

## Mychajło DOROŻOWEC

ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH, POLITECHNIKA RZESZOWSKA

KATEDRA TECHNOLOGII INFORMACYJNO-POMIAROWYCH, NARODOWY UNIWERSYTET "LWOWSKA POLITECHNIKA", UKRAINA

# Modele dyskretne zagadnień tomografii elektrycznej

**Dr hab. inż. Mychajło DOROŻOWEC**  
**Profesor Politechniki Rzeszowskiej**

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyko-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, tytuł doktora nauk technicznych uzyskał w 1986 r. a w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. Współautor 2 podręczników oraz ponad 150 publikacji w formie artykułów zamieszczonych w czasopiśmie krajowych i zagranicznych i wygłoszonych na konferencjach, sympozjach. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych, problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz problemami analizy i oceny niedokładności wyników pomiarów.



### Streszczenie

W artykule zostały przedstawione uzyskane zależności wartości parametrów elementów dyskretnych układów zastępczych od rodzaju i charakterystyk aproksymacji ciągłego rozkładu konduktywności elektrycznej wewnątrz obiektu, opracowane zasady budowy struktur układów zastępczych, opracowane i zbadane właściwości funkcji opisującej modele zależności wyników pomiaru od wartości parametrów elementów aproksymacyjnych, przedstawiono zmodyfikowany algorytm rozwiązań zagadnień tomografii elektrycznej na podstawie uwzględnienia tych właściwości.

### Abstract

In the article the structural equivalence of the characteristic matrices of finite elements and corresponding electrical circuits from the lumped elements is substantiated. The expressions for determining of the electrical circuits discrete elements parameters values of those depending on the finite element conductivity and its geometric form are obtained. The mathematical model of the function of that describing the dependence of the measuring results of the external interelectrode potentials from the values of the parameters of these elements is proposed and investigated. Shown that the properties of these nonlinear functions in a sense are similar to the properties of the linear functions. Therefore in the absence of a priori information as the initial approach of the conductivity distribution it is possible to assign to its uniform, whose level does not completely influence into the convergence of the iterative reconstructing process. On the basis of the results of studies the simplified version of the reconstruction algorithm is proposed.

**Słowa kluczowe:** tomografia elektryczna, elementy dyskretne, wyniki pomiaru.

**Keywords:** electrical tomography, discrete elements, measurements results.

## 1. Wstęp

Tomografię elektryczną wykorzystuje się do wyznaczania rozkładów przestrzennych konduktywności i przenikalności dielektrycznej oraz innych wielkości powiązanych z nimi wewnątrz obiektu badanego, wykorzystując wyniki pomiaru wielkości elektrycznych na obrzeżu obiektu przy jego zewnętrznym wymuszaniu [1-7, 10-13]. W przypadku środowiska przewodzącego podstawą do rozwiązań zagadnień tomografii jest zagadnienie polowe elektryczne które jest opisywane prawem Ohma [14]

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x, y) &= \gamma(x, y) \cdot \mathbf{E}(x, y) = \\ &= -\gamma(x, y) \mathbf{grad} \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:  $\gamma(x, y)$  jest rozkładem poszukiwanej konduktywności,  $\varphi(x, y)$  jest rozkładem potencjału,  $\mathbf{j}(x, y)$  jest wektorem gęstości prądu,  $\mathbf{E}(x, y)$  jest wektorem natężenia pola elektrycznego. Postać tego równania nie zmienia się jeżeli zamiast obiektu z rozkładem konduktywności  $\gamma(x, y)$  będzie rozpatrywany obiekt z rozkładem przenikalności die-

lektrycznej  $\epsilon(x, y)$  lub konduktywności zespolonej  $\gamma(x, y) + j\omega\epsilon(x, y)$  (gdzie:  $\omega$  jest częstotliwością prądu pobudzającego obiekt). Dlatego wyniki (uzyskiwane dla obiektu z rozkładem konduktywności) mogą być przeniesione na obiekty z rozkładami przenikalności oraz zespolonej konduktywności.

W ogólnym przypadku niejednorodnego rozkładu konduktywności równanie (1) nie może być rozwiązane bezpośrednio i w tym celu są wykorzystywane metody elementów skończonych z wcześniejszą aproksymacją rozkładu potencjału i rozkładu konduktywności [6-9]. Istnieje wielu pakietów oprogramowania do rozwiązań zagadnień polowych metodą elementów skończonych, np. [9]. Takie programy są skutecznymi do obliczeń rozkładów potencjału (zagadnienia elektryczne) lub ich gradientów wewnątrz obiektu badanego. Jednak z punktu widzenia tomografii elektrycznej, celem której jest wyznaczanie nie rozkładu pola elektrycznego a rozkładu konduktywności (przenikalności elektrycznej, itp.), takie programy nie są zbyt efektywnymi. Jest to spowodowane tym, że wyniki obliczeń wartości rozkładu pola elektrycznego wewnątrz obiektu nie mogą być praktycznie wykorzystane z tej przyczyny, że w tomografii elektrycznej dostępnymi do pomiaru są tylko potencjały lub prądy w punktach usytuowania elektrod pomiarowych, tzn. na zewnątrz obiektu badanego.

Powstaje więc problem stworzenia algorytmów (i oprogramowania) dla rozwiązywania zagadnień tomograficznych, w których z jednej strony może być uwzględniona podstawowa zasada tomografii elektrycznej - wykorzystanie do odtwarzania obrazu wyników pomiaru wielkości tylko na obrzeżu obiektu, a z drugiej strony zostają uwzględnione właściwości elektryczne obiektu badanego. Ten problem można skutecznie rozwiązać przenosząc zagadnienia tomograficzne z płaszczyzny czystej matematyki obliczeniowej na płaszczyznę zagadnień elektrotechniki teoretycznej. Wykorzystując efektywne metody obliczeniowe do analizy obwodów elektrycznych złożonych z elementów skupionych, można uwzględnić ważne twierdzenia i metody odpowiadające strukturze obiektu badanego [14, 15]. Okazuje się, że z punktu widzenia elektrotechniki zagadnienia tomograficzne proste i odwrotne posiadają pewne właściwości specjalne, które można wykorzystać przy odtwarzaniu poszukiwanego rozkładu. W artykule opisano przeprowadzone badania metod tworzenia układów zastępczych z elementów skupionych odpowiadających aproksymacji elementami skończonymi, opracowane i zbadane właściwości modelu funkcji opisujących zależności wyników pomiaru od wartości poszukiwanych wielkości.

Problem budowy układów zastępczych z elementów skupionych, odpowiadających przestrzennie rozłożonym parametrom obiektu, bezpośrednio wiąże się także z realizacją modeli fizycznych referencyjnych, używanych do weryfikacji systemów pomiarowych tomograficznych [10]. Taki model, który zostaje podłączony do wejść podsystemu zbierania danych pomiarowych (zamiast obiektu badanego) powinien mieć tę samą strukturę tak zewnętrzną (liczba elektrod pomiarowych, sposób wymuszania i pomiaru odpowiedzi) jak i wewnętrzną, m.in. odpowiadającą wykorzystywanej metodzie aproksymacji obiektu niezbędnej do rozwiązań zagadnień tomograficznych.

Podstawowymi celami badań są:

- Uzyskanie zależności wartości parametrów elementów skupionych od rodzaju i charakterystyk aproksymacji środowiska elektrycznego wewnątrz obiektu;
- uzyskanie modelu matematycznego opisującego wyniki pomiarów i badanie jego właściwości a także modyfikacja na tej podstawie algorytmu rozwiązania zagadnienia odwrotnego tomografii elektrycznej.

## 2. Modele matematyczne parametrów zastępczych elementów dyskretnych przy aproksymacji elementami skupionymi

Wynikiem aproksymacji zagadnienia polowego metodą elementów skończonych jest tak zwana macierz charakterystyczna, elementy której wiążą potencjały węzłowe  $\varphi_p$  z parametrami rozkładu konduktywności  $\gamma_c(x,y)$  wewnątrz elementu [6, 7, 10]. Dla wyznaczenia współczynników takich macierzy przy wykorzystaniu trójkątnych oraz cztero-kątnych elementów skończonych zastosujemy znaną metodę [8]. W środowisku przewodzącym wyróżnimy element cztero-kątny  $KLMN$  o dowolnym kształcie i grubości warstwy przewodzącej  $d$ . Przy tym element trójkątny  $KLM$  będzie częścią tego elementu cztero-kątnego (rys. 1a). Jeżeli potencjały w wybranych punktach są równe odpowiednio  $\varphi_k, \varphi_p, \varphi_m, \varphi_n$  oraz wartość konduktywności elementu skończonego stanowi  $\gamma_c$ , wtedy aproksymacja biliniowa rozkładu potencjału  $\varphi_{klmn}(x,y)$  czworokąta oraz liniowa aproksymacja  $\varphi_{klm}(x,y)$  trójkąta w formie Lagrange'a [8] może być przedstawiona wyrażeniem

$$\varphi_{klmn}(\xi, \eta) = \varphi_k U_k(\xi, \eta) + \varphi_l U_l(\xi, \eta) + \varphi_m U_m(\xi, \eta) + \varphi_n U_n(\xi, \eta) \quad (2)$$

gdzie:  $U_i(\xi, \eta) = \begin{cases} a_{0i} + a_{1i}\xi + a_{2i}\eta + a_{3i}\xi\eta & (4 - \text{kątny}); \\ b_{0i} + b_{1i}\xi + b_{2i}\eta & (3 - \text{kątny}). \end{cases}$

$\eta, \xi$  - współrzędne, wybrane według zależności

$$\begin{aligned} x &= x_k + (x_m - x_k)\xi + (x_l - x_k)\eta; \\ y &= y_k + (y_m - y_k)\xi + (y_l - y_k)\eta, \end{aligned} \quad (3)$$

wskutek czego trójkąt  $KLM$  z wierzchołkami w punktach  $(x_k, y_k); (x_l, y_l); (x_m, y_m)$  transformuje się w trójkąt z wierzchołkami w punktach  $(0,0); (0,1)$  i  $(1,0)$  a wierzchołek  $N(x_n, y_n)$  transformuje się w punkt  $N(\xi_n, \eta_n)$  (rys. 1b), przy czym  $\xi_n = S_{kln}/S_{klm}; \eta_n = S_{kmn}/S_{klm}$  (gdzie:  $S_{kln}, S_{klm}, S_{kmn}$  - powierzchnie odpowiednich trójkątów). Unormowany system współrzędnych  $(\eta, \xi)$  został wykorzystany w celu uproszczenia obliczenia współczynników macierzy charakterystycznych.

Macierz charakterystyczną elementu skończonego oblicza się z warunków minimum mocy wewnątrz elementu [8]

$$\frac{dP}{d\varphi_j} = 2d \sum_i \varphi_i \iint_{\Omega} \gamma(x,y) [U'_{ix} U'_{ix} + U'_{iy} U'_{iy}] d\Omega = \sum_i \varphi_i \chi_{ij} = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$\chi_{ij} = 2d \iint_{\Omega} \gamma(x,y) [U'_{ix} U'_{ix} + U'_{iy} U'_{iy}] d\Omega \quad (5)$$

są poszukiwanymi współczynnikami macierzy charakterystycznej.

Po uwzględnieniu (2) oraz (3) wzór (5) dla obliczenia wartości współczynnika  $\chi_{ij}$  ma postać

$$\chi_{ij} = 2d \int_a^b \int_0^{f(\xi)} \gamma(\xi, \eta) \left[ \begin{aligned} & (ctg \alpha_k + ctg \alpha_l) \frac{dU_i}{d\xi} \frac{dU_j}{d\xi} - \\ & - ctg \alpha_k \left( \frac{dU_i}{d\xi} \frac{dU_j}{d\eta} + \frac{dU_i}{d\eta} \frac{dU_j}{d\xi} \right) + \\ & + (ctg \alpha_k + ctg \alpha_m) \frac{dU_i}{d\eta} \frac{dU_j}{d\eta} \end{aligned} \right] d\eta d\xi \quad (6)$$

gdzie:  $\alpha_k, \alpha_p, \alpha_m$  - odpowiednie kąty trójkąta  $KLM$ , a granice całkowania wynoszą:

$$a = 0, b = \xi_n, 0 \leq \xi \leq \xi_n; a = \xi_n, b = 1, \xi_n \leq \xi \leq 1$$

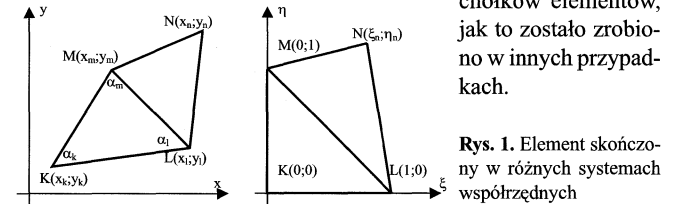
$$f(\xi) = 1 + \xi(\eta_n - 1)/\xi_n, 0 \leq \xi \leq \xi_n; (\xi) = \eta_n(\xi - 1)/(\xi_n - 1), \xi_n \leq \xi \leq 1$$

W przypadku trójkąta granice całkowania wynoszą  $a = 0, b = 1; f(\xi) = 1 - \xi$

W tabelach 1 oraz 2 zostały wpisane biliniowe i liniowe funkcje aproksymacyjne potencjału oraz ich pochodne dla elementów skończonych odpowiednio cztero-kątnego oraz trójkątnego. W obydwu przypadkach wykorzystuje się stałą aproksymację konduktywności  $\gamma(\xi, \eta) = \gamma_c$ .

Po podstawieniu do wzoru (6) odpowiednich wartości pochodnych aproksymacyjnych funkcji z tabeli 1 oraz 2 i wykonaniu całkowania

dla wszystkich indeksów  $i$  oraz  $j$ , otrzymamy symetryczne macierze charakterystyczne odpowiednich elementów skończonych, które dla ogólnych i szczególnych przypadków zostały zapisane w tabelach 3-5. Jak widać z otrzymanych wyników, wartości współczynników tych macierzy zależą tylko od wartości kątów elementów skończonych i poszukiwanych wartości konduktywności i są niezależne od bezwzględnych wymiarów elementów. W celu oszczędności miejsca, macierz dla ogólnego cztero-kątnego elementu została zapisana w formie skróconej, tzn. bez rozmieszczenia współczynników według wierzchołków elementu, jak to zostało zrobiono w innych przypadkach.



Rys. 1. Element skończony w różnych systemach współrzędnych

Tabela 1. Funkcje aproksymacyjne oraz ich pochodne dla elementu cztero-kątnego

	$U_i(\xi, \eta)$	$U'_{i\xi}$	$U'_{i\eta}$
K	$1 - \xi - \eta - (1 - \xi_n - \eta_n) \xi \eta / \xi_n \eta_n$	$-1 - (1 - \xi_n - \eta_n) \eta / \xi_n \eta_n$	$-1 - (1 - \xi_n - \eta_n) \xi / \xi_n \eta_n$
L	$U_l(\xi, \eta) = (1 - \eta / \eta_n) \xi$	$1 - \eta / \eta_n$	$-\xi / \eta_n$
M	$U_m(\xi, \eta) = (1 - \xi / \xi_n) \eta$	$-\eta / \xi_n$	$1 - \xi / \xi_n$
N	$U_n(\xi, \eta) = \xi \eta / \xi_n \eta_n$	$\eta / \xi_n \eta_n$	$\xi / \xi_n \eta_n$

Tabela 2. Funkcje aproksymacyjne oraz ich pochodne dla elementu trójkątnego

	$U_i(\xi, \eta)$	$U'_{i\xi}$	$U'_{i\eta}$
K	$1 - \xi - \eta$	$-1$	$-1$
L	$\xi$	$1$	$0$
M	$\eta$	$0$	$1$

Tabela 3. Macierz charakterystyczna elementu cztero-kątnego

$\chi_{ij}$	$\times [d\gamma_c / 12\eta_n^2 \xi_n^2]$
$\chi_{KL}$	$ctg(k)\xi_n(\xi_n + \eta_n)(\eta_n^2 - \xi_n^2)(\xi_n + \eta_n - 2) - 2\xi_n^2 + 1) +$ $+ ctg(l)\xi_n(\eta_n^4 - \eta_n^3 + \xi_n - \xi_n^2 - 2\eta_n \xi_n(\eta_n^2 + 1) - 3\eta_n \xi_n^2(\eta_n - 1)) +$ $+ ctg(m)\xi_n(\eta_n - \eta_n^2 + \xi_n^3 - \xi_n^4 + \eta_n^2 \xi_n(\xi_n + 1))$
$\chi_{KM}$	$ctg(k)\eta_n(\xi_n + \eta_n)(\xi_n^2 - \eta_n^2)(\xi_n + \eta_n - 2) - 2\eta_n + 1) +$ $+ ctg(l)\eta_n(\xi_n - \xi_n^2 + \eta_n^3 - \eta_n^4 + \xi_n^2 \eta_n(\eta_n + 1)) +$ $+ ctg(m)\eta_n(\xi_n^4 - \xi_n^3 + \eta_n - \eta_n^2 - 2\xi_n \eta_n(\xi_n^2 + 1) - 3\xi_n \eta_n^2(\xi_n - 1))$
$\chi_{KN}$	$ctg(k)(\eta_n^2 - \xi_n^2)^3 - (\eta_n + \xi_n)(1 - 2\eta_n \xi_n) - 2(\eta_n^3 - \eta_n^2 + \xi_n^3 - \xi_n^2)) +$ $ctg(l)(\eta_n^4 - \eta_n^3 + \xi_n^2 - \xi_n - \eta_n \xi_n^2(\eta_n + 1)) +$ $+ ctg(m)(\xi_n^4 - \xi_n^3 + \eta_n^2 - \eta_n - \xi_n \eta_n^2(\xi_n + 1))$
$\chi_{LM}$	$ctg(k)\xi_n \eta_n (\xi_n + \eta_n) (1 - 4\eta_n \xi_n - \eta_n^2 - \xi_n^2) + (\eta_n - \xi_n)^2 -$ $- ctg(l)\xi_n \eta_n (\eta_n^3 + \xi_n (\eta_n^2 + \eta_n - 1)) -$ $- ctg(m)\xi_n \eta_n (\xi_n^3 + \eta_n (\xi_n^2 + \xi_n - 1))$
$\chi_{LN}$	$ctg(k)\xi_n (\xi_n + \eta_n) (\eta_n^2 - \eta_n - \xi_n^2 + \xi_n - 1) +$ $+ ctg(l)\xi_n (\eta_n^3 + \xi_n (\eta_n^2 + \eta_n - 1)) -$ $- ctg(m)\xi_n (\xi_n^3 + \eta_n (\xi_n^2 + \xi_n + 1))$
$\chi_{MN}$	$ctg(k)\eta_n (\xi_n + \eta_n) (\xi_n^2 - \xi_n - \eta_n^2 + \eta_n - 1) -$ $- ctg(l)\eta_n (\eta_n^3 + \xi_n (\eta_n^2 + \eta_n + 1)) +$ $+ ctg(m)\eta_n (\xi_n^3 + \eta_n (\xi_n^2 + \xi_n - 1))$

Tabela 4. Macierz charakterystyczna prostokąta ( $\xi_n = \eta_n = 1, \alpha_k = \pi/2, a, b$  - długości stron  $ctg(\alpha_p) = a/b, ctg(\alpha_m) = b/a$ )

		K	L	M	N
K	$\gamma d/6$	$2(a/b+b/a)$	$-(2a/b-b/a)$	$-(a/b+b/a)$	$-(2b/a-a/b)$
L		$-(2a/b-b/a)$	$2(a/b+b/a)$	$-(2b/a-a/b)$	$-(a/b+b/a)$
M		$-(a/b+b/a)$	$-(2b/a-a/b)$	$2(a/b+b/a)$	$-(2a/b-b/a)$
N		$-(2b/a-a/b)$	$-(a/b+b/a)$	$-(2a/b-b/a)$	$2(a/b+b/a)$

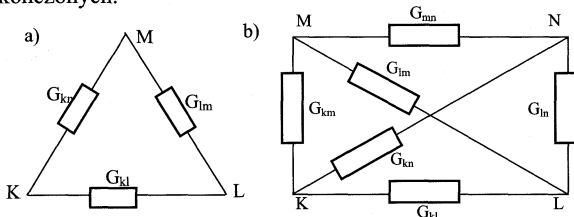
Tabela 5. Macierz charakterystyczna elementu trójkątnego

		K	L	M
K	$\gamma d$	$Ctg(\alpha_m) + Ctg(\alpha_k)$	$-Ctg(\alpha_m)$	$-Ctg(\alpha_k)$
L		$-Ctg(\alpha_m)$	$Ctg(\alpha_m) + Ctg(\alpha_k)$	$-Ctg(\alpha_k)$
M		$-Ctg(\alpha_k)$	$-Ctg(\alpha_k)$	$Ctg(\alpha_k) + Ctg(\alpha_m)$

Wyniki dla przypadku bikwadratowej aproksymacji potencjału oraz liniowej aproksymacji rozkładu konduktywności zostały zbadane i przedstawione w [11].

### 3. Układy zastępcze elementów skończonych

Analizując układy współczynników charakterystycznych w macierzach elementów skończonych w tabelach 3-5 można zauważyć że struktura tych macierzy jest identyczna jak struktura macierzy układu równań metody węzłowej wykorzystywanej dla rozwiązań zagadnień w obwodach elektrycznych [13, 14]. Z tego wynika, że elementowi skończonemu trójkątnemu odpowiada obwód elektryczny utworzony z połączeń w trójkąt trzech konduktancji (rys. 2a), elementowi czterokątnemu odpowiada pełny obwód elektryczny utworzony z połączeń w czworokąt sześciu konduktancji (rys. 2b) i itd. Niżej, w tabelach 6 i 7 przykładowo zostały zapisane macierze metody potencjałów węzłowych dla pełnego czworokąta (tabela 6) oraz trójkąta (tabela 7), odpowiadającym obwodom elektrycznym pokazanym na rys. 2ab. Z porównania odpowiednich tabeli wynika że leżące obok głównej przekątnej współczynniki macierzy elementu skończonego z przeciwnym znakiem mogą być traktowane jako konduktancje międzywęzłowe  $G_{ij}$  ( $G_{ij} = -\gamma_e d\chi_{ij} \cdot C_e$  gdzie:  $C_e$  jest stałym współczynnikiem, wartość którego zależy tylko od kształtu elementu), przy czym wymienione węzły układu elektrycznego są zbieżne z wierzchołkami elementów skończonych.



Rys. 2. Układy zastępcze elementów trójkątnego (a) oraz czterokątnego (b)

Dla zapewnienia możliwości realizacji układu zastępczego aproksymacji elementami skończonymi wykorzystując wyłącznie elementy pasywne niezbędne jest, aby wartości elementów obok przekątnej macierzy charakterystycznej były ujemne.

W przypadku aproksymacji elementami trójkątnymi, jak widać w tabeli 5, warunek ten jest bardzo prosty: wszystkie kąty trójkąta powinny być ostry. Jeżeli jeden z kątów trójkąta równa się  $\pi/2$ , wtedy  $\text{ctg}(\pi/2)=0$  wskutek czego konduktancja leżąca naprzeciw tego kąta równa się zero (nieobecność w układzie zastępczym odpowiedniego elementu skupionego). Przy zwiększeniu kąta ten element ma ujemną wartość konduktancji, to znaczy, że nie może być on zrealizowany wyłącznie elementami pasywnymi.

W układzie zastępczym elementu skończonego czterokątnego (rys. 2a) istnieje jeszcze więcej wariantów dla znaków i wartości współczynników macierzy charakterystycznych (przewodności zastępczych  $G_s$ ) w zależności od geometrii elementu. Szeroko są wykorzystywane elementy prostokątne z długością boków  $a$  oraz  $b$  - macierz charakterystyczna jest pokazana w tabeli 4. Dla takiego elementu, konduktancja zastępcza  $G_v$  leżąca na przeciw kąta prostego nie równa się zero i jest proporcjonalna do stosunku długości boków elementu  $G_s = (\gamma_e d/6)(a/b + b/a)$ . Z tego punktu widzenia aproksymacja prostokątnymi czterokątnymi elementami skończonymi jest lepsza od aproksymacji dwoma prostokątnymi trójkątnymi elementami, dla której wartość konduktancji zastępczej na przeciw kąta prostego równa się zero. Żeby pozostałe elementy miały wartości dodatnie (pasywne elementy) należy

zapewnić spełnienie warunków  $-2\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 0$ , i  $-2\frac{b}{a} + \frac{a}{b} < 0$ , z których otrzymujemy nierówność, na podstawie której wymiary elementów powinny być ograniczone:

$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$ . To znaczy, że forma elementów skończonych powinna być w przybliżeniu kwadratowa. Przy

kwadratowym elemencie skończonym ( $\alpha_k = \pi/2$ ,  $a=b$ ) wartości konduktancji zastępczych wzdłuż boków wynoszą  $G_b = \gamma_e d/3$  a wzdłuż przekątnych  $G_p = 2\gamma_e d/3 = 2G_b$ .

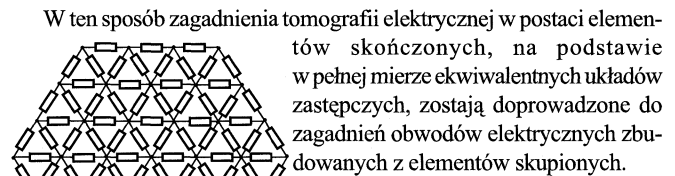
Tabela 6. Macierz układu równań metody węzłowej elementu czterokątnego

	K	L	M	N
K	$G_{kl}+G_{kl}+G_{km}$	$-G_{kl}$	$-G_{km}$	$-G_{kn}$
L	$-G_{kl}$	$G_{kl}+G_{lm}+G_{ln}$	$-G_{lm}$	$-G_{ln}$
M	$-G_{km}$	$-G_{lm}$	$G_{km}+G_{ml}+G_{mn}$	$-G_{mn}$
N	$-G_{kn}$	$-G_{ln}$	$-G_{mn}$	$G_{kn}+G_{ln}+G_{mn}$

Tabela 7. Macierz układu równań metody węzłowej elementu trójkątnego

	K	L	M
K	$G_{kl}+G_{km}$	$-G_{kl}$	$-G_{km}$
L	$-G_{kl}$	$G_{kl}+G_{lm}$	$-G_{lm}$
M	$-G_{km}$	$-G_{lm}$	$G_{km}+G_{lm}$

Zamieniając każdy element skończony odpowiednim ekwiwalentnym zastępczym układem elektrycznym uzyskujemy wielowęzłowy i wielogałęziowy obwód elektryczny, struktura którego zależy od kształtu wykorzystywanych elementów skończonych. Na rys. 3 przykładowo pokazana jest aproksymacja 54-ciu regularnymi elementami trójkątnymi i odpowiedni jej obwód zastępczy z 90-ciu elementami skupionymi [3-5]. Na styku sąsiednich elementów aproksymacyjnych wartości elementów (konduktancje, admittancje lub rezystancje, impedancje) takiej sieci elektrycznej są równe wartościom równoległego połączenia odpowiednich elementów sąsiednich aproksymacyjnych elementów.



Rys. 3. Obwód zastępczy 90-ciu elementów skupionych odpowiadający regularnej aproksymacji 54-ciu elementami trójkątnymi FEM

### 4. Model matematyczny wyników pomiaru

Bez względu na stosowaną aproksymację zagadnienia polowego, używając odpowiednich schematów zastępczych uzyskamy sieć z pewną liczbą  $n$  elementów skupionych  $R_s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ), połączonych pomiędzy sobą w odpowiedni sposób [5, 11]. Założymy, że obiekt badany jest pobudzany źródłem prądu o wartości  $I_0$  z gałęzi zewnętrznej z numerem  $k$  (pomiędzy zewnętrzną  $k$ -tą parą elektrod) sieci a mierzone jest napięcie  $U_m = U_i$  pomiędzy zewnętrzną  $i$ -tą parą elektrod (rys. 4), wartość którego wynosi (7)

$$U_m^{(k)} = U_i = I_i^{(k)} R_i = I_c^{(k)} R_i \quad (7)$$

gdzie:  $I_i$  to prąd w  $i$ -tej gałęzi, który równa się odpowiedniemu prądowi oczkowemu  $I_c$ ,  $R_i$  jest rezystancją tej gałęzi.

Poszukiwany prąd można znaleźć wykorzystując metodę prądów oczkowych do układu zastępczego w postaci (8)

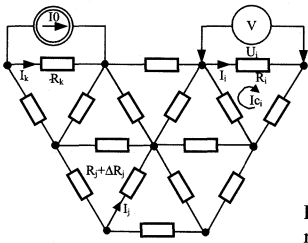
$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{R}_k \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{Z}$  jest macierzą impedancji oczkowych [14],  $\mathbf{I}_c$  jest wektorem prądów oczkowych,  $\mathbf{R}_k$  - jest rezystancją gałęzi z numerem  $k$ . Na podstawie (8) wartość prądu  $I_c$  wynosi

$$I_c = I_0 \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} R_k \quad (9)$$

gdzie:  $\Delta = \|\mathbf{Z}\|$  wymiarowością której jest  $[\mathbf{R}]^N$ , gdzie  $N$  - jest wymiarowością macierzy impedancji, która równa się liczbie elementów skończonych;  $\Delta_{ik} = (-1)^{i+k} \|\mathbf{Z}_{ik}\|$  jest dopełnieniem algebraicznym elementu  $Z_{ik}$  macierzy  $\mathbf{Z}$ , wymiarowość której jest o jeden mniejsza  $[\mathbf{R}]^{N-1}$ .

Przy tym  $\|\mathbf{Z}\| = \sum_{p=1}^{N_2} C1_p \prod_{q=1}^N R_q$ ,  $\|\mathbf{Z}_{ik}\| = \sum_{p=1}^{N_2} C2_p \prod_{q=1}^{N-1} R_q$ , gdzie  $N_1$ , oraz  $N_2$  są liczbami niezerowych członów  $\|\mathbf{Z}\|$  oraz  $\|\mathbf{Z}_{ik}\|$ ;  $C1_q$  oraz  $C2_q$  są



Rys. 4. Fragment sieci służący do wyznaczenia właściwości modelu wyników pomiaru

Po podstawieniu wartości prądu (9) do wzoru (7) zależność wyników pomiaru może być przedstawiona w postaci nieliniowej funkcji  $Um_i(R_1, R_2, \dots, R_n)$  wielu zmiennych  $R_1, R_2, \dots, R_n$  - wartości poszukiwanych rezystancji sieci

$$Um_i^{(k)} = Um_i^k(R_1, R_2, \dots, R_n) = \frac{\sum_{p=1}^{N_2} C2_p \prod_{q=1}^{N-1} R_q}{\sum_{p=1}^{N_1} C1_p \prod_{q=1}^N R_q} R_k R_i \cdot I_0 \quad (10)$$

Zależność (10) jest modelem elektrycznym opisującym zagadnienie proste tomografii elektrycznej przy wykorzystaniu aproksymacji elementami skończonymi i zastosowaniu ekwiwalentnych układów zastępczych z elementów skupionych (rezystancyjnych, impedancyjnych) w danym przypadku - zależność wartości napięć mierzonych  $Um_i$  od wartości poszukiwanych rezystancji sieci  $R_1, R_2, \dots, R_n$  przy pobudzeniu obiektu prądem  $I_0$  w pozycji z numerem  $k$ . Analogiczny model można uzyskać dla elementów konduktancyjnych (oraz admitancyjnych) wykorzystując metodę potencjałów węzłowych.

## 5. Właściwości funkcji wyników pomiaru

Chociaż funkcja (10) jest funkcją nieliniową, jednak jest to funkcja z osobliwą nieliniowością [12]. Będziemy analizować niektóre ważne właściwości tej funkcji.

### 5.1. Wartość funkcji

Przy skokowej zmianie wszystkich argumentów  $m$  razy ( $R_s \rightarrow m \cdot R_s$ ) wartość funkcji zmieni się skokowo też dokładnie  $m$  razy

$$Um(m \cdot \mathbf{R}) = m \cdot Um(\mathbf{R}) \quad (11)$$

Właściwość (11) można w prosty sposób udowodnić drogą podstawienia w wyrażenie (10) nowych wartości argumentów  $R_s \rightarrow m \cdot R_s$  i przeprowadzenia następujących przekształceń.

### 5.2. Wartość pochodnej funkcji oraz jej gradientu

Wartość pochodnej funkcji jako wartość współczynnika  $J_{ij}^{(k)}$  macierzy Jakobiego jest oznaczona jako granica stosunku zmiany wartości spadku napięcia  $\Delta U_i$  na  $i$ -tej zewnętrznej gałęzi do zmiany wartości  $\Delta R_j$  rezystancji  $j$ -ej gałęzi

$$J_{ij}^{(k)} = \lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \left( \Delta U_i^{(k)} / \Delta R_j \right) \quad (12)$$

Na podstawie twierdzenia o wariacjach [14] przy zmianie rezystancji  $R_j$   $j$ -tej gałęzi o wartości  $\Delta R_j$ , wartość zmiany  $\Delta I_i$  prądu  $I_i$

w  $i$ -ej gałęzi (rys. 4) wynosi  $\Delta I_i^{(k)} = -\frac{g_{ij} \Delta R_j I_j^{(k)}}{1 + g_{jj} \Delta R_j}$ , gdzie  $g_{ij}$  jest kon-

duktancją wzajemną pomiędzy  $i$ -tą oraz  $j$ -tą gałęziami ( $g_{ij} = I/E_j = I_j/E_i$ ). Po uwzględnieniu tej zależności wartość pochodnej (12) wynosi

$$\begin{aligned} J_{ij}^{(k)} &= \lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i^{(k)}}{\Delta R_j} = \lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \frac{\Delta I_i^{(k)} R_i}{\Delta R_j} \\ &= -\lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \frac{g_{ij} \Delta R_j I_j^{(k)} R_i}{(1 + g_{jj} \Delta R_j) \Delta R_j} = -g_{ij} I_j^{(k)} R_i \end{aligned} \quad (13)$$

Przy zasilaniu obwodu bez źródeł wewnętrznych ze źródła prądowego (rys. 4) wskutek skokowej zmiany wszystkich rezystancji ( $R_i \rightarrow m \cdot R_i$ ) prądy w gałęziach pozostaną bez zmian natomiast skokowo zmieniają się napięcia międzywęzłowe i tym samym konduktancje wzajemne pomiędzy wszystkimi gałęziami zmieniają się odwrotnie do zmiany rezystancji ( $g_{ij} \rightarrow \frac{1}{m} g_{ij}$ ). Na podstawie tych uwag z analizy wyrażenia (13) wynika, że przy skokowej zmianie wszystkich rezystancji (argumentów  $R_i \rightarrow m \cdot R_i$ ) pochodna funkcji (odpowiedni człon macierzy Jakobiego) nie zmienia swojej wartości

$$\mathbf{J}(m \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{J}(\mathbf{R}) \quad (14)$$

Dzięki temu, że właściwość (14) odnosi się do każdego z argumentów, tę samą właściwość posiada gradient tej funkcji: nie zmienia on swojej wartości (oraz kierunku!) przy skokowej zmianie argumentów

$$\mathbf{grad}[Um(m \cdot \mathbf{R})] = \mathbf{grad}[Um(\mathbf{R})] \quad (15)$$

Z właściwości (11), (14) i (15) wynika, że wzdłuż dowolnej prostej linii  $L(\mathbf{R})$ , która przechodzi przez początek współrzędnych  $R_s=0$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) oraz punkt z współrzędnymi  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  w  $n$ -wymiarowej przestrzeni funkcja (10) zmienia się liniowo - proporcjonalnie do odległości tego punktu od początku współrzędnych, pochodne i gradient tej funkcji wzdłuż wymienionej linii nie zmieniają swoich wartości, a gradient jest skierowany wzdłuż tej linii.

W taki sam sposób można pokazać że przy skokowej zmianie wartości argumentów o  $m$  razy wartości pochodnych rzędu  $r$  zmieniają się odpowiednio do  $1/m^{r-1}$  razy.

### 5.3. Wartość funkcji w zadanym punkcie (przy zadanych wartościach argumentów)

Wykorzystując zależność (13), obliczymy wartość sumy iloczynów wartości członów  $J_{ij}$  macierzy Jakobiego i odpowiednich wartości  $R_j$  argumentów (rezystancji)

$$V_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n J_{ij}^{(k)} R_j = \sum_{j=1}^n g_{ij} I_j^{(k)} R_j R_i = R_i \sum_{j=1}^n g_{ij} E_j^{(k)} = R_i I_i^{(k)} = U_i^{(k)} \quad (16)$$

We wzorze (16) zostało uwzględnione to, że na podstawie twierdzenia o kompensacji [14, 15] wartość iloczynu  $I_j^{(k)} R_j$  prądu gałęzi  $I_j^{(k)}$  i rezystancji  $R_j$  tej gałęzi może być zastąpiona siłą elektromotoryczną  $E_j^{(k)}$ :  $I_j^{(k)} R_j = E_j^{(k)}$  oraz to, że zgodnie z metodą superpozycji [14, 15] prąd  $I_i^{(k)}$  w  $i$ -tej gałęzi równa się sumie prądów spowodowanych siłami elektromotorycznymi  $E_j$  we wszystkich gałęziach

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} E_j^{(k)} = I_i^{(k)} \quad [14].$$

Z analizy wzoru (16) wynika, że obliczone przy zadanych wartościach argumentów (wektor rezystancji  $\mathbf{R}$ ) wartości funkcji (wektor napięć  $\mathbf{U}(\mathbf{R})$  oraz macierz Jakobiego  $\mathbf{J}(\mathbf{R})$ ) są powiązane ze sobą równaniem liniowym

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U}(\mathbf{R}) \quad (17)$$

To znaczy że suma iloczynów pochodnych i wartości odpowiednich argumentów dokładnie równa się wartości funkcji przy tych samych wartościach argumentów. Stąd wypływa bardzo ważny wniosek, że zagadnienie odwrotne, które w zasadzie jest nieliniowym, w każdym punkcie poszukiwanych wartości argumentów  $\mathbf{R}$  (rezystancji, konduktancji itp. elementów aproksymacyjnych) opisuje się liniową zależnością analogicznie jak jest to w przypadku liniowych zagadnień. Zależność ta jest ważna w dowolnej  $k$ -tej iteracji:

$$\mathbf{U}^{(it)} = \mathbf{J}^{(it)} \cdot \mathbf{R}^{(it)}.$$

Dzięki właściwości (17) iloczyn pochodnych drugiego rzędu (macierzy  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ ) i odpowiednich argumentów  $\mathbf{R}^T$  oraz  $\mathbf{R}$  równają się dokładnie zeru:

$$\frac{1}{2} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{H}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = 0 \quad (18)$$

Podobnymi właściwościami charakteryzują się pochodne wyższych rzędów.

#### 5.4. Liniowy model funkcji przy nieznanymi wartościami argumentów

W praktyce wartości poszukiwanych rezystancji (wektor  $\mathbf{R}_x$ ) nie są znane i są otrzymywane drogą rozwiązania zagadnienia odwrotnego tomografii elektrycznej na podstawie uzyskanych wartości wyników pomiaru (wektor  $\mathbf{U}_m(\mathbf{R}_x) = \mathbf{U}_m$ ). Oczywiście, że i w tym przypadku spełniona jest zależność liniowa (17):  $\mathbf{J}(\mathbf{R}_x) \cdot \mathbf{R}_x = \mathbf{U}_m(\mathbf{R}_x) = \mathbf{U}_m$ , jednak przy braku znajomości macierzy Jakobiego  $\mathbf{J}(\mathbf{R}_x)$  niemożliwie jest wykorzystanie powyższego wyrażenia do obliczenia wektora  $\mathbf{R}_x$ . W tym celu wykorzystuje się macierz Jakobiego  $\mathbf{J}^{(it)}[\mathbf{R}^{(it)}]$  obliczoną przy zadanych (lub znalezionych w poprzednich iteracjach  $it$ ) wartościach wektora rezystancji  $\mathbf{R}^{(it)}$ . Dla obliczenia kolejnego przybliżenia wartości argumentów  $\mathbf{R}^{(it+1)}$  często wykorzystuje się Newtonowski algorytm bazujący na liniowym modelu układu nieliniowych równań, który w ogólnym przypadku ma postać [16]

$$\mathbf{U}_m \equiv \mathbf{U}^{(it)} + \mathbf{J}^{(it)}[\mathbf{R}^{(it)}] \cdot (\mathbf{R}^{(it+1)} - \mathbf{R}^{(it)}) \quad (19)$$

Wprowadzając do wzoru (19) zależność (16), otrzymamy uproszczony model

$$\mathbf{U}_m \equiv \mathbf{J}^{(it)}[\mathbf{R}^{(it)}] \cdot \mathbf{R}^{(it+1)} \quad (20)$$

Zależność (20) zasadniczo różni się od zależności (19). Po pierwsze, zależność (20) nie posiada części addytywnej. Dzięki czemu a także w skutek niezależności wartości członów macierzy Jakobiego od wartości skokowej zmiany argumentów, wszystkie skokowe zmiany parametru obiektu badanego będą odtwarzane od razu po następnej iteracji, teoretycznie bez błędów. Z drugiej strony, dzięki tej właściwości, przy braku informacji o poszukiwanym rozkładzie wielkości badanej a priori, niezależnie od rzeczywistego poziomu tych wartości, pierwsze przybliżenie zawsze można zadać stałym o dowolnej wartości i wynik odtwarzania obrazu w następnych iteracjach całkowicie nie zależy od przyjętej wartości. To znaczy, że przy nieznanym rozkładzie badanej wielkości a priori, w ogóle nie istnieje problem zadawania wartości jednostajnego początkowego rozkładu bliskiemu rozkładowi rzeczywistemu.

Następnie ważne jest to, że dla zwiększenia dokładności oraz szybkości zbieżności procesu iteracyjnego znalezienia wartości argumentów nie jest możliwe zastosowanie aproksymacji parabolicznej dla układu nieliniowych równań tomografii elektrycznej [13], gdyż ze względu na właściwość (17) wartość przyrostu drugiego rzędu w bieżącym punkcie równa się zeru.

#### 6. Zmodyfikowany algorytm odtwarzania rozkładu

Na podstawie uzyskanej zależności (20) algorytm odtwarzania rozkładu konduktywności upraszcza się i w iteracji z numerem  $it+1$  może być przedstawiony w postaci

$$\mathbf{R}^{(it+1)} = [\mathbf{J}^{(it)T} \mathbf{J}^{(it)} + \mu^{(it)} \mathbf{I}]^{-1} \cdot \mathbf{J}^{(it)T} \cdot \mathbf{U}_m \quad (21)$$

gdzie:  $\mu^{(it)} \mathbf{I}$  jest członem regularyzacyjnym, formowanym np. według metody Marquarda-Levenberga [16].

#### 7. Po sumowanie

- Macierze charakterystyczne oraz układy zastępcze są niezbędne do formowania macierzy układu równań opisujących zagadnienie proste tomografii elektrycznej. Współczynniki tych macierzy są zależne tylko od kształtu 2D elementów skończonych oraz wartości poszukiwanej konduktywności i są niezależne od wymiarów bezwzględnych elementów.
- Każdej macierzy charakterystycznej odpowiada jednoznaczny układ zastępczy zbudowany z elementów skupionych według metody potencjałów węzłowych. Elementom skończonym ze stałą aproksymacją konduktywności zawsze można nadać taki kształt, żeby odpowiadał im układ zastępczy wyłącznie z elementów pasywnych.
- Zagadnienie proste tomografii elektrycznej w postaci jawnej lub

niejawnej może być opisane układem funkcji nieliniowych, których niektóre właściwości są bliskie właściwościom funkcji liniowych.

- Dzięki właściwościom tych funkcji, niezależnie od rzeczywistego rozkładu badanej wielkości, jako początkowe przybliżenie można zadać rozkład jednostajny, poziom którego nie ma wpływu na zbieżność procedury iteracyjnej.
- Jednakowa skokowa zmiana wartości parametrów poszukiwanych powoduje taką samą zmianę wartości wyników pomiaru (wartości funkcji), nie powodując zmian elementów macierzy Jakobiego. Dlatego wartości tych wielkości uzyskuje się od razu, bez stanu przejściowego.

#### Literatura

- [1] Seagar A.D., Barber D.C., Brown B.H. Electrical Impedance Imaging. IEE Proceedings. Vol.134, Pt. A, No 2, February 1987, Pp.201-209.
- [2] Dickin F.J., Zhao X.J., Abdulach M.Z. and others. Tomographic Imaging of Industrial Process Equipment Using Electrical Impedance Sensors. Sensors VI: Technology, Systems and Applications. Proceedings of the 5-th Conference on Sensors and their Applications. Bristol, Philadelphia and New York, 1991, pp.215-220.
- [3] Dorozhovets M., Stadnyk B, Zavgorodny V., Kowalczyk A Electrical Impedance Tomography System Based on Equipotential Electrodes. Proceedings of the XV Symposium Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits. Liege, Belgium, 1998. pp.269-271.
- [4] Dorozhovets M., Kowalczyk A., Stadnyk B. Measurement of a surface temperature using multi-element resistance transducer. 47<sup>th</sup> International Scientific Colloquium. Ilmenau Technical University. September 23-26.2002. Pp. 548-549.
- [5] Dorożowec M., Fedorcuk A., Petrowska J. Matematyczne zasady prjamoi zadaczi tomografiji pruwodnosti. (Ukr.) Wisnyk DU"LP", "Automatyka, wimirjuwannia ta keruwannja". N324. c.43-51. 1998r.
- [6] Sikora J. Algorytmy numeracyjne w tomografii impedancyjnej i wiroprowadowej. Warszawa: OWPW, 2000.-212s.
- [7] Khan S.H., Abdullah F. Validation of Finite Element Modeling of Multielectrode Capacitive System for Process Tomography Flow Imaging. Tomographic techniques, 1993, p.63-73.
- [8] Sergijenko I, Skopecki V, Dejneka V. Matematyczjeskoje modelirowanije i issledowanije processow w nejnorodnych srjedach. (Ros.) Kijów: Naukowa dumka, 1991.
- [9] Field Analysis Translator (FAT). Reference Manual and User Guide. V.3.41, 1994.
- [10] Dorozhovets M., Kowalczyk A., Stadnyk B. Investigation of the Reference Model Used for Verification of the Conductance Tomography System. IMEKO TC7 Symposium Cracow, June 25-27, 2002.
- [11] Dorożowec M., Kowalczyk A., Stadnyk B. Badania Modelu Jednoczesnej Aproksymacji Potencjału i Przewodności w Tomografii Impedancyjnej. Krajowy Kongres Metrologii: KKM-2001, 24.06-27.06.2001, Warszawa. Materiały kongresu w 3 tomach. T.2. Str. 553-556.
- [12] Dorożowec M. Model i wyniki badań zagadnienia odwrotnego tomografii elektrycznej. IX Międzynarodowe Seminarium Metrologów. Metody i Technika Przetwarzania Sygnałów w Pomiarach Fizycznych. Rzeszów 23-25 października 2001. Rzeszów.
- [13] Dorozhovets M., Kowalczyk A., Stadnyk B. 1<sup>st</sup> iteration reconstruction algorithm for electrical conductance tomography. 2<sup>nd</sup> International Symposium on Process Tomography in Poland 2002. Proceedings. 11-12 September 2002, Wrocław, Poland. P. 169-174.
- [14] Bessonow A. Tjeorjeticzeskije osnovy eljktrotechniki. (Ros.) Ė.: Wysszaja szkola. 1978, 645s.
- [15] Mikołajuk K., Trzaska Z. Elektrotechnika teoretyczna. Analiza i synteza obwodów liniowych. PWN. Warszawa, 1984.
- [16] Dennis J.E., Shnabel R.B. Numerical method for unconstrained Optimization in Nonlinear Equations. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 1983.

**Title:** The discrete models of the electrical tomography tasks