójnego, ma to bezpośredni wpływ na jego orientację w przestrzeni. W sytuacji wykorzystania robota jako konstrukcji wsporczej obrabiarki (wiercenie, frezowanie) nie ma to znaczenia, natomiast przy wykorzystaniu manipulatora do zadań manipulacyjnych (paletyzacja, montaż), korzystne jest użycie dodatkowego napędu obrotowego pozwalającego na orientację chwytaka względem osi obrotu przegubu głównego (osi z).

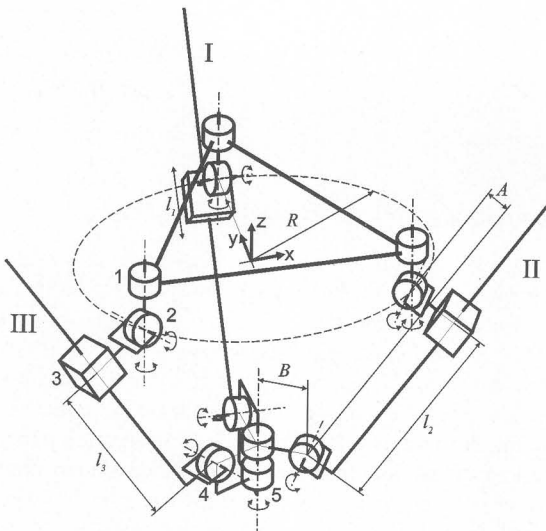
Dotychczasowe doświadczenia [9] wskazują, że dla manipulatorów równoległych, przeciwnie niż dla szeregowych, znalezienie rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki jest zwykle znacznie łatwiejsze niż zadania prostego.

### 3. Kinematyka odwrotna

Przedstawiony manipulator posiada trzy identyczne ramiona I, II, III, działające bezpośrednio na platformę (rys. 2). Każde z ramion tworzy łańcuch kinematyczny, którego początek jest związany z przyjętą podstawą a koniec ma bezpośredni wpływ na położenie platformy.



Rys. 1 Widok manipulatora



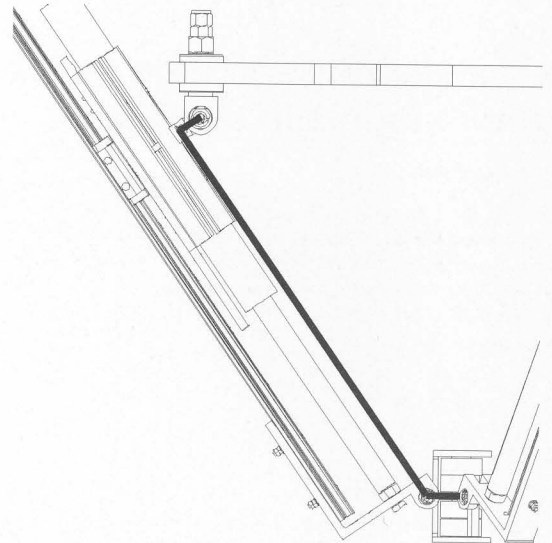
Rys. 2 Struktura kinematyczna manipulatora

Na rys. 3 przedstawiono rzut manipulatora na płaszczyznę równoległą do jednego z członów pryzmatycznych. Charakterystyczne wymiary pojedynczego ramienia, wynikające z konstrukcji mechanicznej pokazano na rys. 4. Długość członu pryzmatycznego 3 oznaczona jako  $l_a$  zawarta jest pomiędzy punktem  $P_p$ , o współrzędnych  $(x_p, y_p, z_p=0)$  wynikającym z przecięcia osi symetrii złącza 2 a środkiem obrotu złącza 4. W układzie mierzono jest wysunięcie napędu liniowego  $l$ , którego oś jest odsunięta od punktu  $P_p$  o odległość  $A$ . Zależność wiążącą mierzoną odległość  $l$  z długością członu pryzmatycznego  $l_a$  określa następujące równanie:

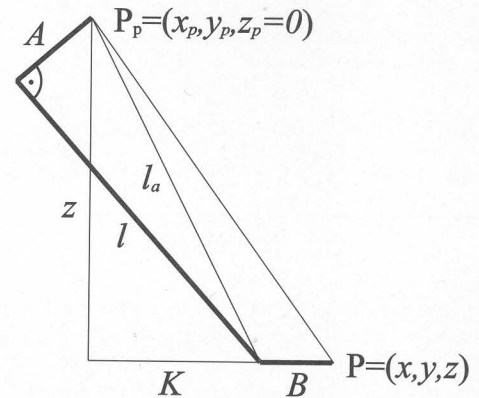
$$l = \sqrt{l_a^2 - A^2} \quad (1)$$

Odległość  $B$  wynika z przesunięcia środka obrotu złącza 4 od głównej osi platformy przechodzącej przez koniec ramienia  $P$  o współrzędnych  $(x, y, z)$ . Punkt  $P$  jest wspólnym końcem wszystkich ramion i środkiem ruchomej platformy. Przedstawiona na rys. 4 pomocnicza wielkość  $K$  będąca rzutem  $l_a$  na płaszczyznę  $xy$ , pozwala powiązać współrzędną z platformy z długością  $l_a$ :

$$l_a^2 = z^2 + K^2 \quad (2)$$



Rys. 3 Widok jednego z ramion z zaznaczonymi charakterystycznymi wymiarami



Rys. 4 Charakterystyczne wymiary, występujące w wyprowadzeniu równań kinematycznych, wraz z zaznaczonymi punktami początku i końca ramienia (por. rys. 3)

Odległość  $K+B$ , będąca rzutem długości ramienia ( $P_p P$ ) na płaszczyznę  $xy$  wyraża się jako:

$$(K+B)^2 = (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 \quad (3)$$

Przekształcając zależność (3) ze względu na odległość  $K$  otrzymano:

$$K = \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2} - B \quad (4)$$

Po wstawieniu (4) do (2) a następnie (2) do (1) otrzymano równanie (5) opisujące wysunięcie napędu  $l$  w zależności od współrzędnych kartezjańskich środka platformy  $(x, y, z)$  z parametrami  $x_p, y_p$ , będącymi współrzędnymi początku ramienia  $P_p$ :

$$l = \sqrt{\left(\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2} - B\right)^2 + z^2} - A^2 \quad (5)$$

Manipulator posiada trzy ramiona rozmieszone zgodnie z rys. 5. Początek każdego z ramion znajduje się na okręgu o promieniu  $R$ . Współrzędne  $(x_p, y_p)$  dla ramienia pierwszego (I) wynoszą:

$$x_1 = R \cdot \cos(90^\circ) = 0 \quad (6)$$

$$y_1 = R \cdot \sin(90^\circ) = R$$

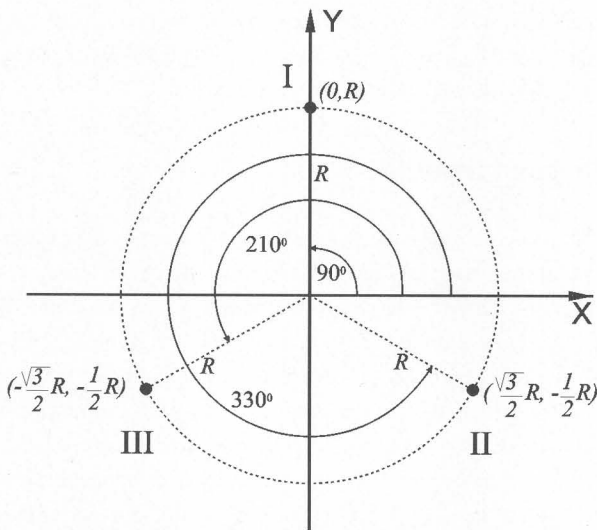
Analogicznie, dla ramienia drugiego (II) i trzeciego (III):

$$x_2 = R \cdot \cos(330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad (7)$$

$$y_2 = R \cdot \sin(330^\circ) = -\frac{1}{2} R$$

$$x_3 = R \cdot \cos(210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \quad (8)$$

$$y_3 = R \cdot \sin(210^\circ) = -\frac{1}{2} R$$



Rys. 5 Rozmieszczenie miejsc mocowania ramion na płaszczyźnie xy - widok z góry

Po podstawieniu współrzędnych początków ramion (6) (7) (8) do równania (5) otrzymano układ równań (9), będący rozwiązaniem zadania odwrotnego kinematyki:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)^2 + z^2 - A^2} \\ l_2 &= \sqrt{\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B\right)^2 + z^2 - A^2} \\ l_3 &= \sqrt{\left(\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B\right)^2 + z^2 - A^2} \end{aligned} \quad (9)$$

#### 4. Kinematyka prosta

Poszukiwanie położenia środka P platformy manipulatora równoległego we współrzędnych kartezjańskich, na podstawie znajomości wysunięć napędów, jest zadaniem znacznie bardziej skomplikowanym. Przyczyna tkwi w bezpośrednim działaniu wszystkich równoległych łańcuchów kinematycznych na platformę. W układach otwartych można niezależnie opisać każdy człon łańcucha kinematycznego osobnym równaniem a następnie dodając geometrycznie te równania, uzyskać równanie całego łańcucha [2]. W manipulatorze równoległym każde ramię może przyjmować nieskończenie wiele położeń przy danym wysunięciu jego napędu. Położenie środka platformy znajduje się w punkcie przecięcia powłok określających dostępne położenia końców poszczególnych ramion przy danych wysunięciach napędów [9]. Rozwiązaniem zadania kinematyki prostej jest więc rozwiązanie układu równań nieliniowych, w których zawarte są zależności pomiędzy położeniem końcówki ramienia a jego wysunięciem, ze względu na współrzędne kartezjańskie punktu P. Dla przedstawionej konstrukcji manipulatora, zależności te są określone równaniami (9). Próba analitycznego rozwiązania tego układu równań nie powiodła się. Rozwiązania tego typu problemów sprowadzają się w którymś momencie do wyznaczenia pierwiastków wielomianów wysokiego rzędu [10] [4]. Następnie, spośród wielu matematycznie wyznaczonych rozwiązań (pierwiastków) należy zidentyfikować to jedyne, realizowalne fizycznie. Jednakże skomplikowana postać tych rozwiązań sprawia duże problemy z ich fizyczną interpretacją, i co za tym idzie wyborem tego właściwego.

Wobec braku rozwiązania analitycznego, należy zastosować metody numeryczne. Algorytm numeryczny powinien dawać wystar-

czająco dokładne rozwiązanie w minimalnej ilości iteracji. Do znajdowania rozwiązania zadania prostego kinematyki zastosowano metodę Newtona-Raphsona [3]. Dla uproszczenia obliczeń, przekształcono równania (9) do postaci:

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{aligned} &\left( \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B \right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)^2 \\ &\left( \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B \right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)^2 \end{aligned} \right] \\ &- \begin{bmatrix} l_2^2 - l_1^2 \\ l_3^2 - l_1^2 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie  $t = [x \ y]^T$ . Rozwiązując równanie (10) można numerycznie wyznaczyć wartości współrzędnych środka platformy  $x, y$ . Współrzędną  $z$  można następnie wyznaczyć analitycznie, przekształcając pierwsze równanie układu (9) do postaci:

$$z = \sqrt{l_1^2 - \left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)^2 + A^2} \quad (11)$$

Oznaczając lewą stronę równania (10) przez  $S(t)$ , zgodnie z metodą Newtona-Raphsona iteracje odbywają się wg zależności:

$$t^{k+1} = t^k - J_S(t)^{-1} \cdot S \quad (12)$$

gdzie  $J_S$  jest jacobianem równania (10), a  $k$  jest numerem kroku iteracji. Jakobian można wyznaczyć analitycznie, dzięki czemu unika się błędów numerycznych związanych z obliczaniem pochodnych. Macierz jacobianu we wzorze (12) przyjmuje postać:

$$J_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_1}{\partial y} \\ \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Poszczególne elementy macierzy jacobianu dane są zależnościami:

$$J_{11} = \frac{\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B\right)(2x - \sqrt{3}R)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2}} + \frac{2\left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)x}{\sqrt{x^2 + (y-R)^2}} \quad (14)$$

$$J_{12} = \frac{\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B\right)(2y + R)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2}} + \frac{2\left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)(y-R)}{\sqrt{x^2 + (y-R)^2}} \quad (15)$$

$$J_{21} = \frac{\left(\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B\right)(2x + \sqrt{3}R)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2}} + \frac{2\left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)x}{\sqrt{x^2 + (y-R)^2}} \quad (16)$$

$$J_{22} = \frac{\left( \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2} - B \right) (2y + R)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2}} + \frac{2\left(\sqrt{x^2 + (y-R)^2} - B\right)(y-R)}{\sqrt{x^2 + (y-R)^2}} \quad (17)$$

Dla osiągnięcia szybkiej zbieżności metody Newtona-Raphsona duże znaczenie ma przyjęcie wartości początkowej zmiennej  $t$ , jak najbliższej rozwiązaniu. Można to osiągnąć poprzez uproszczenie układu równań (9) i rozwiązanie go ze względu na współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Przyjmując założenie upraszczające, że  $B=0$  oraz stosując dodatkowe podstawienie  $l_{ni}^2 = l_i^2 + A^2$ , układ równań (9) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} l_{n1} &= \sqrt{x^2 + (y-R)^2 + z^2} \\ l_{n2} &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2 + z^2} \\ l_{n3} &= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2 + z^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Przekształcając pierwsze równanie układu równań (18) ze względu na parametr  $z$  otrzymano:

$$z^2 = l_{n1}^2 - x^2 - (y-R)^2 \quad (19)$$

Po podstawieniu (19) do pozostałych dwóch równań układu (18) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} l_{n2} &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2 + l_{n1}^2 - x^2 - (y-R)^2} \\ l_{n3} &= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}R\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}R\right)^2 + l_{n1}^2 - x^2 - (y-R)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Rozwiązanie układu równań (20) ze względu na niewiadome  $x$  i  $y$  przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\sqrt{3}(l_{n2}^2 - l_{n3}^2)}{6R} \\ y &= -\frac{2l_{n1}^2 - l_{n3}^2 - l_{n2}^2}{6R} \end{aligned} \quad (21)$$

Po wykorzystaniu zależności (21) w równaniu (19) otrzymuje się zależność pozwalającą na wyznaczenie zmiennej  $z$ :

$$z = \sqrt{l_{n1}^2 - \frac{(l_{n2}^2 - l_{n3}^2)^2}{12R^2} - \left(\frac{2l_{n1}^2 - l_{n3}^2 - l_{n2}^2}{6R} + R\right)^2} \quad (22)$$

Równania (21) i (22) służą do wyznaczania wartości początkowych w metodzie Newtona-Raphsona. Są one również rozwiązaniem problemu kinematyki prostej uproszczonego modelu manipulatora. Fizyczna interpretacja powyższego uproszczenia oznacza, że osie członów pryzmatycznych 3 przechodzą bezpośrednio przez środek platformy P.

Badania symulacyjne opracowanej metody rozwiązywania zadania kinematyki prostej wykazały, że uzyskanie dokładności 1  $\mu\text{m}$  zajmuje nie więcej niż trzy kroki iteracji.

## 4 Podsumowanie

W artykule przedstawiono konstrukcję kinematyczną nowego manipulatora równoległego o trzech stopniach swobody, zbudowanego w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH. Wyprowadzono analityczne rozwiązanie zadania kinematyki odwrotnej dla tego manipulatora. Dla zadania prostego kinematyki przedstawiono metodę rozwiązania numerycznego z usprawnieniem pozwalającym na wykonanie części obliczeń analitycznie, co poprawia dokładność iteracji. Zaproponowana metoda wyznaczenia wartości początkowych dla algorytmu numerycznego pozwala na uzyskanie bardzo szybkiej zbieżności, co ma duże znaczenie w obliczeniach w czasie rzeczywistym np. w sterowaniu. Wykazano, co stanowi problem przy próbach analitycznego rozwiązania zadania prostego i podano interpretację fizyczną tego problemu.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych jako projekt badawczy 4 T07B 077 26

## Literatura

- [1] Carricato M., Parenti-Castelli V., A Family of 3-DOF Translational Parallel Manipulators. ASME J. Mech. Des, 125, pp. 302-307.
- [2] Craig, J.J., Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Addison-Wesley, 1989.
- [3] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody numeryczne. WNT, 1982.
- [4] Joshi S.A., Tsai L.-W., The Kinematics of a Class of 3-DOF, 4-Legged Parallel Manipulators. ASME J. Mech. Des, 125, pp. 52-60.
- [5] Karpień G., Petko M., Przegub obrotowy potrójny, Zgłoszenie patentowe nr P-363254
- [6] Karpień G., Petko M., Uhl T., Manipulator równoległy trzypięcienny, Zgłoszenie patentowe nr P-363255
- [7] Pierrot F., Reynaud C., Fournier A., DELTA: A Simple and Efficient Parallel Robot. Robotica, 8, pp. 105-109.
- [8] Steward D., A Platform with Six Degrees of Freedom. Proc. Inst. Mech. Eng., 180 (15), pp. 371-386
- [9] Tsai, L.-W., Robot Analysis: the Mechanics of Serial and Parallel Manipulators. John Wiley & Sons, 1999.
- [10] Tzafestas, S.G. and G.Schmidt (ed.), Progress in system and robot analysis and control design. Springer, 1999.

**Title:** Kinematics of the new type 3-DOF parallel manipulator.

Artykuł recenzowany