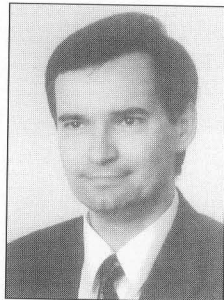


Paweł FOTOWICZ
GŁÓWNY URZĄD MIAR

Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o spłot rozkładu prostokątnego z normalnym

Paweł FOTOWICZ



Pracuje w Głównym Urzędzie Miar na stanowisku głównego specjalisty. Ukończył studia na Politechnice Warszawskiej w 1981 r. Do 1999 r. pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Warszawskiej na wydziale Mechatroniki, gdzie zajmował się problematyką laserowych technik pomiarowych, opracowując 6 patentów i publikując 25 artykułów i referatów naukowych dotyczących powyższych zagadnień. Obecnie zajmuje się problematyką niepewności pomiaru, której to tematyce poświęcił w ostatnich latach około 30 publikacji krajowych i zagranicznych.

uncert@gum.gov.pl

Streszczenie

Przedstawiono dwie metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Metody polegają na przybliżeniu nieznanego rozkładu wielkości mierzonej rozkładem typu PN, który jest spłotem pojedynczego rozkładu prostokątnego i normalnego. Metody można stosować gdy wielkości wejściowe opisane są rozkładem prostokątnym lub normalnym. Błąd metod przy wyznaczaniu współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95% na ogół zawarty jest w granicach $\pm 1\%$.

Abstract

Two methods for evaluation of coverage factor in procedure for calculating the uncertainty of measurement in calibration is presented. Methods based on approximation of unknown probability distribution of measurand by RN distribution. The RN distribution is a convolution of rectangular and normal distributions. Methods maybe applied when all input quantities have rectangular and normal distributions and coverage factor is corresponding to confidence level of 95%. The error of coverage factor corresponding to confidence level of 95% is usually $\pm 1\%$.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, rozkład prawdopodobieństwa, spłot, niepewność rozszerzona, współczynnik rozszerzenia

Keywords: uncertainty of measurement, probability distribution, convolution, expanded uncertainty, coverage factor

1. Wstęp

Metody obliczania współczynnika rozszerzenia potrzebne są tam, gdzie wymagana jest wysoka dokładność wyznaczenia niepewności rozszerzonej. Takimi sytuacjami są pomiary związane z wzorcowaniem. Dla każdego pomiaru wzorcującego wymagana jest odpowiednia procedura szacowania niepewności, zgodna z zaleceniami międzynarodowych organizacji metrologicznych [1]. Jednym z istotnych wymagań dotyczących tych procedur jest to, by współczynnik rozszerzenia zapewniał poziom ufności około 95%, dla wyznaczonej niepewności rozszerzonej związanej z wynikiem wzorcowania. Ten warunek nałożono na laboratoria pomiarowe wykonujące usługi metrologiczne związane z wzorcowaniem. Każde laboratorium powinno podawać wartość współczynnika w świadectwie wzorcowania.

Metody obliczania współczynnika rozszerzenia oparte na ogół są o spłot matematyczny funkcji gęstości prawdopodobieństwa składowych niepewności [2, 3]. Przy wzorcowaniu w większości procedur mamy do czynienia ze spłotem składowych, którym przypisano tylko rozkład normalny lub prostokątny. W takiej sytuacji można z wysoką dokładnością przybliżyć spłot wielu składowych rozkładem, będącym tylko spłotem pojedynczego rozkładu prostokątnego i normalnego. Dla takiego rozkładu można już bez większych komplikacji

obliczeniowych wyznaczyć na drodze numerycznej współczynnik rozszerzenia lub przybliżyć ten rozkład znanymi rozkładami prawdopodobieństwa, dla których współczynnik wyznaczany jest dokładnie.

2. Wielkość mierzona

Wielkość mierzona w procedurach szacowania niepewności na ogół przedstawia się w postaci następującego równania pomiaru

$$y = c_1 x_1 + \dots + c_N x_N \quad (1)$$

gdzie c_i to współczynniki wrażliwości, zazwyczaj będące stałymi, a x_i to wielkości wejściowe. Jeżeli wielkości wejściowe są niezależne, co na ogół ma miejsce, to rozkład wielkości wyjściowej jest spłotem rozkładów wielkości wejściowych. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wielkości mierzonej ma postać

$$g(y) = g_1(x_1) * \dots * g_N(x_N) \quad (2)$$

gdzie

$$g_i(x_i) * g_{i+1}(x_{i+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x_i) \cdot g_{i+1}(x-x_i) \cdot dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x-x_{i+1}) \cdot g_{i+1}(x_{i+1}) \cdot dx_{i+1} \quad (3)$$

a $g(x_i)$ to funkcje gęstości prawdopodobieństwa wielkości wejściowych.

Wynik pomiaru przy wzorcowaniu podajemy z niepewnością rozszerzoną dla poziomu ufności p około 95%. Dla tak przyjętego założenia można sformułować warunek matematyczny w postaci:

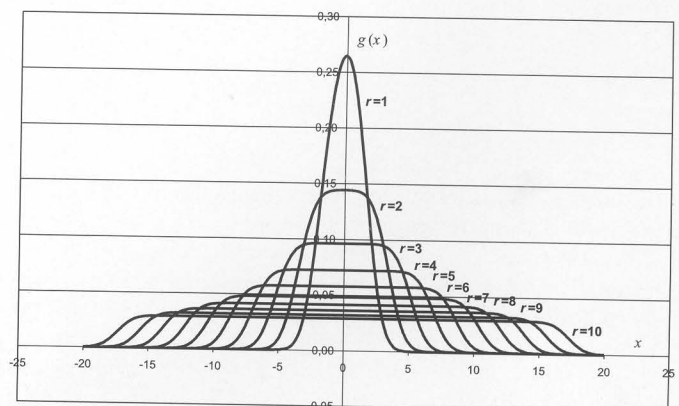
$$\int_{-U}^U g(y) \cdot dy = p \cong 95\% \quad (4)$$

gdzie $U = k \cdot u(y)$ jest niepewnością rozszerzoną, a k to współczynnik rozszerzenia.

Równanie powyższe można rozwiązać jedynie na drodze numerycznej, wykonując operację wielokrotnego spłotu matematycznego funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości wejściowych. Gdy wielkości wejściowe opisane są tylko rozkładami prostokątnymi i normalnymi to do opisu powyższego spłotu można wykorzystać jego zbieżność do rozkładu typu PN. Rozkładem typu PN można nazwać rozkład będący spłotem pojedynczego rozkładu prostokątnego i normalnego. Wówczas spełniona jest równość

$$g(y) = g_{PN}(x) \quad (5)$$

gdzie $g_{PN}(x)$ to funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu typu PN (rys. 1).



Rys. 1. Funkcje gęstości rozkładu typu PN dla różnych wartości parametru r
Fig. 1. Probability density functions for convolution of rectangular and normal distributions

3. Rozkład typu PN

Rozkład typu PN charakteryzuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$g_{PN}(x) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} \cdot r} \int_{x-\sqrt{3}r}^{x+\sqrt{3}r} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \quad (6)$$

gdzie r jest parametrem rozkładu określającym stosunek odchyień standardowych tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego [4], zdefiniowanym jako iloraz

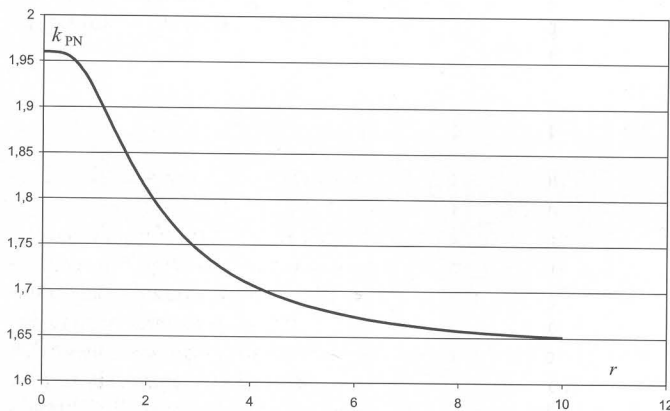
$$r = \frac{\sigma_P}{\sigma_N} \quad (7)$$

gdzie σ_P jest odchyleniem standardowym rozkładu prostokątnego, a σ_N odchyleniem standardowym rozkładu normalnego.

Współczynnik rozszerzenia dla omawianego rozkładu, dany jest funkcją

$$k_{PN} = f(r, p) \quad (8)$$

Funkcja k_{PN} nie ma postaci analitycznej lecz można ją wyznaczyć na drodze numerycznej (rys. 2). Dla poziomu ufności $p=95\%$ współczynnik przyjmuje wartości z przedziału od 1,6443 do 1,96.



Rys. 2. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładu typu PN przy poziomie ufności 95%

Fig. 2. Coverage factor for convolution of rectangular and normal distributions at confidence level of 95%

4. Sposoby wyznaczania współczynnika rozszerzenia

Zakładając, że rozkład wielkości mierzonej przybliżamy rozkładem typu PN należy wyznaczyć parametr r tego rozkładu, który dla określonego poziomu ufności pozwoli wyznaczyć wartość współczynnika rozszerzenia. Parametr rozkładu można wyznaczyć stosując przybliżenie

$$r = r_u \quad (9)$$

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \quad (10)$$

gdzie $u_i(y)$ - największy udział w niepewności złożonej wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym

Wykorzystuje się tu zasadę, że rozkład wielkości wyjściowej jest zbliżony do rozkładu typu PN niezależnie od liczby wielkości wejściowych, którym przypisano rozkłady prostokątne i normalne. Natomiast o parametrze r rozkładu PN decyduje składowa wielkości mierzonej o rozkładzie prostokątnym i największym udziale wśród wszystkich składowych prostokątnych.

Na podstawie układu składowych w budżecie niepewności należy wyznaczyć parametr r_u , a następnie można posłużyć się dwoma metodami wyznaczenia współczynnika rozszerzenia.

4.1. Pierwsza metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia

Metodę tą można nazwać metodą trzech rozkładów. Polega ona na przybliżeniu nieznanego współczynnika współczynnikami jak dla rozkładów: normalnego, trapezowego i prostokątnego [5]. Wybór odpowiedniego rozkładu zależy od wartości parametru r_u . Można to zapisać w postaci

$$\begin{aligned} k &= k_N \text{ dla } 0 < r_u < 1 \\ k &= k_T \text{ dla } 1 \leq r_u \leq 10 \\ k &= k_P \text{ dla } r_u > 10 \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: k_N - współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego, k_T - współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, k_P - współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}} (1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}) \quad (12)$$

$$k_P = \sqrt{3}p \quad (13)$$

4.2. Druga metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia

Metodę tą można nazwać metodą tablicową [6]. Polega ona na opracowaniu tabeli wartości współczynników rozszerzenia jakie może przyjmować on dla określonego poziomu ufności.

Przy podawaniu niepewności rozszerzonej wystarczającą dokładnością jest przedstawianie współczynnika z dwoma miejscami dziesiętnymi. Przybliżenie to zapewnia uzyskanie powtarzalnej wartości niepewności rozszerzonej z dwoma miejscami znaczącymi, jakie dla pomiarów wzorcujących zalecają międzynarodowe organizacje metrologiczne. Można zatem tablicować wartości jakie powinien przyjmować współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności 95% w zależności od wartości parametru r . Tablicę taką przedstawia tabela 1. Określa ona przy jakich granicach ilorazu udziału niepewności r_u następuje zmiana wartości współczynnika o 0,01 jego wartości.

Tabela 1. Wartości współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95% przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności
Table 1. Coverage factor for limits of uncertainty ratio at confidence level of 95%

k	r_u do wartości	k	r_u do wartości	k	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

5. Błąd metod

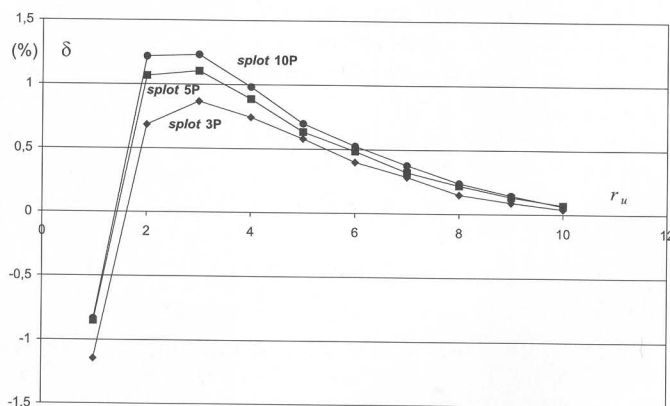
Błąd metod wyznaczania współczynnika rozszerzenia można przedstawić jako

$$\delta = \frac{k - k_{\text{splot}}}{k_{\text{splot}}} \quad (14)$$

gdzie k_{splot} to współczynnik rozszerzenia obliczony metodą wielokrotnego splotu rozkładów wielkości wejściowych.

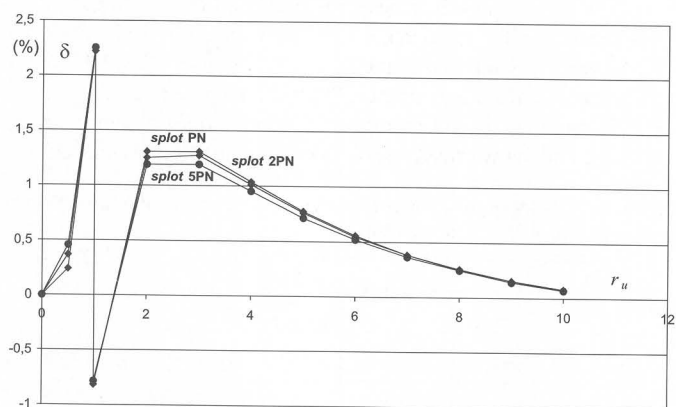
Błąd metod analizowano dla poziomu ufności 95%, w odniesieniu do wielokrotnego splotu rozkładów prostokątnych oraz splotu mieszanego rozkładów prostokątnych i normalnych.

Błąd pierwszej metody przedstawia rys. 3 i rys. 4. Największą wartość osiąga w odniesieniu do splotu rozkładów mieszanych prostokątnych i normalnych, dla których nie przekracza 2,5%. W pozostałych przypadkach splotu wielu rozkładów prostokątnych nie przekracza wartości 1,5%.



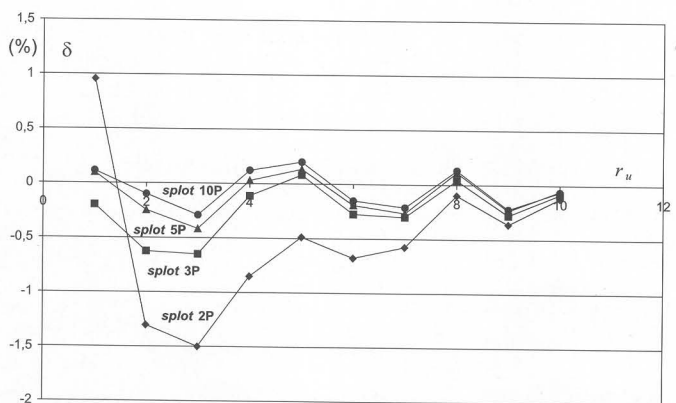
Rys. 3. Błąd pierwszej metody w odniesieniu do splotu trzech (3P), pięciu (5P) i dziesięciu (10P) rozkładów prostokątnych

Fig. 3. Error of first method in relation to convolution of three, five and ten rectangular distributions



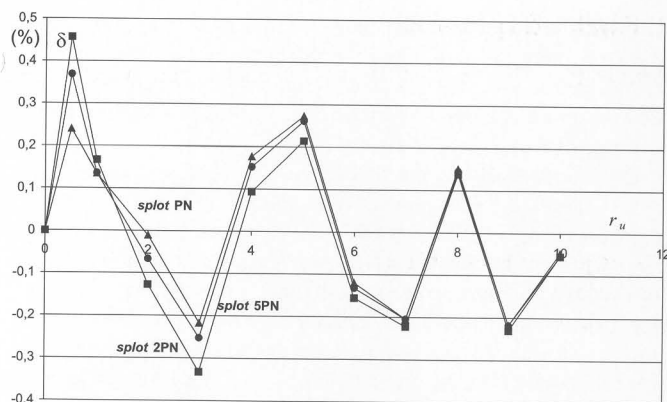
Rys. 4. Błąd pierwszej metody w odniesieniu do splotu pojedynczego (PN), podwójnego (2PN) i pięciokrotnego (5PN) rozkładów prostokątnego i normalnego

Fig. 4. Error of first method in relation to convolution of singly, double and five times rectangular and normal distributions



Rys. 5. Błąd drugiej metody w odniesieniu do splotu dwóch (2P), trzech (3P), pięciu (5P) i dziesięciu (10P) rozkładów prostokątnych

Fig. 5. Error of second method in relation to convolution of three, five and ten rectangular distributions



Rys. 6. Błąd drugiej metody w odniesieniu do splotu pojedynczego (PN), podwójnego (2PN) i pięciokrotnego (5PN) rozkładów prostokątnego i normalnego

Fig. 6. Error of second method in relation to convolution of singly, double and five times rectangular and normal distributions

Błąd drugiej metody przedstawia rys. 5 i rys. 6. Im większa jest liczba splatanych rozkładów tym mniejszy jest błąd metody. Największą wartość osiąga w odniesieniu do splotu dwóch rozkładów prostokątnych, dla których dochodzi do 1,5%. W pozostałych przypadkach splotu wielu rozkładów prostokątnych nie przekracza wartości 1%, w przypadku splotu mieszanego rozkładów prostokątnych i normalnych 0,5%.

6. Przykład zastosowania metod

Zastosowanie obu metod można prześledzić na przykładzie procedury wzorcowania kalibratora temperatury [1].

W trakcie wzorcowania mierzy się temperaturę, którą należy przypisać otworowi pomiarowemu kalibratora temperatury. Pomiar przeprowadza się po osiągnięciu przez wbudowany wskaźnik temperatury stabilnego wskazania o wartości 180,0°C. Temperaturę panującą w otworze pomiarowym określa się za pomocą wprowadzonego doń platynowego termometru rezystancyjnego, który pełni rolę wzorca roboczego. Wzorcowanie polega na pomiarze rezystancji elektrycznej termometru za pomocą mostka prądu przemiennego. Temperatura t_X , którą należy przyjąć jako temperaturę otworu pomiarowego w momencie, kiedy wskazanie wbudowanego termometru wynosi 180,0°C, dana jest następującym równaniem:

$$t_X = t_S + \delta t_S + \delta t_D + \delta t_{IX} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (15)$$

gdzie t_S - temperatura wskazana przez wzorec roboczy, której wartość wywodzi się z pomiaru rezystancji przy zasilaniu prądem zmiennym, δt_S - poprawka temperatury wynikająca z pomiaru rezystancji przy zasilaniu prądem zmiennym, δt_D - poprawka temperatury wynikająca ze zmiany wartości wzorca roboczego od czasu jego ostatniego wzorcowania (dryft), δt_{IX} - poprawka temperatury wynikająca z błędów nastawienia kalibratora temperatury, δt_R - poprawka temperatury wynikająca z występujących w kierunku promieniowym różnic temperatury między termometrem wbudowanym a wzorcem roboczym, δt_A - poprawka temperatury wynikająca z występującej w kierunku osiowym niejednorodności temperatury w otworze pomiarowym, δt_H - poprawka temperatury wynikająca z histerezy wskaźnika, δt_V - zmienność temperatury w czasie pomiaru.

Poniżej przedstawiono oszacowanie poszczególnych składowych niepewności.

Wzorec roboczy (t_S) - świadectwo wzorcowania termometru rezystancyjnego zastosowanego jako wzorec roboczy podaje zależność między rezystancją a temperaturą. Zmierzona wartość rezystancji odpowiada temperaturze równej 180,1°C, przy czym przypisana tej wartości niepewność rozszerzona pomiaru wynosi $U=30$ mK ($k=2$).

Wyznaczenie temperatury przez pomiar rezystancji (δt_s) - wartość temperatury zmierzona przez termometr rezystancyjny użyty jako wzorzec roboczy wynosi 180,1 °C. Niepewność standardowa pomiaru związana z pomiarem rezystancji i przeliczona na wartość temperatury wynosi $u(\delta t_s)=10$ mK.

Drift wskazania wzorca roboczego (δt_D) - na podstawie znajomości właściwości platynowych termometrów rezystancyjnych tego samego typu co wzorzec roboczy, zmianę wskazań będącą skutkiem starzenia rezystora, które nastąpiło od czasu ostatniego wzorcowania termometru, oszacowano na ± 40 mK.

Błąd nastawienia kalibratora temperatury (δt_X) - działka elementarna wbudowanego termometru kontrolnego kalibratora temperatury wynosi 0,1 K. Wyznacza ona granice rozdzielczości temperatury ± 50 mK, wewnątrz których zawiera się wskazanie określające jednoznacznie stan termodynamiczny bloku temperaturowego.

Niejednorodność pola temperaturowego w kierunku promieniowym (δt_R) - występująca w kierunku promieniowym różnicę temperatury między otworem pomiarowym a wbudowanym termometrem oszacowano jako znajdującą się w przedziale ± 100 mK.

Niejednorodność pola temperaturowego w kierunku osiowym (δt_V) - odchylenia temperatury będące skutkiem osiowej niejednorodności pola temperaturowego w otworze pomiarowym oszacowano na podstawie wskazań otrzymanych przy różnych głębokościach zanurzenia termometru, jako wartości leżące w przedziale ± 250 mK.

Efekt histerezy (δt_H) - odchylenie temperatury otworu pomiarowego będące skutkiem zjawiska histerezy określono na podstawie wskazań termometru odniesienia podczas cykli pomiarowych wykonanych zarówno przy temperaturze rosnącej, jak i malejącej. Wartości graniczne tego odchylenia oszacowano na ± 50 mK.

Niestabilność temperatury (δt_V) - zmiany temperatury wywołane jej niestabilnością podczas 30 minutowego cyklu pomiarowego oszacowano na zawarte w przedziale ± 30 mK.

Dwie pierwsze ze składowych niepewności mają rozkład normalny, pozostałe natomiast opisane są rozkładem prostokątnym. Wszystkie składowe zostały przedstawione w tabeli budżetu niepewności (tabela 2). Dla układu tych składowych wartość współczynnika rozszerzenia, liczona metodą dokładną, na podstawie wielokrotnej operacji splotu rozkładów wielkości wejściowych, wyniosła $k=1,8325$.

Tabela 2. Budżet niepewności kalibratora temperatury
Table 2. Uncertainty budget of a temperature block calibrator

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
t_s	180,1 °C	15 mK	normalny	1	15 mK
δt_s	0 °C	10 mK	normalny	1	10 mK
δt_D	0 °C	23 mK	prostokątny	1	23 mK
δt_X	0 °C	29 mK	prostokątny	1	29 mK
δt_R	0 °C	58 mK	prostokątny	1	58 mK
δt_A	0 °C	144 mK	prostokątny	1	144 mK
δt_H	0 °C	29 mK	prostokątny	1	29 mK
δt_V	0 °C	17 mK	prostokątny	1	17 mK
t_X	180,1 °C				164 mK

Składową o rozkładzie prostokątnym i największym udziale jest wielkość wejściowa związana z niejednorodnością pola temperaturowego w kierunku osiowym (δt_A), dla której udział wynosi 144 mK. Dla tej składowej iloraz udziału niepewności, obliczony na podstawie (10), wynosi $r_u=1,8304$.

Obliczając współczynnik rozszerzenia pierwszą z omawianych metod dochodzimy do wniosku, że najlepszym przybliżeniem rozkładu wielkości mierzonej jest rozkład trapezowy ze względu na to, iż iloraz udziału zawarty jest w przedziale od 1 do 10. Do obliczenia współczynnika ma zastosowanie w związku z tym wzór (12). Na jego podstawie wyliczamy, że $k=1,85$. W odniesieniu do wartości dokładnej, błąd współczynnika wyznaczony z zależności (14) wynosi $\delta=0,85\%$.

Obliczając współczynnik rozszerzenia drugą z omawianych metod odczytujemy na podstawie tabeli 1, że wartość współczynnika wynosi $k=1,83$. W odniesieniu do wartości dokładnej, błąd współczynnika w tym wypadku wynosi $\delta=-0,15\%$.

7. Podsumowanie

Przedstawione metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia przy wzorcowaniu pozwalają na określenie jego wartości z błędem w granicach do $\pm 2,5\%$. Przy czym druga z metod pozwala na zredukowanie błędu do granic $\pm 1,5\%$. W wielu jednak przypadkach rzeczywistych procedur błąd wyznaczenia współczynnika rozszerzenia na ogół nie przekracza $\pm 1\%$. Dowodzi tego zamieszczony przykład procedury szacowania niepewności dotyczącej kalibratora temperatury.

Obie metody mogą być z łatwością zastosowane do obliczania współczynnika rozszerzenia w procedurach realizowanych przy użyciu arkusza kalkulacyjnego. Odpowiednio bowiem zaprogramowany arkusz pozwala na automatyczne wybieranie odpowiedniej składowej o największym udziale i rozkładzie prostokątnym, co pozwala obliczyć odpowiednią wartości ilorazu udziału niepewności.

Metody można stosować dla dowolnej liczby wielkości wejściowych opisanych rozkładami normalnym lub prostokątnym. Zapewniają osiągnięcie przy obliczaniu niepewności rozszerzonej założonego poziomu ufności bliskiemu 95%, przyjętemu dla warunków wzorcowania.

Literatura

- [1] Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Dokument *European co-operation for Accreditation EA-4/02*, 1999.
- [2] C. F. Dietrich, Uncertainty, Calibration and Probability, The statistics of Scientific and Industrial measurement, Second edition, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1991.
- [3] D. Turzeniecka: Analiza dokładności wybranych przybliżonych metod oceny niepewności. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1999.
- [4] P. Fotowicz: Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym. PAR 2001, nr 5.
- [5] P. Fotowicz: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR 2001, nr 9.
- [6] P. Fotowicz: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR 2003, nr 10.

Title: Methods of the coverage factor evaluation basing on the convolution of rectangular and normal distributions