

**Stanisław BAŃKA, Paweł DWORAK**

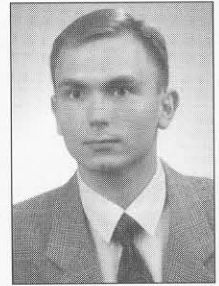
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ, ZAKŁAD AUTOMATYKI

**Sterowanie adaptacyjne w wielowymiarowych układach dynamicznych****Dr hab. inż. Stanisław BAŃKA, prof. PS**

Studia ukończył na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej w 1969 roku. W 1976 r. uzyskał stopień doktora nauk technicznych w Instytucie Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej. Stopień doktora habilitowanego w dyscyplinie automatyka i robotyka otrzymał w roku 1992 w Instytucie Badań Systemowych PAN w Warszawie. Profesor nadzwyczajny Politechniki Szczecińskiej i Uniwersytetu Szczecińskiego; specjalista z zakresu automatyki i informatyki. Specjalności naukowe: automatyka, informatyka, wielowymiarowe układy automatyki.

Autor 1 książki, 2 rozpraw naukowych, pakietu programów ASWUD/ASMSCS oraz ponad 60 artykułów i referatów naukowych opublikowanych w zagranicznych i krajowych czasopiśmie naukowych, a także w materiałach międzynarodowych i ogólnopolskich konferencji naukowo-technicznych. Współautor ponad 45 opracowań zespołowych wykonanych na rzecz gospodarki narodowej. Od 1969 roku zatrudniony w Politechnice Szczecińskiej jako nauczyciel akademicki. Pełnione funkcje: z-ca dyrektora Instytutu Automatyki Przemysłowej PS (1978-80) prodziekan ds. Nauki Wydziału Elektrycznego PS (1993-96), dziekan Wydziału Elektrycznego PS (1996-2002), obecnie dyrektor Instytutu. Członek Senatu Politechniki Szczecińskiej od 1993 r. Jest członkiem: PTETiS (od 1974), Szczecińskiego Towarzystwa Naukowego (1990), Polskiego Stowarzyszenia Pomiarów, Automatyki i Robotyki (POLSPAR) (1999), Komisji Cybernetyki Oddział PAN w Poznaniu (1996), Komitetu Automatyki i Robotyki PAN (od 1999), a także członkiem Rad Programowych: kwartalnika *Journal of Applied Mathematics and Computer Science* w Zielonej Górze (od 1996) i miesięcznika *Pomiary, Automatyka, Kontrola* (PAK) w Warszawie (od 2002). Wypromował jednego doktora.

banka@ps.pl

**Mgr inż. Paweł DWORAK**

Studia ukończył na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej w roku 1999 (kierunek Automatyka i Robotyka). Bezpośrednio po studiach podjął pracę asystenta w Zakładzie Automatyki Instytutu Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Obecnie jest studentem studiów doktoranckich dziennych na Wydziale Elektrycznym PS. Zajmuje się problemami analizy i syntezy wielowymiarowych układów sterowania.

Pawel.Dworak@ps.pl

*Placement*) jest sterowanie adaptacyjne obiektami o zmiennych parametrach. Rozwiązywanie względem pary niewiadomych wielomianów  $n(s)$  i  $m(s)$ , diofantycznego równania wielomianowego

$$n(s)b(s) + m(s)a(s) = q(s)c(s) \quad (1)$$

w którym wielomiany  $b(s)$  i  $a(s)$  o znanych (identyfikowanych na bieżąco) wartościach współczynników opisują skalarny obiekt  $n$ -tego rzędu w postaci transmitancji  $b(s)/a(s)$ , pozwala wyznaczać parametry regulatora modalnego w postaci transmitancji  $n(s)/m(s)$ , odpowiednio do zmian zachodzących w parametrach obiektu.

Prawą stroną powyższego równania jest iloczyn dwóch (stałych) zadawanych *a priori* stabilnych wielomianów  $q(s)$  i  $c(s)$ , które spełniają warunki Hurwitza (lub Schura dla układów z czasem dyskretnym). Miejsca zerowe wielomianu  $q(s)$  są biegunami obserwatora Luenbergera (pełnego rzędu  $n$  lub obserwatora funkcjonalnego o zredukowanym rzędzie  $n_1$ ), natomiast miejsca zerowe wielomianu  $c(s)$  są biegunami układu zamkniętego. Stałą lokalizacji obydwu zestawów biegunów dokonuje się w określonym obszarze lewej otwartej półpłaszczyzny  $s \in C$ , lub we wnętrzu koła jednostkowego płaszczyzny  $z \in C$ , przy czym dla biegunów obserwatora w układach ciągłych przyjmuje się zwykle wartości o rzeczywistych częściach bardziej ujemnych od wartości rzeczywistych biegunów układu zamkniętego. Dla układów z czasem dyskretnym są to wartości leżące bliżej środka koła jednostkowego płaszczyzny  $z \in C$ .

Rozwiązania równania (1), jeśli istnieją, w ogólności są niejednoznaczne [8, 9, 15], przy czym praktyczne znaczenie mają w zasadzie tylko rozwiązania minimalnego stopnia. Zwykle jest nim para wielomianów z wielomianem  $n(s)$  o najniższym stopniu. Liczba rozwiązań minimalnego stopnia w przypadku skalarnym zależy od stopni prawej i lewej strony równania (1). W przypadku gdy

$$\deg a(s) + \deg b(s) \geq \deg c(s) \quad (2)$$

rozwiązaniem minimalnym jest jedna para wielomianów  $n(s)$  i  $m(s)$ . Podobne zagadnienia, choć w zdecydowanie bardziej skomplikowanej formie, występują dla układów wielowymiarowych, które ogólnie mogą mieć niejednakową ( $m > l$ ,  $m < l$ ) i jednakową liczbę wejść i wyjść ( $m = l$ ).

**2. Przyjęte opisy układów wielowymiarowych**

W ujęciu wielomianowym opisem (w pełni sterowalnym i obserwowalnym) obiektów sterowania oraz dynamicznych układów sterujących nimi są macierze wymiernych transmitancji, przedstawionych w formie wielomianowych postaci frakcyjnych (MFD) (prawostronnie względnie pierwszych *p.w.p.* lub lewostronnie względnie pierwszych *l.w.p.*). W przypadku układów normalnych są to macierze transmitancji dla obiektu:

$$\begin{aligned} C(sI_n - A)^{-1}B + D &= B_1(s)A_1^{-1}(s) \\ &= A_2^{-1}(s)B_2(s) \end{aligned} \quad (3)$$

**Streszczenie**

W pracy omawia się problemy występujące przy projektowaniu i realizacji w dziedzinie czasowej adaptacyjnych układów sterowania w wielowymiarowych układach dynamicznych ze sprzężeniem zwrotnym, wykorzystujących technikę lokowania biegunów (z ang. *Pole Placement*). Na tle ogólnych wymagań stawianych wielowymiarowym układom ze sprzężeniem zwrotnym rozpatruje się przypadki sterowania modalnego z wykorzystaniem obserwatorów Luenbergera pełnego rzędu i obserwatorów funkcjonalnych zredukowanego rzędu. Podaje się sposoby projektowania regulatorów modalnych w dziedzinach operatorowych „*s*” lub „*z*” oraz ich realizacji w dziedzinach czasowych, przydatnych do celów sterowania adaptacyjnego. Całość rozważań ilustruje przykład obliczeniowy przeprowadzony dla obiektu 4 rzędu o 3 wejściach i 2 wyjściach.

**Abstract**

The paper deals with problems encountered when designing and implementing (in time domain) adaptive control systems in feedback multivariable dynamic systems employing the pole placement approach. Some cases of modal control using full-order and functional reduced-order Luenberger observers are considered against the background of general requirements that are imposed on multivariable feedback-based systems. Techniques for designing modal controllers in the *s*-domain or *z*-domain and their implementation in time-domain being suitable for adaptive control are given. The considerations are illustrated by an example of the design procedure carried out for a control plant of the 4th order with 3 inputs and 2 outputs.

**Słowa kluczowe:** Wielowymiarowe układy ze sprzężeniem zwrotnym, sterowanie adaptacyjne, sterowanie modalne, macierzowe równania wielomianowe

**Keywords:** Multivariable systems, feedback systems, adaptive control, pole placement, polynomial matrix equations.

**1. Wstęp**

Jednym z ważniejszych zastosowań teorii sterowania modalnego wykorzystującego technikę lokowania biegunów (z ang. *Pole*

i dla regulatora:

$$\begin{aligned} C_r(sI_n - A_r)^{-1}B_r + D_r &= M_2^{-1}(s)N_2(s) \\ &= N_1(s)M_1^{-1}(s) \end{aligned} \quad (4)$$

Występują w nich macierze: „mianownikowe”:  $A_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ ,  $A_2(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ ,  $M_1(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ ,  $M_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  oraz „licznikowe”:  $B_1(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$ ,  $B_2(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$ ,  $N_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$  i  $N_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$  z wielomianami od zmiennych zespolonych  $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$  - nad ciałem liczb rzeczywistych  $R$ . Dla układów z czasem dyskretnym będą to analogiczne zależności względem operatora  $z = \rho e^{j\theta} \in \mathbb{C}$ .

Jednym z możliwych sposobów przekształceń równań stanu i wyjść obiektu do opisów frakcyjnych (3) jest wykorzystanie zależności określonych twierdzeniem „strukturalnym” Wolovicha [13]. Zgodnie z nim odpowiednie macierze wielomianowe „mianownikowe” i „licznikowe” są określone wzorami:

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \hat{B}_m^{-1}[\text{diag}[s^{d_i}, i=1, \dots, m] - \hat{A}_m \hat{S}(s)] \\ B_1(s) &= \hat{C} \hat{S}(s) + D A_1(s) \end{aligned} \quad (5)$$

oraz

$$\begin{aligned} A_2(s) &= [\text{diag}[s^{\bar{d}_j}, j=1, \dots, l] - \bar{S}(s) A_1] \bar{C}_l^{-1} \\ B_2(s) &= \bar{S}(s) \bar{B} + A_2(s) D \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $\hat{A}_m$  i  $\hat{B}_m$  są macierzami liczbowymi utworzonymi z „nietrywialnych” wierszy macierzy  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  w drugiej postaci kanonicznej Brunowskiego-Luenbergera [8, 9].  $\hat{C}$  jest macierzą wyjściową przekształconego (kanonicznego) opisu obiektu. Podobnie macierze  $\bar{A}_l$  i  $\bar{C}_l$  są macierzami liczbowymi utworzonymi z „nietrywialnych” kolumn macierzy  $\bar{A}$  i  $\bar{C}$ , a  $\bar{B}$  jest macierzą wejściową przekształconego opisu obiektu w drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej. „Strukturalne” macierze wielomianowe  $\hat{S}(s)$  i  $\bar{S}(s)$  mają postaci:

$$\hat{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{d_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s & \dots & s^{d_m-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

i

$$\bar{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{\bar{d}_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s & \dots & s^{\bar{d}_l-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Przy wyznaczaniu opisu (5) ważną rolę odgrywiają indeksy sterowalności Kroneckera równe kolumnowym stopniom macierzy mianownikowych  $d_i = \deg_{ci} A_1(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, m$ . Natomiast przy wyznaczaniu opisu frakcyjnego (6) analogiczną rolę odgrywiają indeksy obserwowalności Kroneckera równe wierszowym stopniom  $\bar{d}_j = \deg_{rj} A_2(\cdot)$ ,  $j=1, 2, \dots, l$ .

Łatwo zauważyć, że dla tak wyznaczanych macierzy mianownikowych ich macierze współczynników wiodących (kolumnowych)

$$\Gamma_c(A_1(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_1(s) \text{diag}[s^{-d_i}, i=1, 2, \dots, m] \quad (9)$$

są nieosobliwe i mają postać lewego dolnego trójkąta natomiast nieosobliwe macierze współczynników wiodących (wierszowych)

$$\Gamma_r(A_2(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}[s^{-\bar{d}_j}, j=1, 2, \dots, l] A_2(s) \quad (10)$$

mają postać prawego górnego trójkąta. Dla układów z czasem dyskretnym są to macierze liczbowe wyznaczone z analogicznych zależności przy  $z \rightarrow \infty$ .

Ogólnie, jeśli macierze współczynników wiodących  $\Gamma_c(A_1(\cdot))$  i  $\Gamma_r(A_2(\cdot))$  macierzy wielomianowych prostokątnych są pełnego rzędu, to macierze wielomianowe  $A_1(\cdot)$  i  $A_2(\cdot)$  nazywamy odpowiednio: kolumnowo zredukowanymi i wierszowo zredukowanymi. Ponadto, gdy spełnione są warunki  $\deg_{ci} B_1(\cdot) \leq d_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  oraz

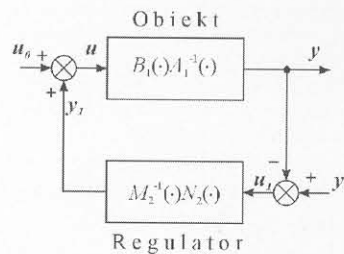
$\deg_{rj} B_2(\cdot) \leq \bar{d}_j$ ,  $j=1, 2, \dots, l$  to macierze transmitancji obiektu (3) nazywamy właściwymi (a przy znaku „ostrej” nierówności - ściśle właściwymi).

Podobne definicje i właściwości obowiązują dla opisów układów dynamicznych, będących regulatorami. Przy czym prawie jako reguła, przy rozwiązywaniu problemów w ujęciu wielomianowym występuje następująca prawidłowość. Jeśli obiekt opisywany jest macierzą transmitancji w postaci frakcyjnej prawostronnej, to elementy układu będące przedmiotem projektowania (kompensator/regulator, obserwator/filtr) poszukiwane są jako macierze transmitancji w postaci frakcyjnej lewostronnej i odwrotnie, gdy dana jest odpowiednia lewostronna postać frakcyjna jakiegoś elementu, to macierz transmitancji związanego z nim poszukiwanego elementu wyznaczana jest w postaci dualnej (prawostronnej).

### 3. Podstawowe cechy układów wielowymiarowych ze sprzężeniem zwrotnym

Układy sterowania modalnego są szczególnym przypadkiem wielowymiarowych układów ze sprzężeniem zwrotnym [1, 4, 7, 12].

Sygnały „zewnętrzne”  $u_0$  i  $y_0$  występujące w tym układzie można w praktyce interpretować odpowiednio jako: (znane) „nominalne” wartości wektora sygnałów sterujących obiektem (który najczęściej jest nieliniowy) oraz nominalne wartości wyjść obiektu (wektor wartości zadanych). Są to te wartości sygnałów dla których dokonuje się linearyzacji obiektu w „punkcie pracy” układu. Wektorowy sygnał  $u_1$  może być traktowany jako wektor odchyłek regulacji (wektorowy sygnał błędny).



Wektorowy sygnał  $u_1$  może być traktowany jako wektor odchyłek regulacji (wektorowy sygnał błędny).

Rys. 1. Wielowymiarowy układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym  
Fig. 1. Multivariable control feedback system.

Zadaniem liniowego regulatora adaptacyjnego jest zatem spowodowanie wyjść obiektu  $y$  do jego wartości nominalnych  $y_0$ . Odpowiada to w liniowych układach sterowania modalnego (i optymalnego LQ [3]), spowodowaniu „przyrostowych” wartości sygnałów wyjściowych (i wejściowych) obiektu do zera. Zmiany punktu pracy układu powodują zmiany parametrów liniowego modelu obiektu, do którego należy dobierać w sposób adaptacyjny nowe wartości parametrów regulatora.

Podstawowym wymaganiem, który powyższy układ musi spełnić jest jego stabilność. W układach wielowymiarowych mogą - częściej niż w układach jednowymiarowych - występować „redukowalne” (niesterowalne i nieobserwowalne) części układu. Takie redukowalne, niestabilne części układu, mogą uniemożliwić osiągnięcie realnej stabilności układu zamkniętego. Narzucenie warunków, w których niesterowalne i nieobserwowalne części układów będą stabilne, lub zagwarantowanie, aby w układzie w ogóle nie było części redukowalnych, prowadzi do sformułowania warunków stabilności „wewnętrznej” układów [5].

Drugim ważnym wymaganiem jest to, aby macierze transmitancji każdego dynamicznego elementu wchodzącego w strukturę projektowanego układu były macierzami transmitancji właściwych (lub ściśle właściwych). Wtedy każda z otrzymanych macierzy transmitancji będzie realizowalna fizycznie.

Określenie powyższych wymagań w ujęciu wielomianowym jest proste i prowadzi do sformułowania warunków „wewnętrznej” stabilności i „wewnętrznej” właściwości układu zamkniętego. Należy przy tym zauważyć, że stabilność „wewnętrzna” zawsze implikuje stabilność „zewnętrzna” układu, natomiast implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Łatwo wykazać, że opisem właściwości dynamicznych układu przedstawionego na rys. 1. są macierze transmitancji wiążące

sygnały zewnętrzne  $y_0$  i  $u_0$  z sygnałami  $u_1$  i  $u$  zgodnie z następującą zależnością

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u \end{bmatrix} = T(B_1, A_1, M_2, N_2) \begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie blokowa macierz transmitancji zapisana jest w formie (dwustronnej) wielomianowej reprezentacji frakcyjnej

$$T(B_1, A_1, M_2, N_2) = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1(\cdot) \\ A_1(\cdot) \end{bmatrix} \Delta^{-1}(\cdot) \begin{bmatrix} N_2(\cdot) & M_2(\cdot) \end{bmatrix} \quad (12)$$

z macierzą mianownikową  $\Delta(\cdot)$  układu zamkniętego spełniającą macierzowe (lewostronne) równanie wielomianowe

$$N_2(\cdot)B_1(\cdot) + M_2(\cdot)A_1(\cdot) = \Delta(\cdot) \quad (13)$$

Podobne (dualne) zależności otrzyma się przyjmując, że obydwa elementy tego samego układu z rys. 1. będą opisane za pomocą wielomianowych opisów frakcyjnych, odpowiednio: lewostronnych dla obiektu i prawostronnych dla kompensatora (regulatora) [1, 5].

Zgodnie z twierdzeniami podanymi w [5] (i [1]), warunkami koniecznymi i wystarczającymi istnienia regulatora w postaci frakcyjnej l.w.p.  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  dla którego układ z rys. 1. z obiektem opisanym p.w.p. reprezentacją frakcyjną będzie „wewnętrznie” stabilny, są:

- względna (prawostronna i lewostronna) pierwszość odpowiednich par bloków macierzy wielomianowych występujących w części frakcyjnej zależności (12),
  - istnienie rozwiązania macierzowego równania wielomianowego (13) dla pewnej, spełniającej warunki Hurwitza (odpowiednio, warunki Schura dla układów z czasem dyskretnym), macierzy wielomianowej  $\Delta(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ , kolumnowo-wierszowo zredukowanej.
- Wymaganie „wewnętrznej” właściwości układu jest spełnione jeśli macierz transmitancji kompensatora  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  jest macierzą transmitancji właściwych z macierzą mianownikową  $M_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  wierszowo zredukowaną i wierszowych stopniach  $\deg_n M_2(\cdot) = r_i$ ,  $i=1, \dots, m$ , oraz  $\deg_n N_2(\cdot) \leq r_i$ . Przy czym, w przypadku gdy obiekt jest opisywany macierzą transmitancji ściśle właściwych, ten warunek jest warunkiem koniecznym i wystarczającym.

Należy zauważyć, że macierz mianownikowa układu  $\Delta(\cdot)$  występująca po prawej stronie macierzowego równania wielomianowego (13) nie tylko musi być stabilna (tj. spełniać warunki Hurwitza lub Schura) ale powinna być macierzą wielomianową wierszowo-kolumnowo zredukowaną, tzn. muszą istnieć wierszowe  $\bar{k}_i > 0$  i kolumnowe  $k_i > 0$  indeksy, takie, że spełniona jest zależność

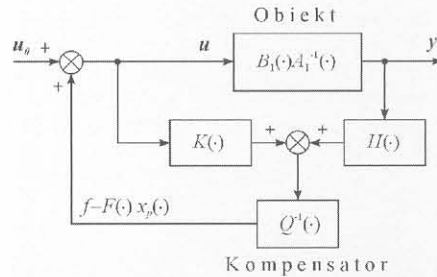
$$\Delta(s) = \text{diag}[s^{\bar{k}_i}] \Delta_b(s) \text{diag}[s^{k_i}], i=1, 2, \dots, m \quad (14)$$

gdzie  $\Delta_b(s)$  jest macierzą transmitancji wymiernych podwójnie właściwych (z ang. *biproper* lub *bicausal*), tj. taką dla których macierz ta, jak i odwrotna do niej  $\Delta_b^{-1}(s)$  - są właściwe. Struktura wierszowo-kolumnowa tej macierzy wpływa zasadniczo na ilość i „jakość” rozwiązań macierzowego równania wielomianowego (13). Prawidłowy dobór macierzy  $\Delta(\cdot)$  wierszowo-kolumnowo zredukowanej, jest przedmiotem badań w niniejszej pracy.

#### 4. Projektowanie układów sterowania modalnego

Korzystając z idei przesuwania (lokowania) biegunów układu zamkniętego w stabilne obszary zmiennej zespolonej „s” (lub „z”) za pomocą bezpośredniego (statycznego) sprzężenia zwrotnego od wektora stanu obiektu można określić macierz sprzężeń zwrotnych  $F$  dla której sprzężenie zwrotne  $u = -Fx$  daje możliwość „przesunięcia” biegunów układu zamkniętego w dowolny rejon płaszczyzny „s” (lub „z”), o ile obiekt jest w pełni sterowalny [8]. Przy braku dostępności pomiarowej wektora stanu obiektu  $x$  sprzężenie to może być

zastąpione sprzężeniem  $u = -Fz$ , gdzie  $z$  jest wektorem stanu obserwatora Luenbergera pełnego rzędu  $n$  lub funkcjonalnym obserwatorem o zredukowanym rzędzie  $n_1 < n$ . Strukturę takiego układu



w ujęciu wielomianowym (zwanego kompensatorem Wolowicha [13]) przedstawia schemat blokowy na rys. 2.

Rys. 2. Struktura układów sterowania modalnego z wykorzystaniem obserwatorów Luenbergera

Fig. 2. Structure of modal control systems using Luenberger observers

Na schemacie tym macierze transmitancji obserwatora w ujęciu wielomianowym przedstawiane są za pomocą „trójki” macierzy wielomianowych  $Q(s)$ ,  $H(s)$  i  $K(s)$  zgodnie z zależnością:

$$f = Q^{-1}(s)K(s)u + Q^{-1}(s)H(s)y \quad (15)$$

gdzie dla obserwatora pełnego rzędu (i w realizacji standardowej z wykorzystaniem „kopii” obiektu) odpowiednie macierze transmitancji są określone jako

$$Q^{-1}(s)K(s) = -F(sI_n - A + LC)^{-1}(B - LD) \quad (16)$$

i

$$Q^{-1}(s)H(s) = -F(sI_n - A + LC)^{-1}L \quad (17)$$

Są one zawsze ściśle właściwe.

Projektowanie układu pełnego rzędu (z tożsamościowym obserwatorem Luenbergera) w ujęciu wielomianowym i z wykorzystaniem „strukturalnych” właściwości opisów (5) i (6) jest bardzo proste. Dla otrzymania układu zamkniętego o z góry zadanych (stabilnych) wartościach biegunów wystarczy wygenerować diagonalną macierz o stopniach zgodnych z indeksami sterowalności obiektu (oraz macierzą kolumnowych współczynników wiodących  $\Gamma_c(C_d(\cdot)) = I_m$ ). W przypadku układów ciągłych będzie to

$$C_d(s) = \text{diag}[c_i(s), i=1, 2, \dots, m] \quad (18)$$

gdzie:

$$c_i = \prod_{j=1}^{d_i} (s - s_j) \quad (19)$$

Otrzymaną macierz mnożymy lewostronnie przez macierz liczbową  $X = \Gamma_c(A_1(\cdot))$ , skąd otrzyma się macierz wielomianową

$$C_1(\cdot) = X C_d(\cdot) \quad (20)$$

o kolumnowej strukturze w pełni zgodnej ze strukturą macierzy mianownikowej obiektu  $A_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ . Można ją wykorzystać do obliczenia macierzy  $F$  (i  $F(\cdot)$ ) potrzebnych do ulokowania biegunów układu zamkniętego zgodnie z zależnością

$$-F\hat{T}\hat{S}(\cdot) = -F(\cdot) = C_1(\cdot) - A_1(\cdot) \quad (21)$$

gdzie  $\hat{T}$  jest (nieosobliwą) macierzą przekształcenia oryginalnych (wyjściowych) równań stanu i wyjść obiektu do drugiej postaci kanonicznej sterowalnej.

Podobnie na podstawie znajomości wskaźników obserwowalności  $\bar{d}_j$ ,  $j=1, \dots, l$  obiektu można wyznaczyć diagonalną macierz

$$\bar{C}_d(s) = \text{diag}[\bar{c}_i(s), i=1, 2, \dots, l] \quad (22)$$

gdzie

$$\bar{c}_i(s) = \prod_{j=1}^{\bar{d}_i} (s - s_j) \quad (23)$$

dla przyjętych (stabilnych) wartości biegunów  $s_j$  obserwatora. Macierz tą mnożymy prawostronnie przez macierz liczbową  $Y = \Gamma_r(A_2(\cdot))$ , otrzymując

$$C_2(\cdot) = \bar{C}_d(\cdot)Y \quad (24)$$

z której, w sposób dualny wyznacza się macierz „wzmocnień”  $L$  obserwatora Luenbergera ze wzoru:

$$\bar{S}(\cdot)\bar{T}L = C_2(\cdot) - A_2(\cdot) \quad (25)$$

gdzie  $\bar{T}$  jest (nieosobliwą) macierzą przekształcenia oryginalnych (wyjściowych) równań stanu i wyjść obiektu do postaci kanonicznej obserwowalnej.

Realizacja „standardowa” regulatora modalnego z kopią obiektu jest określona równaniami stanu i wyjść tak jak w równaniu (4) z macierzami

$$\begin{aligned} A_r &= A - LC - (B - LD)F \\ B_r &= L \\ C_r &= -F \\ D_r &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Zaletą tego regulatora jest to, że oprócz funkcji regulacyjnych „odtworza” on także współrzędne stanu obiektu poprzez współrzędne stanu obserwatora  $z(t) \rightarrow x(t)$ . Możliwa jest też realizacja „kanoniczna” tego regulatora z macierzami  $A_r, B_r, C_r$  w drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej. Będzie on spełniał w taki sam sposób wszystkie funkcje regulacyjne jak regulator „standardowy”, jednak ze względu na inną swoją strukturę wewnętrzną nie będzie on „odtworzał” wektora stanu obiektu  $x(t)$ .

Łatwo sprawdzić, że macierze transmitancji (16) i (17), określone zgodnie z wymaganiami twierdzenia „strukturalnego” Wolovicha, spełniają macierzowe równanie wielomianowe

$$H(\cdot)B_1(\cdot) + K(\cdot)A_1(\cdot) = Q(\cdot)F(\cdot) \quad (27)$$

które w świetle zależności (21) jest w pełni równoważne macierzowemu (lewostronnemu) równaniu wielomianowemu (13), gdzie:

$$\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot), M_2(\cdot) = Q(\cdot) - K(\cdot), N_2(\cdot) = -H(\cdot) \quad (28)$$

Należy zauważyć, że struktura macierzy wielomianowej  $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$ , będącej prawą stroną równania (13), w pełni odpowiada warunkom twierdzenia cytowanego w p. 3. Macierz ta jest wierszowo-kolumnowo zredukowana z indeksami wierszowymi:  $\bar{k}_i = \bar{r}_i = \deg_{ri} Q(\cdot) = \deg_{ri} M_2(\cdot)$  i kolumnowymi  $k_i = d_i = \deg_{ci} C_1(\cdot) = \deg_{ci} A_1(\cdot)$ . Macierz współczynników wiodących macierzy  $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$  spełnia wtedy zależność  $\Gamma(\Delta(\cdot)) = \Gamma_r(M_2(\cdot))\Gamma_c(A_1(\cdot))$ . Można także zauważyć, że wierszowe stopnie  $\bar{r}_i$  macierzy  $Q(\cdot)$  są równe wskaźnikom obserwowalności Kroneckera pary macierzy  $A - LC$  i  $-F$  (a także wskaźnikom obserwowalności pary  $A_r$  i  $C_r$  realizacji (26) regulatora pełnego rzędu).

Jeśli parametry sterowanego obiektu są zmienne, to zmieniają się również macierze  $F$  i  $L$  przy założonych, (niezmiennych) wartościach biegunów dla układu zamkniętego i obserwatora, co powoduje zmiany w macierzy  $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$ . Zmiany te dotyczą nie tylko wartości współczynników obydwu macierzy  $Q(\cdot)$  i  $C_1(\cdot)$ , ale także jej struktury. Widoczne jest, że rozwiązywanie macierzowego równania wielomianowego (13) - przy ustalonej niezmiennionej strukturze i wartościach współczynników macierzy  $\Delta(\cdot)$  - może dawać wyniki, dla których regulatory mogą nie być właściwe. W przypadkach, gdy zmiany parametrów obiektu będą tak duże, że naruszają strukturę kolumnową macierzy  $A_1(\cdot)$  rozwiązywanie tych równań przy nieodpowiednim „dopasowaniu” prawej strony do zmian występujących po jego lewej stronie, może być nawet pozbawione sensu, ponieważ otrzymane rozwiązania mogą generować regulatory opisane macierzami transmitancji niewłaściwych (nierealizowalnych fizycznie).

Jeśli do sterowania obiektem korzystać się będzie z regulatora modalnego, zbudowanego na bazie zredukowanego obserwatora funkcjonalnego, sytuacja jest nieco inna. Przykładem może być kompensator Wolovicha [13], rzędu  $n_i = m(v-1)$ , gdzie  $v = \max\{\bar{d}_j, j=1,2,\dots,l\}$ , o strukturze jak przedstawiono na rys. 2. Dla takiego kompensatora (i regulatora) macierz  $Q(\cdot)$  jest dobierana w (regularnej) postaci tj. o jednakowych stopniach wierszowych  $r_i = \bar{k}_i = v - 1$  i wartościach jej współczynników wielomianowych zależnych wyłącznie od zadawanych (stabilnych) wartości biegunów obserwatora. Dla układów z czasem ciągłym ma ona postać:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s^{v-1} & 0 & \dots & 0 & q_{1m}(s) \\ -1 & s^{v-1} & \dots & 0 & q_{2m}(s) \\ 0 & -1 & \dots & 0 & q_{3m}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & s^{v-1} + q_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\text{gdzie: } q_{im}(s) = \sum_{j=0}^{v-2} a_{(i-1)(v-1)} s^j, i=1,2,\dots,m \quad (30)$$

i swobodnie zadawanym wyznaczniku

$$\begin{aligned} \det Q(s) &= a_0 + a_1 s + \dots + a_{mv-m-1} s^{mv-m-1} + s^{m(v-1)} = \\ &= \prod_{i=1}^{n_i} (s - s_i) \end{aligned} \quad (31)$$

Taką samą strukturę macierzy  $Q(z)$  można przyjmować dla układów z czasem dyskretnym. Wtedy dopóki zmiany wartości parametrów obiektu nie naruszają struktury macierzy  $A_1(\cdot)$  i będzie zachowana zgodność struktury lewej i prawej strony równania (13), to jego rozwiązania (minimalnego stopnia) będą dawały właściwe macierze transmitancji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ . Niestety rząd  $n_i = m(v-1)$  tego typu kompensatorów (i regulatorów) przy dużej liczbie wejść  $m$  obiektu i mocno zróżnicowanych wierszowych stopniach  $\bar{d}_j$  macierzy  $A_2(\cdot)$ , może być większy niż rząd obiektu, co czyni wynik projektowania mało przydatnym w praktyce [11, 13]. Realizacje „czasowe” takiego (zredukowanego) regulatora w drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej jego równań stanu i wyjść, mają zwykle macierz tranzycyjną  $D_r \neq 0$ .

## 5. Przykład

Jako obiekt sterowania adaptacyjnego przyjęto (niestabilny i niemiinalnofazowy), ciągły układ dynamiczny rzędu  $n = 4$  o  $m = 3$  wejściach i  $l = 2$  wyjściach, opisany równaniami stanu i wyjść

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} \end{bmatrix}$$

Dla zilustrowania przedstawionych powyżej rozważań przyjęto, że w obiekcie tym zmieniać się będą (skokowo) parametry  $a_{41}$  i  $d_{23}$ . Zakładając, że parametry te przyjmować wartości:

- $a_{41} = -2, d_{23} = 0$
- $a_{41} = -2, d_{23} = 1$
- $a_{41} = 2, d_{23} = 1$

otrzymano:

$$\begin{aligned} \text{Model (a)} \\ B_1(s) &= \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2-s & 0 & s-1 \\ -4 & s & 0 \\ 2 & -1 & s-3 \end{bmatrix} \\ A_2(s) &= \begin{bmatrix} s^2-3s & 0,5s-1 \\ 4s-4 & s^2-s \end{bmatrix}, B_2(s) = \begin{bmatrix} s-3 & 1,5 & s+1 \\ 8 & s-1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Model (b)

$$B_1(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & s-3 \end{bmatrix}, \quad A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2-s & 0 & s-1 \\ -4 & s & 0 \\ 2 & -1 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} s^2-3s & 0,5s-1 \\ 4s-4 & s^2-s \end{bmatrix}, \quad B_2(s) = \begin{bmatrix} s-3 & 1,5 & 1,5s \\ 8 & s-1 & s^2-s \end{bmatrix}$$

Model (c)

$$B_1(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & s-3 \end{bmatrix}, \quad A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2-s-4 & 0 & s-1 \\ 4 & s & 0 \\ -2 & -1 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} s^2+3s-12 & 1,5s-7 \\ -12s+28 & s^2-7s+16 \end{bmatrix}, \quad B_2(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 2,5 & 2,5s \\ -8 & s-7 & s^2-7s \end{bmatrix}$$

Należy zauważyć, że mimo dużych zmian wartości współczynników w poszczególnych wielomianach struktura (kolumnowa i wierszowa) macierzy „mianownikowych” obiektu jest niezmienna, przy czym ich macierze współczynników wiodących przyjmują odpowiednio wartości:

$$\Gamma_c(A_1(s)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Gamma_r(A_2(s)) = I_2$$

Przyjmując dwa zestawy (stabilnych) wartości biegunów odpowiednio dla zamkniętego układu regulacji modalnej

$$s_{1,2} = -1 \pm j1, \quad s_3 = -2, \quad s_4 = -1$$

i dla obserwatora Luenbergera pełnego rzędu

$$s_{1,2} = -2 \mp j1, \quad s_3 = -5, \quad s_4 = -10$$

wygenerowano zgodnie z przedstawionym w p. 4. sposobem postępowania macierze wielomianowe:

$$C_1(s) = \begin{bmatrix} s^2+2s+2 & 0 & s+1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{i} \quad C_2(s) = \begin{bmatrix} s^2+4s+5 & 0 \\ 0 & s^2+15s+50 \end{bmatrix}$$

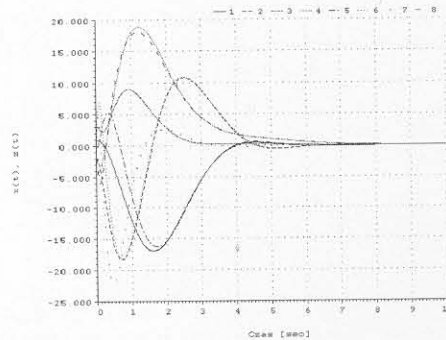
dla których zgodnie z zależnościami (21) i (25) otrzymano dla „standardowej” realizacji układu pełnego rzędu, trzy zestawy wartości macierzy sprzężeń zwrotnych  $F$  i macierzy „wzmocnień” tożsamościowego obserwatora  $L$ . Są to odpowiednio:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -2 & -5,25 \\ -5 & 22,25 \\ 4 & 37 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$$

oraz dla modelu (c)

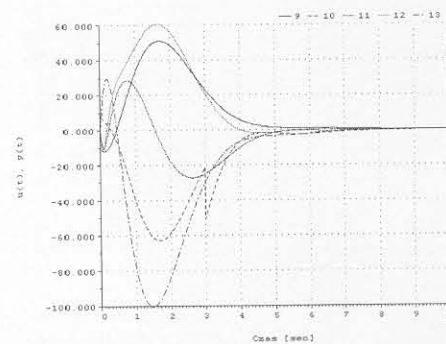
$$F = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 8 & 22,25 \\ 25 & 64,75 \\ -20 & -67 \\ -8 & -22 \end{bmatrix}$$

Wyniki symulacji układu sterowania adaptacyjnego z regulatorem pełnego rzędu, zrealizowanego w wersji „standardowej” zgodnie z zależnościami (26) przedstawiono na rys. 3 i 4.



Rys. 3. Przebiegi współrzędnych stanu obiektu i regulatora w układzie regulacji adaptacyjnej przy standardowej realizacji regulatora.

Fig. 3. State vector components of the plant and the controller in an adaptive control system using a standard time-domain realization of the controller.



Rys. 4. Przebiegi sygnałów sterujących i wyjść obiektu w układzie regulacji adaptacyjnej przy standardowej realizacji regulatora.

Fig. 4. Components of the plant's input and output signals in an adaptive control system using a standard time-domain realization of the controller.

Projektując ten sam układ poprzez rozwiązywanie macierzewego równania wielomianowego (13) z prawą stroną tego równania określoną przez macierz  $\Delta(s) = Q(s)C_1(s)$ , w której  $Q(s)$  - dla układu pełnego rzędu, przy nieziennej macierzy  $C_1(s)$  - przyjmowała za każdym razem strukturę i wartości takie, jakie można uzyskać za pomocą zależności: (16) i (17) w realizacjach standardowych, otrzymano:

- dla układu pełnego rzędu z modelami obiektu (a) i (b)

$$\Delta_I(s) = \begin{bmatrix} s^4 + 15,954s^3 + \dots & 9,075s + 18,151 & s^3 + 14,954s^2 + \dots \\ -1,662s^3 + \dots & s^2 + 2,056s + \dots & -1,662s^2 + \dots \\ 0,466s^3 + \dots & -1,922s - 3,844 & 1,466s^2 + \dots \end{bmatrix}$$

- i z modelem obiektu (c)

$$\Delta_{II}(s) = \begin{bmatrix} s^4 + 17,823s^3 + \dots & -19,721s - 39,442 & s^3 + 16,823s^2 + \dots \\ 0,8234s^3 + \dots & s^2 + 4,762s + \dots & 0,8234s^2 + \dots \\ 0,4057s^3 + \dots & 0,3171s + 0,634 & 1,4058s^2 + \dots \end{bmatrix}$$

Są one macierzami wierszowo-kolumnowo zredukowanymi o indeksach „wierszowych”  $\bar{k}_1 = \deg_n Q(s) = 2$ ,  $\bar{k}_2 = \deg_n Q(s) = 1$  i  $\bar{k}_3 = \deg_n Q(s) = 1$  oraz „kolumnowych”  $k_1 = d_1 = 2$ ,  $k_2 = d_2 = 1$ ,  $k_3 = d_3 = 1$ .

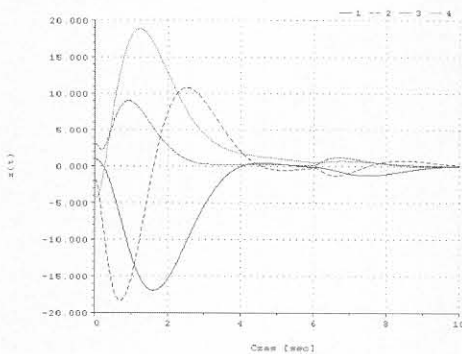
Dla układu ze zredukowanym regulatorem  $n_1 = m(v-1) = 3$  przyjęto macierz regularną  $Q(s)$  zgodnie ze strukturą opisaną zależnościami (29)-(31), przyjmując jako zadane wartości dla biegunów obserwatora pierwsze trzy wartości  $s_{1,2} = -2 \mp j1$  i  $s_3 = -5$ . Dla tak przyjętej macierzy  $Q(s)$  otrzymano

$$\Delta_{III}(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 2s^2 + 2s & 0 & s^2 + 26s + 25 \\ -s^2 - 2s - 2 & s^2 + 2s & 24s + 24 \\ 0 & -s - 2 & s^2 + 10s + 9 \end{bmatrix}$$

obowiązującą dla modeli (a), (b) i (c) obiektu. Jest ona macierzą wierszowo-kolumnowo zredukowaną, co łatwo można sprawdzić analitycznie.

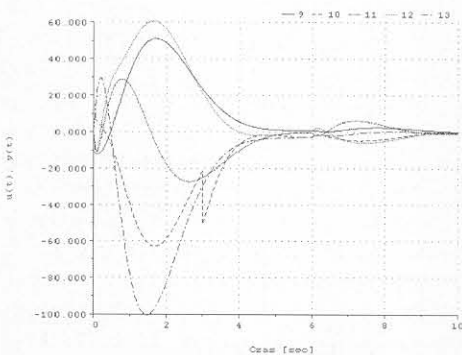
Rozwiązania macierzewego równania wielomianowego (13), dla układów pełnego rzędu i przy pełnej „strukturalnej” zgodności prawej i lewej strony równania, dały regulatory (ściśle właściwe) o identycznych właściwościach „wejściowo-wyjściowych” jak regulatory „standardowe”.

Wyniki symulacji układu sterowania adaptacyjnego z regulatorami zrealizowanymi w formie równań stanu i wyjść w drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej przedstawiono na rys. 5 i 6.



**Rys. 5.** Przebiegi współrzędnych stanu obiektu w układzie regulacji adaptacyjnej pełnego rzędu przy „kanonicznej” realizacji regulatora.

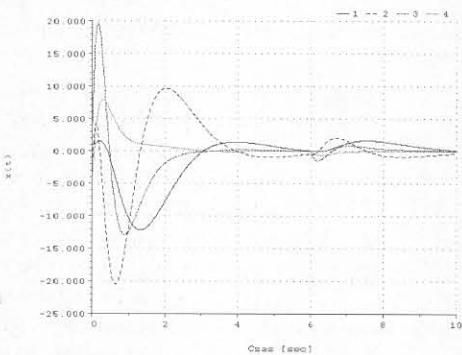
**Fig. 5.** State vector components of the plant in an adaptive control system using a „canonic” time-domain realization of the full-order controller.



**Rys. 6.** Przebiegi sygnałów sterujących i wyjść obiektu w układzie regulacji adaptacyjnej pełnego rzędu przy „kanonicznej” realizacji regulatora.

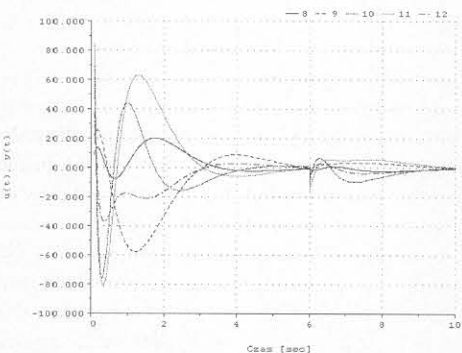
**Fig. 6.** Components of the plant’s input and output signals in an adaptive control system using a „canonic” time-domain realization of the full-order controller.

Natomiast przebiegi symulacyjne układu adaptacyjnego z regulatorem zredukowanym dla takiego samego przebiegu zmian parametrów obiektu jak poprzednio, przedstawiono na rys. 7 i 8.



**Rys. 7.** Przebiegi współrzędnych stanu obiektu w układzie regulacji adaptacyjnej z regulatorem zredukowanym.

**Fig. 7.** State vector components of the plant in an adaptive control system using a reduced-order controller.



**Rys. 8.** Przebiegi sygnałów sterujących i wyjść obiektu w układzie regulacji adaptacyjnej z regulatorem zredukowanym.

**Fig. 8.** Components of the plant’s input and output signals in an adaptive control system using a reduced-order controller.

Nieznaczne różnice pomiędzy przebiegami na rys. 3 i 5 oraz 4 i 6 uzyskanymi podczas symulacji w przypadku realizacji „kanonicznej” regulatora w układzie pełnego rzędu wynikają z innej struktury wewnętrznej regulatora. Na wszystkich wykresach proces „adaptacji” symulowanego układu polegał na pełnej zamianie wszystkich wartości parametrów regulatora i obiektu w sekwencji (a), (b), (c) odpowiednio po 3 i po 6 sekundach symulacji. Rozpoczęcie symulacji odbywało się z modelem (a) przy niezerowych warunkach początkowych dla obiektu i zerowych dla regulatora.

Próby rozwiązywania równania (13) dla modeli obiektu (a) i (b) przy prawej stronie równania z podstawionymi wartościami macierzy  $\Delta_H(s)$  oraz dla modelu (c) przy prawej stronie równania z podstawioną macierzą  $\Delta_I(s)$ , dały inne regulatory z macierzami transmutacji  $M_2^{-1}(s)N_2(s)$ , które nie były już ściśle właściwe, ale z wierszowo zredukowanymi macierzami mianownikowymi  $M_2(s)$ . Macierze współczynników wiodących (wierszowe)  $\Gamma_r(M_2(s))$  nie miały już jednak postaci prawego górnego trójkąta i nie można było do wyznaczenia realizacji czasowych wykorzystać bezpośrednio zależności wynikających z twierdzenia strukturalnego Wolovicha.

Po dokonaniu dodatkowego przekształcenia otrzymanych rozwiązań do pełnej zgodności „strukturalnej” jak w równaniach (6), otrzymano realizacje regulatorów w drugiej postaci obserwowalnej, które charakteryzowały się tym, że występowała w nich zawsze macierz tranzycyjna  $D_r \neq 0$  oraz dodatkowy człon proporcjonalny opisany kwadratową macierzą liczbową  $P$  na wyjściu regulatora. Symulacje komputerowe tego rodzaju układów ze sprzężeniem zwrotnym wymagają dodatkowych zabiegów, aby możliwe było zrealizowanie obliczeń w pętli algebraicznej [2, 14]. Z tego powodu symulacji układu zamkniętego z regulatorami pełnego rzędu dokonano jedynie dla modelu obiektu (a) (ściśle właściwego). Każda wyznaczona realizacja regulatora współpracująca z modelem obiektu (a) dawała stabilne przebiegi regulacji.

## Literatura

- [1] S. Bańka: Komputerowa synteza złożonych wielowymiarowych układów automatycznego sterowania w ujęciu wielomianowym. *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej*, Instytut Automatyki Przemysłowej, Nr 454/14, Szczecin 1991.
- [2] S. Bańka: Symulacja cyfrowa układów dynamicznych z algebraicznymi pętlami sprzężeń zwrotnych. *Prace IX Sympozjum „Symulacja procesów dynamicznych”*, Zakopane 10-14.06.1996, s.65-70.
- [3] S. Bańka: A simple method for solving the LQG stochastic control problem using a polynomial approach. *Circuits Systems Signal Process*, Vol. 14, No. 1, 1995, pp. 57-67.
- [4] S. Bańka: Macierzowe równania wielomianowe w wielowymiarowych układach automatyki ze sprzężeniem zwrotnym. *Materiały XIV Krajowej Konferencji Automatyki*, Zielona Góra 24-27.06.2002, t. 1, s. 119-128.
- [5] F. M. Callier, C. A. Desoer: *Multivariable Feedback Systems*, Springer Verlag, New York 1982.
- [6] F. R. Chang, L.S. Shieh, J. M. Navarro: A simple division method for solving Diophantine equations and associated problems. *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 17, No. 6, 1986, pp. 953-968.
- [7] M. J. Grimble, V. Kučera (Eds): *Polynomial methods for control systems design*. Springer Verlag, London 1996.
- [8] T. Kaczorek: *Teoria sterowania i systemów*. PWN, Warszawa 1993.
- [9] T. Kaczorek: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT, Warszawa 1998.
- [10] V. Kučera: Diophantine equations in control. *European Control Conference ECC'91*, Grenoble, France, 1991
- [11] S. K. Rao, B. S. Chen: Design of minimal degree compensator with assignable poles or structure. *Automatica*, Vol. 23, 1987, pp. 241-245
- [12] P. Stefanidis, A.P. Paplinski, M. J. Gibbard: *Numerical Operations with Polynomial Matrices. Application to Multi-Variable Dynamic Compensator Design*. Springer Verlag, Berlin 1992.
- [13] W.A. Wolovich: *Linear Multivariable Systems*. Springer Verlag, New York 1974.
- [14] S. Bańka: Instrukcja użytkownika pakietu ASWUD v. 3.0 z dnia 31.12.1994, Szczecin 1994
- [15] The Polynomial Toolbox 2 for use with Matlab®5. Manual, Prague 1999.

**Title:** Adaptive control in multivariable dynamic systems