

Maciej ŁAWRYŃCZUK, Piotr TATJEWSKI

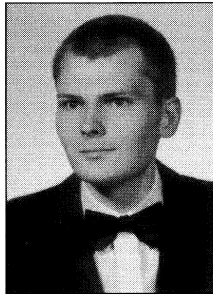
INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ, POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Efektywny obliczeniowo algorytm wielowymiarowej regulacji predykcyjnej dla modeli typu wejście-wyjście

Mgr inż. Maciej ŁAWRYŃCZUK

Jest asystentem w Instytucie Automatyki i Informatyki Stosowanej na Wydziale Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej. Prowadzi badania w zakresie liniowych oraz nieliniowych algorytmów regulacji predykcyjnej, wykorzystujących, między innymi, modele neuronowe.

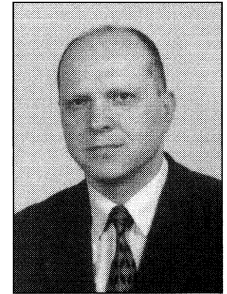
lawrynczuk@ia.pw.edu.pl



Dr hab. inż. Piotr TATJEWSKI

Jest profesorem Politechniki Warszawskiej, od 1996 roku dyrektorem Instytutu Automatyki i Informatyki Stosowanej na Wydziale Elektroniki i Technik Informatycznych. Zajmuje się zagadnieniami struktur i algorytmów sterowania procesami, głównie technicznymi. Prowadzi badania w zakresie algorytmów regulacji zaawansowanej, przede wszystkim algorytmów predykcyjnych, z wykorzystaniem modeli obiektów liniowych i nieliniowych, w tym modeli rozmytych i opisanych sieciami neuronowymi. W obszarze jego zainteresowania są również algorytmy optymalizacji, w tym optymalizacji bieżącej w warunkach niepewności i z wykorzystaniem danych pomiarowych. Opublikował też szereg prac dotyczących optymalizacyjnych metod dekompozycji i koordynacji, przydatnych dla obiektów rozproszonych, dużej skali.

P.Tatjewski@ia.pw.edu.pl



Streszczenie

W pracy przedstawiono kompletne wyprowadzenie algorytmu regulacji predykcyjnej wielowymiarowych procesów liniowych modelowanych za pomocą dyskretnych równań różnicowych. W przeciwieństwie do algorytmu GPC, prognozowana trajektoria wymuszona i swobodna sygnałów wyjściowych wyznaczana jest bez potrzeby rozwiązania macierzowego równania diofantycznego. W przypadku braku ograniczeń zmiennych procesowych zadanie optymalizacji funkcji kryterialnej rozwiązuje się numerycznie efektywną metodą najmniejszych kwadratów. Omówiono również sposób wyprowadzenia analitycznego prawa regulacji.

Abstract

This paper develops a predictive control algorithm for multivariable processes modelled by means of linear input-output models. Unlike the GPC algorithm, predicted forced and free trajectories are calculated without the necessity of solving a matrix Diophantine equation. In the unconstrained case the optimal input profile, using a numerically reliable least-squares method, is derived as an analytical formula, calculated beforehand.

Słowa kluczowe: Regulacja predykcyjna, modele liniowe, metoda najmniejszych kwadratów

Keywords: Model predictive control, linear models, least-squares method

1. Wstęp

Ogólna zasada regulacji predykcyjnej z tzw. przesuwaniem horyzontem polega na tym, że w każdej iteracji algorytmu, przy wykorzystaniu dynamicznego modelu procesu, wyznacza się ciąg przyszłych sygnałów sterujących, przy czym do sterowania wykorzystuje się jedynie pierwszy element tego ciągu. W kolejnej iteracji, po aktualizacji pomiarów sygnałów wyjściowych, cała procedura jest powtarzana [1, 2, 3]. Algorytmy predykcyjne, w porównaniu z regulatorami PID, umożliwiają skuteczne sterowanie procesów, szczególnie wielowymiarowych, również z opóźnieniami lub o tzw. odwrotnej odpowiedzi. W wersji numerycznej (optymalizacyjnej) algorytmy te są w istocie jedyną techniką regulacji, która pozwala efektywnie uwzględnić ograniczenia zmiennych procesowych [2, 3].

W ostatnich latach prowadzone są intensywne prace badawcze dotyczące algorytmów nieliniowych [2, 3, 4]. Z drugiej jednak strony, w praktyce powszechnie wykorzystuje się algorytmy liniowe, szczególnie typu DMC [5] oraz GPC [6]. Pomimo tego, że stosowany w algorytmie DMC model w postaci odpowiedzi skokowych

jest intuicyjny w interpretacji i stosunkowo łatwy do uzyskania, to jednak do opisu dynamiki typowych procesów (o właściwościach jedno lub dwuinercyjnych z opóźnieniem) potrzeba kilkadziesiąt współczynników. Po drugie, modele tego typu zawężają zakres zastosowań klasycznego algorytmu DMC do procesów stabilnych. Wymienionych wad nie ma, opracowany znacznie później, algorytm GPC, w którym stosuje się modele w postaci dyskretnych równań różnicowych.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie alternatywnego sposobu wyprowadzenia algorytmu regulacji predykcyjnej wielowymiarowych procesów liniowych modelowanych za pomocą dyskretnych równań różnicowych. W przeciwieństwie do algorytmu GPC, składowa wymuszona i swobodna prognozowanej trajektorii sygnałów wyjściowych wyznaczane są bez potrzeby rozwiązania macierzowego równania diofantycznego. Rozważa się głównie przypadek algorytmu bez ograniczeń, dla którego można podać rozwiązanie analityczne, przy czym problem optymalizacji funkcji kryterialnej rozwiązuje się numerycznie efektywną metodą najmniejszych kwadratów, unikając tym samym odwracania macierzy. Przedstawiono również wyprowadzenie analitycznego prawa regulacji, będącego wielomianem o stałych współczynnikach, których wartości są obliczane w trakcie syntezy algorytmu.

2. Modelowanie i predykcja

Model procesu o N wejściach i M wyjściach (w ogólności wielkości te mogą być różne) dany jest w postaci macierzowej

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (1)$$

gdzie $y(k)=[y_1(k) \dots y_M(k)]^T$, $u(k)=[u_1(k) \dots u_N(k)]^T$ oraz

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 + a_1^1 z^{-1} + \dots + a_{na}^1 z^{-na} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 + a_1^M z^{-1} + \dots + a_{na}^M z^{-na} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} b_1^{1,1} z^{-1} + \dots + b_{nb}^{1,1} z^{-nb} & \dots & b_1^{1,N} z^{-1} + \dots + b_{nb}^{1,N} z^{-nb} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{M,1} z^{-1} + \dots + b_{nb}^{M,1} z^{-nb} & \dots & b_1^{M,N} z^{-1} + \dots + b_{nb}^{M,N} z^{-nb} \end{bmatrix} \quad (3)$$

W przeciwieństwie do przypadku jednowymiarowego [1, 3, 6] w modelu nie wydziela się opóźnienia, ponieważ różnym torom odpowiadają z reguły różne wartości opóźnień.

Definiuje się funkcję kryterialną, zwaną również wskaźnikiem jakości, której optymalizacja pozwala obliczyć wartości sygnałów sterujących

$$J(k) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^{H_p} \mu_m(p) (y_m^{zad}(k+p|k) - \hat{y}_m(k+p|k))^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{p=0}^{H_s-1} \lambda_n(p) (\Delta u_n(k+p|k))^2 \quad (4)$$

gdzie H_p - horyzont predykcji, H_s - horyzont sterowania, $y_m^{zad}(k+p|k)$ - znana lub założona trajektoria wartości zadanej, $\hat{y}_m(k+p|k)$ - prognozowana trajektoria wyjścia, $\Delta u_n(k+p|k)$ - przyszłe przyrosty sygnałów sterujących (zmiennie decyzyjne), $\mu_m(p)$ oraz $\lambda_n(p)$ - współczynniki wagowe.

W algorytmie regulacji GPC stosuje się predykcję minimalnowariancyjną [1, 3, 6]. Można wykazać [3], że w ważnym z praktycznego punktu widzenia przypadku pobudzenia w postaci szumu białego, uzyskane wzory dotyczące prognozowanej trajektorii sygnałów wyjściowych są identyczne jak prognoza deterministyczna z modelem zakłóceń „typu DMC” [2, 3]. Błędy predykcji, wynikłe zarówno z niedokładności modelu, a także powstałe na skutek działających na proces niemierzalnych zakłóceń, traktowane są łącznie. Efekt obu tych czynników oblicza się jako różnicę między aktualnymi (mierzonymi) stanami wielkości wyjściowych a odpowiadającymi im wartościami obliczonymi na podstawie modelu

$$d_m(k) = y_m(k) - y_m(k|k-1) \quad (5)$$

Na podstawie modelu (1) niemierzalne zakłócenie działającego na proces w chwili k wynosi

$$d_m(k) = y_m(k) - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{nb} b_i^{m,n} u_n(k-i) + \sum_{i=1}^{na} a_i^m y_m(k-i) \quad (6)$$

Cechą szczególną modelu zakłóceń „typu DMC” jest założenie, że wartość zakłóceń $d_m(k)$ nie ulega zmianie na całym horyzoncie predykcji. Podejście takie pozwala efektywnie eliminować wpływ zakłóceń zarówno skokowych jak i wolnozmiennych, zapewnia również zerowanie uchybu ustalonego (działanie całkowite algorytmu) [2, 3]. Prognozowana trajektoria sygnałów wyjściowych obliczana jest ze wzoru

$$\hat{y}_m(k+p|k) = y_m(k+p|k) + d_m(k) \quad (7)$$

gdzie wielkości $y_m(k+p|k)$ wyznaczone są na podstawie modelu procesu.

Wprowadzenie równań predykcji rozpoczyna się od $p=1$. Korzystając z równań (1), (6), (7), po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów, otrzymuje się

$$\hat{y}_m(k+1|k) = \sum_{n=1}^N [b_1^{m,n} \Delta u_n(k|k) + \dots + b_{nb}^{m,n} \Delta u_n(k-nb+1)] + (1-a_1^m) y_m(k) + \dots + a_{na}^m y_m(k-na) \quad (8)$$

co można zapisać w postaci

$$\hat{y}_m(k+1|k) = \sum_{n=1}^N [g_0^{m,n}(1) \Delta u_n(k|k) + \dots + g_{nb-1}^{m,n}(1) \Delta u_n(k-nb+1)] + f_0^m(1) y_m(k) + \dots + f_{na}^m(1) y_m(k-na) \quad (9)$$

gdzie

$$g_i^{m,n}(1) = b_{i+1}^{m,n} \quad \text{dla } i=0, \dots, nb-1$$

$$f_i^m(1) = \begin{cases} 1-a_1^m & \text{dla } i=0 \\ a_i^m - a_{i+1}^m & \text{dla } i=1, \dots, na-1 \\ a_i^m & \text{dla } i=na \end{cases} \quad (10)$$

Predykcję sygnałów wyjściowych celowo przedstawiono jako funkcję przyrostów sygnałów sterujących. Umożliwia to skrócenie zapisu, a także ułatwia dalsze przekształcenia.

Prognozowana trajektoria wyjścia dla $p=2$ zależy od predykcji $\hat{y}_m(k+1|k)$. Przez analogię do równania (9) otrzymuje się

$$\hat{y}_m(k+2|k) = \sum_{n=1}^N [g_{-1}^{m,n}(2) \Delta u_n(k+1|k) + \dots + g_{nb-1}^{m,n}(2) \Delta u_n(k-nb+1)] + f_0^m(2) y_m(k) + \dots + f_{na}^m(2) y_m(k-na) \quad (11)$$

gdzie

$$g_i^{m,n}(2) = \begin{cases} g_0^{m,n}(1) & \text{dla } i=-1 \\ f_0^m(1) g_i^{m,n}(1) + g_{i+1}^{m,n}(1) & \text{dla } i=0, \dots, nb-2 \\ f_0^m(1) g_i^{m,n}(1) & \text{dla } i=nb-1 \end{cases} \quad (12)$$

oraz

$$f_i^m(2) = \begin{cases} f_0^m(1) f_i^m(1) + f_{i+1}^m(1) & \text{dla } i=0, \dots, na-1 \\ f_0^m(1) f_i^m(1) & \text{dla } i=na \end{cases} \quad (13)$$

Dla dowolnej chwili $p=1, \dots, H_p$ prognozowana trajektoria wyjścia może być przedstawiona jako

$$\hat{y}_m(k+p|k) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{p-1} g_{i-p+1}^{m,n}(p) \Delta u_n(k+p-1-i|k) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{nb-1} g_i^{m,n}(p) \Delta u_n(k-i) + \sum_{i=0}^{na} f_i^m(p) y_m(k-i) \quad (14)$$

gdzie

$$g_i^{m,n}(p) = \begin{cases} g_{i+1}^{m,n}(p-1) & \text{dla } i=1-p, \dots, -1 \\ f_0^m(p-1) g_i^{m,n}(1) + g_{i+1}^{m,n}(p-1) & \text{dla } i=0, \dots, nb-2 \\ f_0^m(p-1) g_i^{m,n}(1) & \text{dla } i=nb-1 \end{cases} \quad (15)$$

$$f_i^m(p) = \begin{cases} f_0^m(p-1) f_i^m(1) + f_{i+1}^m(p-1) & \text{dla } i=0, \dots, na-1 \\ f_0^m(p-1) f_i^m(1) & \text{dla } i=na \end{cases} \quad (16)$$

Można zauważyć, że prognozowana trajektoria sygnałów wyjściowych (14) jest funkcją liniową sygnałów $\Delta u_n(k+p|k)$, które są zmiennymi decyzyjnymi algorytmu regulacji, oraz sygnałów procesowych zmierzonych w poprzednich okresach próbkowania $\Delta u_n(k-1), \dots, \Delta u_n(k-nb+1), y_m(k), \dots, y_m(k-na)$. W przypadku zastosowania do predykcji modelu liniowego, korzystając z zasady superpozycji, prognozowaną trajektorię sygnałów wyjściowych można przedstawić jako sumę składowej wymuszonej $\Delta y_m(k+p|k)$, która zależy jedynie od zmiennych decyzyjnych, oraz składowej swobodnej $y_m^0(k+p|k)$, która zależy od przeszłości. Zachodzi więc

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \Delta \mathbf{y}(k) + \mathbf{y}^0(k) \quad (17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(k) &= [\hat{y}_1(k+1|k) \dots \hat{y}_M(k+1|k) \dots \hat{y}_M(k+H_p|k)]^T \\ \Delta \mathbf{y}(k) &= [\Delta y_1(k+1|k) \dots \Delta y_M(k+1|k) \dots \Delta y_M(k+H_p|k)]^T \\ \mathbf{y}^0(k) &= [y_1^0(k+1|k) \dots y_M^0(k+1|k) \dots y_M^0(k+H_p|k)]^T \end{aligned} \quad (18)$$

Z ogólnego równania predykcji (14) otrzymuje się wartości składowej wymuszonej, zwanej również odpowiedzią wymuszoną. Uwzględniając jedynie przyrosty sygnałów sterujących od chwili k włącznie, przez analogię do algorytmu DMC [3], otrzymuje się

$$\Delta y_m(k+p|k) = \sum_{j=1}^p \sum_{n=1}^N s_j^{m,n} \Delta u_n(k+p-j|k) \quad (19)$$

przy czym współczynniki $s_j^{m,n}$ są rządowymi odpowiedzi skokowych modelu procesu (1). Ich wartość obliczana jest w sposób rekurencyjny

$$s_j^{m,n} = \sum_{i=1}^{\min(j,nb)} b_i^{m,n} - \sum_{i=1}^{\min(j-1,na)} a_i^m s_{j-i}^{m,n} \quad (20)$$

Składową wymuszoną trajektorii prognozowanej wygodnie jest zapisać w postaci

$$\Delta \mathbf{y}(k) = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k) \quad (21)$$

gdzie macierz dynamiczna \mathbf{G} , o wymiarowości $MH_p \times NH_s$, ma strukturę

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{S}_{H_p} & \mathbf{S}_{H_p-1} & \dots & \mathbf{S}_{H_p-H_s+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} s_j^{1,1} & \dots & s_j^{1,N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ s_j^{M,1} & \dots & s_j^{M,N} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Na podstawie ogólnego równania predykcji (14) wyznacza się również wartości składowej swobodnej prognozowanej trajektorii sygnałów wyjściowych, zwanej również odpowiedzią swobodną. Jest ona niezależna od zmiennych decyzyjnych algorytmu, a w jej argumentami są sygnały wejściowe uwzględnione od chwili $k-nb$ do $k-1$ oraz sygnały wyjściowe od chwili $k-na$ do k . Odpowiedź swobodną można przedstawić w postaci

$$y_m^0(k+p|k) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{nb} e_i^{m,n}(p) u_n(k-i) + \sum_{i=0}^{na} f_i^m(p) y_m(k-i) \quad (23)$$

gdzie

$$e_i^{m,n}(p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i=1, nb=1 \\ g_i^{m,n}(p) & \text{dla } i=1, nb>1 \\ g_i^{m,n}(p) - g_{i-1}^{m,n}(p) & \text{dla } i=2, \dots, nb-1, i < nb, nb > 1 \\ -g_{i-1}^{m,n}(p) & \text{dla } i=nb, nb > 1 \end{cases} \quad (24)$$

3. Wyznaczanie optymalnej sekwencji sterującej

Definiując wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{zad}(k) &= [y_1^{zad}(k+1|k) \dots y_M^{zad}(k+1|k) \dots y_M^{zad}(k+H_p|k)]^T \\ \Delta \mathbf{u}(k) &= [\Delta u_1(k|k) \dots \Delta u_N(k|k) \dots \Delta u_N(k+H_s-1|k)]^T \end{aligned} \quad (25)$$

oraz macierze diagonalne \mathbf{M} , $\mathbf{\Lambda}$, zawierające współczynniki $\mu_m(p)$, $\lambda_n(p)$, a także korzystając z zasady superpozycji (17) oraz zależności (21), wskaźnik jakości regulacji (4) można zapisać zwięźle jako

$$J(k) = \|\mathbf{y}_{zad}(k) - \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathbf{y}^0(k)\|_{\mathbf{M}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}(k)\|_{\mathbf{\Lambda}}^2 \quad (26)$$

Liniowa zależność odpowiedzi wymuszonej od wektora zmiennych decyzyjnych $\Delta \mathbf{u}(k)$ oznacza, że minimalizowana funkcja kryterialna jest wypukła, lub ściśle wypukła gdy $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{\Lambda} > \mathbf{0}$. Przy braku ograniczeń sygnałów procesowych wektor optymalnych przyrostów sygnałów sterujących otrzymuje się przyrównując pochodną wskaźnika jakości (26) do zera

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{K} (\mathbf{y}_{zad}(k) - \mathbf{y}^0(k)) \quad (27)$$

gdzie macierz \mathbf{K} o wymiarowości $NH_s \times MH_p$ obliczana jest ze wzoru

$$\mathbf{K} = (\mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \quad (28)$$

Podany sposób obliczania wektora $\Delta \mathbf{u}(k)$, choć formalnie słuszny, może być, szczególnie w przypadku wielowymiarowym, niemożliwy do realizacji numerycznej. Jeżeli właściwości dynamiczne poszczególnych torów procesu są zbliżone to wskaźnik uwarunkowania macierzy \mathbf{G} jest duży. Przy niewielkich wartościach współczynników $\lambda_n(p)$ macierz $\mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda}$ może być również źle uwarunkowana. Można jednak zauważyć, że wskaźnik jakości (26) można zapisać jako

$$J(k) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{S}_M (\mathbf{y}_{zad}(k) - \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathbf{y}^0(k)) \\ \mathbf{S}_\Lambda \Delta \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (29)$$

gdzie $\mathbf{S}_M^T \mathbf{S}_M = \mathbf{M}$, $\mathbf{S}_\Lambda^T \mathbf{S}_\Lambda = \mathbf{\Lambda}$. Diagonalnym macierzom współczynników wagowych \mathbf{M} , $\mathbf{\Lambda}$ odpowiadają diagonalne macierze \mathbf{S}_M , \mathbf{S}_Λ zawierające pierwiastki odpowiednich współczynników. W przypadku dodatnio określonych macierzy niediagonalnych należy zastosować rozkład Cholesy'ego-Banachiewicza, w przypadku innych macierzy (nieujemnie określonych) trzeba zastosować rozkład wzdłuż wartości szczególnych [2].

Problem minimalizacji wskaźnika jakości $J(k)$ jest równoważny wyznaczeniu wektora $\Delta \mathbf{u}(k)$, dla którego

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_M (\mathbf{y}_{zad}(k) - \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathbf{y}^0(k)) \\ \mathbf{S}_\Lambda \Delta \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

Rozwiązując powyższe równanie macierzowe metodą najmniejszych kwadratów otrzymuje się

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_M (\mathbf{y}_{zad}(k) - \mathbf{y}^0(k)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

gdzie \mathbf{P} jest macierzą pseudoodwrotną Moore'a-Penrose'a wymiaru $NH_s \times (MH_p + NH_s)$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_M \mathbf{G} \\ -\mathbf{S}_\Lambda \end{bmatrix}^+ \quad (32)$$

natomiast $\mathbf{0}$ jest wektorem zerowym o długości NH_s . Szukany wektor optymalnych przyrostów sygnałów sterujących oblicza się ze wzoru (27), gdzie

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_M \quad (33)$$

przy czym macierz \mathbf{P}_1 zawiera MH_p pierwszych kolumn macierzy

P. Warto podkreślić, że choć ogólna struktura wzoru (27) pozostaje bez zmian, to jednak, dzięki wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów, unika się konieczności odwracania macierzy.

4. Analityczne prawo regulacji

Wyznaczanie całego wektora zmiennych decyzyjnych $\Delta u(k)$ w każdej iteracji algorytmu nie jest potrzebne. Wystarczy jedynie obliczyć aktualne wartości sygnałów sterujących. Na podstawie wzoru (27) przyrost sygnału sterującego r -tego wejścia ($r = 1, \dots, N$) w chwili k wynosi

$$\Delta u_r(k|k) = \sum_{p=1}^{H_p} \sum_{m=1}^M k_{r,(p-1)M+m} (y_m^{zad}(k+p|k) - y_m^0(k+p|k)) \quad (34)$$

Korzystając z analitycznej postaci odpowiedzi swobodnej (23) prawo regulacji można przedstawić jako funkcję poprzednich wartości sygnałów wejściowych i wyjściowych oraz trajektorii wartości zadanej

$$\begin{aligned} u_r(k|k) &= \\ &= \sum_{p=1}^{H_p} \sum_{m=1}^M k_{r,s} y_m^{zad}(k+p|k) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{na} k_{r,n}^u(i) u_n(k-i) + \\ &+ \sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{nb} k_{r,m}^y(i) y_m(k-i) \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie

$$k_{r,n}^u(i) = \begin{cases} -\sum_{p=1}^{H_p} \sum_{m=1}^M k_{r,s} e_i^{m,n}(p) + 1 & \text{gdy } i=1, r=n \\ -\sum_{p=1}^{H_p} \sum_{m=1}^M k_{r,s} e_i^{m,n}(p) & \text{gdy } i \neq 1, r \neq n \end{cases} \quad (36)$$

oraz

$$k_{r,m}^y(i) = -\sum_{p=1}^{H_p} k_{r,s} f_i^m(p) \quad (37)$$

przy czym $s = (p-1)M + m$. Jeżeli na całym horyzoncie sterowania sygnały wartości zadanych są stałe dla poszczególnych wyjść

$$y_m^{zad}(k+1|k) = \dots = y_m^{zad}(k+H_p|k) = y_m^{zad}(k) \quad (38)$$

prawo regulacji przybiera postać

$$\begin{aligned} u_r(k|k) &= \sum_{m=1}^M k_{r,m}^{yzad} y_m^{zad}(k) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{na} k_{r,n}^u(i) u_n(k-i) + \\ &+ \sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{nb} k_{r,m}^y(i) y_m(k-i) \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie

$$k_{r,m}^{yzad} = \sum_{p=1}^{H_p} k_{r,s} \quad (40)$$

Kolejność obliczeń analitycznego prawa regulacji jest następująca. Po ustaleniu wartości parametrów dostrajalnych algorytmu, a więc horyzontów H_p , H_s oraz współczynników $\mu_m(p)$ i $\lambda_n(p)$, na podstawie modelu procesu (1) wyznacza się rzędne odpowiedzi skokowych $s_j^{m,n}$ (20), tworzące macierz dynamiczną \mathbf{G} (22). Współczynniki odpowiedzi swobodnej $e_i^{m,n}(p)$ oraz $f_i^m(p)$ oblicza się ze wzorów (24), (10), (16), wykorzystując przy tym współczynniki $g_i^{m,n}(p)$ dane wzorami (10) i (15). Macierz \mathbf{K} wyznacza się

ze wzoru (28) lub (33). Współczynniki analitycznego prawa regulacji oblicza się ze wzorów (36), (37) oraz (40), natomiast aktualne wartości sygnałów sterujących ze wzoru (35) lub (39). Warto zauważyć, że prawo regulacji jest zawsze wielomianem o ustalonej strukturze, jego rząd zależy jedynie od wymiarowości procesu oraz dynamiki modelu (stałe na , nb). Macierz \mathbf{K} wyznaczana jest tylko raz, w trakcie syntezy algorytmu regulacji.

5. Przykład symulacyjny

Rozważanym obiektem regulacji dwuwymiarowej jest reaktor chemiczny [1, 3], opisany macierzą transmitancji ciągłych (jednostką czasu jest minuta)

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1+0,7s & 1+0,3s \\ 1 & 2 \\ 1+0,5s & 1+0,4s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (41)$$

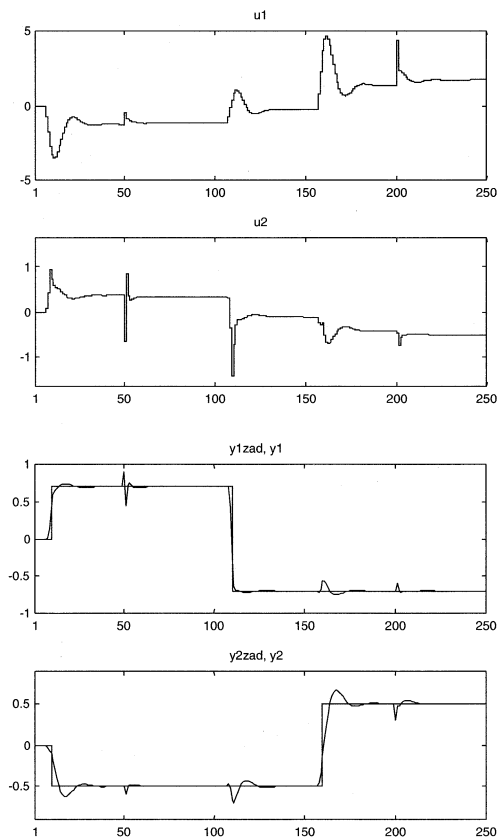
przy czym zmiennymi wejściowymi u_1 oraz u_2 są: natężenia dopływu surowca oraz czynnika chłodzącego w płaszczu reaktora, zmiennymi wyjściowymi y_1 oraz y_2 są: skład produktu ubocznego reakcji oraz temperatura reaktora. Stosując okres próbkowania 0,03 min. otrzymano model dyskretny postaci (1) o współczynnikach

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1-1,862885z^{-1} + & 0 \\ +0,866877z^{-2} & \\ 0 & 1-1,869508z^{-1} + \\ & +0,873715z^{-2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

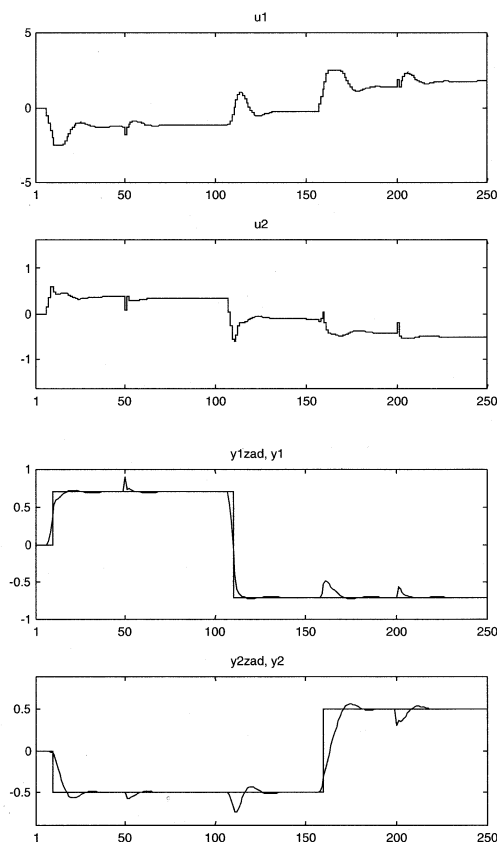
$$\mathbf{B}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0,041951z^{-1} + & 0,475812z^{-1} + \\ -0,037959z^{-2} & -0,455851z^{-2} \\ 0,058235z^{-1} + & 0,44513z^{-1} + \\ -0,054027z^{-2} & -0,136097z^{-2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

W trakcie przeprowadzonych symulacji, z uwagi na szybką dynamikę procesu, przyjęto stosunkowo krótkie horyzonty: $H_p = 3$, $H_s = 2$, natomiast macierze współczynników wagowych miały postać: $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}$, gdzie $\lambda = 0,075$. Na rys. 1 przedstawiono wyniki symulacji algorytmu bez ograniczeń. Założono, że zmiany trajektorii zadanych na horyzoncie predykcji są znane, wykorzystano więc prawo regulacji dane wzorem (35). Oprócz zmian trajektorii zadanych, w celu zbadania odporności algorytmu, na proces działają dwa addytywne, niemierzalne zakłócenia: dla wyjścia y_1 jest to skok o wartości 0,2 w chwili $k = 50$, dla wyjścia y_2 jest to skok o wartości -0,2 w chwili $k = 200$.

Analityczna wersja algorytmu, pomimo zalet, nie umożliwia uwzględnienia ograniczeń sygnałów procesowych. Z praktycznego punktu widzenia szczególnie nierealistyczne są gwałtowne zmiany sterowań. Zwiększenie współczynnika λ może to zjawisko częściowo ograniczyć, skutkiem negatywnym może być jednak spowolnienie regulacji. Na rys. 2 przedstawiono wyniki symulacji algorytmu w wersji optymalizacyjnej (numerycznej), przy czym w każdej iteracji rozwiązuje się zadanie programowania kwadratowego [1, 2, 3]. Przyjęto następujące wartości ograniczeń: $-2,5 \leq u_1 \leq 2,5$, $-0,6 \leq u_2 \leq 0,6$, $\Delta u_{1\max} = 0,5$, $\Delta u_{2\max} = 0,3$. W porównaniu z przypadkiem bez ograniczeń algorytm ten działa jedynie nieznacznie wolniej, natomiast przyjęte ograniczenia są spełnione w każdej iteracji. Jeżeli implementacja algorytmu w wersji optymalizacyjnej nie jest możliwa, natomiast spełnienie ograniczeń jest istotne, należy zastosować rozwiązanie suboptymalne, w którym



Rys. 1. Wyniki symulacji algorytmu bez ograniczeń
Fig. 1. Simulation results: the unconstrained case



Rys. 2. Wyniki symulacji algorytmu z ograniczeniami
Fig. 2. Simulation results: the constrained case

wyznaczone analitycznie wartości sygnałów sterujących rzutuje się na zbiór dopuszczalnych ograniczeń [3].

6. Podsumowanie

Tematem niniejszej pracy jest algorytm regulacji predykcyjnej wielowymiarowych procesów liniowych modelowanych przy wykorzystaniu dyskretnych równań różnicowych. Zalety przedstawionego rozwiązania są następujące: stosunkowo prosty sposób wprowadzenia, niewielka złożoność i efektywność obliczeniowa oraz szerokie możliwości zastosowania. Odpowiedź swobodna i wymuszona wyznaczana jest w sposób analityczny bez potrzeby rozwiązywania macierzowego równania Diofantycznego. W przypadku bez ograniczeń analityczne prawo regulacji jest wielomianem o stałych współczynnikach, którego rząd nie zależy od parametrów dostrojonych algorytmu. W trakcie obliczeń unika się odwracania macierzy, stosując w zamian numerycznie pewną metodę najmniejszych kwadratów.

Omówiony sposób wyznaczania odpowiedzi swobodnej można oczywiście wykorzystać w przypadku algorytmu z ograniczeniami. Co więcej, podane zależności pozwalają również zaprojektować efektywny obliczeniowo algorytm nieliniowy typu adaptacyjnego (z bieżącą identyfikacją modelu liniowego) lub też algorytm z linearyzacją modelu nieliniowego, danego np. w postaci modelu obszarowego lub sieci neuronowej [3, 4, 7]. Z praktycznego punktu widzenia rozwiązaniem najbardziej interesującym wydają się algorytmy z linearyzacją. Ich cechą wspólną jest niewielka złożoność obliczeniowa, zmienne decyzyjne obliczane są w wyniku rozwiązania pojedynczego zadania programowania kwadratowego lub ich sekwencji [3, 7]. W porównaniu z algorytmami z nieliniową optymalizacją umożliwiają one zazwyczaj osiągnięcie zbliżonej jakości regulacji, podczas gdy różnica czasu obliczeń i skala trudności problemów optymalizacji, wpływająca na pewność całego algorytmu regulacji, jest kolosalna [7].

7. Literatura

- [1] E. F. Camacho, C. Bordons: Model predictive control. Springer, 1999.
- [2] J. M. Maciejowski: Predictive control with constraints. Prentice Hall, 2002.
- [3] P. Tatjewski: Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych, struktury i algorytmy. Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa 2002.
- [4] P. Tatjewski, M. Ławryńczuk, P. Marusak: Wybrane algorytmy regulacji predykcyjnej procesów nieliniowych. XIV Krajowa Konferencja Automatyki, Zielona Góra, str. 145-152, 2002.
- [5] C. R. Cutler, B. L. Ramaker: Dynamic matrix control - a computer control algorithm. AIChE National Meeting, Houston, Texas, 1979, Proceedings of Joint. Aut. Control Conf., San Fransisco, 1980.
- [6] D. W. Clarke, C. Mohtadi, P. S. Tuffs: Generalized predictive control - I. The basic algorithm. Automatica, tom 23, nr 2, str. 137-148, 1987.
- [7] M. Ławryńczuk: Nieliniowe algorytmy regulacji predykcyjnej z neuronowymi modelami procesów (rozprawa doktorska). Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2003.

Title: A computationally efficient multivariable predictive control algorithm for input-output models