Krzysztof GAŁKOWSKI, Wojciech PASZKE, Bartłomiej SULIKOWSKI
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI
INSTYTUT STEROWANIA I SYSTEMÓW INFORMATYCZNYCH

Układy wielowymiarowe

Prof. dr hab. inż. Krzysztof Gałkowski
Pracuje w Instytucie Sterowania i Systemów Informatycznych Uniwersytetu Zielonogórskiego. 2000- Visiting Professor /pozycja tytularna/ w The University of Southampton, UK; Współorganizator i współprzewodniczący międzynarodowej konferencji THE SECOND INTERNATIONAL WORKSHOP ON MULTIDIMENSIONAL (ND) SYSTEMS (NDS-2000), Czerwiec 27-30, 2000, Zamek Czocha, Dolny Śląsk, Polska; Współorganizacja minisymposium: Gałkowski K., Rogers E., V. Vinnikov, Special Session on Multidimensional (nD) na międzynarodowym symposium MTNS 2002, Mathematical Theory of Networks and Systems, Notre Dame, Indiana, USA. Autor monografii: Gałkowski K., *State-space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD (n>2) Case*, Springer Verlag, LNCIS 2001. Redaktor książki: Gałkowski K., Wood J., Eds., *Recent developments in nD systems*, Taylor & Francis, 2001

Mgr inż. Bartłomiej Sulikowski
Absolwent Politechniki Zielonogórskiej. Zatrudniony w ISSI od 2001 r. na stanowisku asystenta. Obecnie przygotowuje otwarcie przewodu doktorskiego w tematyce związanej z badaniem własności Liniowych Procesów Powtarzalnych.

Mgr inż. Wojciech Paszke
Pracuje w Instytucie Sterowania i Systemów Informatycznych Uniwersytetu Zielonogórskiego na stanowisku asystenta. Główne badania prowadzi w zakresie zastosowania metod LMI do analizy i syntezy układów nD oraz procesów powtarzalnych. W lipcu 2002 został otwarty jego przewód doktorski.

Streszczenie

W pracy zawarty jest rys historyczny oraz przegląd podstawowych problemów teoretycznych i możliwości zastosowań praktycznych układów wielowymiarowych (nD). Omówiono też nowe trendy i otwarte, nierozwiązane do tej pory problemy badawcze w tej dziedzinie.

Abstract

The history, theoretical basics and practical applications of multidimensional (nD) systems are briefly revisited. New directions and current open problems are discussed too.

1. Wstęp

Układy wielowymiarowe, nazywane często w literaturze nD, są uogólnieniem klasycznych układów / systemów, dla rozróżnienia nazywanych tu układami 1D. Już w fazie nazewnictwa mamy tu pewną niejasność. Nazwa układy wielowymiarowe, nD, czy czasem też mD, jest bezpośrednim tłumaczeniem angielskiego „multidimensional" a nie multivariable. Jest to istotne, gdyż w klasycznym rozumieniu pojęcia układów wielowymiarowych w sensie „multivariable", zmienne zależne systemu, tj. wejścia, wyjścia czy stany są wektorami. W tej nowej dziedzinie nie jest to istotą sprawy. Mamy natomiast do czynienia z większą liczbą zmiennych niezależnych - dla układów 2D z dwiema, dla układów nD z dowolną liczbą zmiennych (>2). Niejako mamy więc układ o czasie wektorowym. W praktyce na ogół, jedna tylko z tych zmiennych reprezentuje czas, gdy pozostałe mają charakter przestrzenny lub reprezentują kolejne przejścia, fazy procesu, czy też próby lub iteracje rozwiązywania jakiegoś problemu. Można też mówić, że istnieje w nich więcej niż jeden kierunek propagacji informacji.

Teoria układów nD nie jest bezpośrednim uogólnieniem klasycznej teorii systemów 1D. Pojawia się wiele trudności związanych z brakiem lub stopniem komplikacji istniejącego aparatu matematycznego, ale też pojawiają się nowe, zupełnie nieznane do tej pory możliwości. Układy nD nie są jednak tylko bytem "matematycznym" ale znajdują również wiele praktycznych zastosowań leżących przede wszystkim w przekroju automatyki, informatyki, telekomunikacji, akustyki (analiza i obróbka sygnałów, filtracja cyfrowa, modelowanie zjawisk opisywanych równaniami o pochodnych cząstkowych jako obwody nD, modelowanie zjawisk i sterowanie w sieciach komputerowych). Szczególnie interesującym, ważnym z punktu widzenia rozlicznych zastosowań, jak np.:

- sterowanie maszynami w górnictwie, hutnictwie, papiernictwie, rolnictwie,
- iteracyjne sterowanie z uczeniem dla potrzeb robotyki, i wielu innych dziedzin,
- iteracyjne sterowanie suboptymalne bazujące na zasadzie maksimum,

przypadkiem szczególnym układów 2D (n=2) są tak zwane procesy powtarzalne, którym również poświęcimy tu wiele uwagi.

Celem niniejszej pracy jest zwięzłe przedstawienie:

- rysu historii badań nad układami nD w świecie i w Polsce,
- podstawowych problemów, przy wyeksponowaniu różnic i podobieństw, teorii systemów nD versus systemy klasyczne,
- nierozwiązanych, otwartych problemów teorii systemów nD, i nowych trendów rozwojowych,
- przeglądu zastosowań praktycznych, i w końcu

- osiągnięć zespołu zielonogórskiego w tej dziedzinie.

Ze względu na ograniczony rozmiar artykułu nie podajemy cytowań do poszczególnych nazwisk i zagadnień, a tylko podajemy kilka podstawowych pozycji książkowych gdzie odpowiednie cytowania mogą być znalezione.

2. Systemy nD – historia i podstawowe pojęcia

Pierwsze prace w dziedzinie układów nD pochodzą z obszaru obwodów elektrycznych. Jako narodziny dziedziny uznaje się pojawienie w roku 1960 pracy Ozaki, Kasami gdzie rozważano liniowy lecz niestacjonarny obwód złożony z rezystorów i kondensatorów o stałej i liniowo zmiennych wartościach konduktancji i pojemności. Głównym wynikiem tej pracy było zwrócenie uwagi, że wprowadzenie pewnych nowych zmiennych pozwala przedstawić admitancję wejściową takiego obwodu jako funkcję wymierną dwu zmiennych o pewnych dodatkowych własnościach, noszącej nazwę funkcji reaktancji układu o parametrach skupionych, czyli o stałych współczynnikach.

Następną, przełomową pracą, była praca Ansella z roku 1964, w której przedstawiono podobny wynik ale zastosowany do zupełnie innej sytuacji. Przedmiotem tej pracy były układy o parametrach rozłożonych, a mianowicie połączenia kaskadowe odcinków linii długich o opóźnieniach będących naturalnymi wielokrotnościami pewnego podstawowego opóźnienia τ *(ang. conmesurate)* i skupionych elementów reaktancyjnych (cewek indukcyjnych, kondensatorów i idealnych transformatorów). I znowu okazało się, że zastosowanie odpowiedniej transformacji zmiennych prowadzi do funkcji reaktancji dwu zmiennych. W tym wypadku, impedancja wejściowa obwodu jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej p i e^{bp}. W tym wypadku, transformacja $e^{bp} \Leftrightarrow \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ prowadzi do zamierzonego wyniku. Należy tu nadmienić, że wiele ciekawych wyników poświęconych rozszerzeniu tego rozwiązania zostało uzyskanych przez polskich uczonych M.S. Piekarskiego i M. Uruskiego z Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej. Stąd jest już tylko mały krok aby zauważyć podobieństwa i zastosować identyczne podejście do analizy i sterowania układami z opóźnieniami, dla których stosowanie metod klasycznych wiąże się z dużym stopniem trudności. Zajęło to jednak kilkanaście lat, a rozwiązanie zostało przedstawione po raz pierwszy przez E. Kamen'a.

Te pierwsze dwie prace rozpoczęły swoisty „boom" na układy nD, które miały pozwolić na rozwiązanie wielu trudnych lub dotychczas nierozwiązanych zagadnień teorii obwodów i systemów. W tym czasie poświęcano wiele uwagi zagadnieniom syntezy układów elektrycznych o wymaganych parametrach. Pojawiło się więc wiele prac dotyczących tych zagadnień dla układów, najpierw 2D. Odkryto jednak, że układy 2D, rozważane wtedy jako wyłącznie liniowe, mimo iż niosą wiele możliwości, są jednak również bardzo „trudne" i wiele zagadnień jest nadal nierozwiązanych. Z tym okresem badań, prowadzonych głównie jako dział teorii obwodów wiążą się nierozerwalnie takie nazwiska jak, Koga, N.K. Bose i Piekarski.

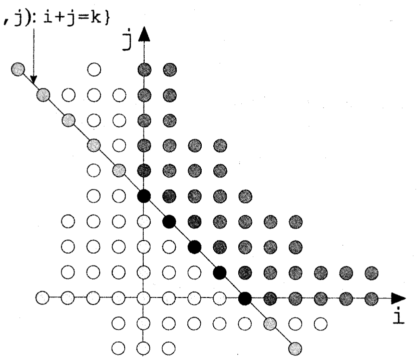
Widać więc, że w początkowym etapie badania układów nD stosowane były uogólnione metody częstotliwościowe, oparte na badaniu funkcji / macierzy transmitancji, które w tym wypadku chociaż nadal są funkcjami czy macierzami wymiernymi ale wielu zmiennych zespolonych. Już zastosowanie metodologii 2D do linii długich czyli do układu o parametrach rozłożonych nasunęło sugestię zastosowania systemów 2D i nD do bardzo trudnego problemu badania układów opisywanych układami równań różniczkowych bądź różnicowych o pochodnych / różnicach cząstkowych. Zajęło to jednak wiele lat i pierwsze pionierskie w tej dziedzinie prace Alfreda Fettweisa, który około roku 1976 uogólnił swoją ideę filtru falowego do układów 2D i zastosował do takich zagadnień. Powstała wokół niego międzynarodowa szkoła z takimi reprezentantami jak Anton Kummert - Wuppertal, Rudolf Rabenstein – Norymberga, czy Stuart Lawson – Warrick i badania w tej dziedzinie są nadal z powodzeniem kontynuowane.

Opis transmitancyjny poprzez wielowymiarowe przekształcenia całkowe typu Laplace'a czy „z" czy też innego typu jak np. ostatnio falkowe, wiążą obszar uogólnionej częstotliwości z równaniami różniczkowymi lub różnicowymi ale ciągle typu wejście-wyjście. Następnym etapem rozwoju systemów nD jako dziedziny było opracowanie metod stanowych dla układów 2D i nD. Wtedy już metody stanowe dla układów klasycznych 1D były dobrze rozwinięte i znane były ich wielkie możliwości. W układach nD wprowadzenie pojęcia stanu nie było jednak tak oczywiste jak dla układów klasycznych. Należy tu nadmienić, że pierwsze prace były robione dla układów dyskretnych, ze względu na ich zastosowania do analizy i obróbki sygnałów i obrazów przesyłanych cyfrowo. Rozważmy więc dyskretny układ 2D opisany przez wektor cech w punktach płaszczyzny o całkowitych współrzędnych. Pojawia się natychmiast pytanie co jest teraz przeszłością, co teraźniejszością, a co przyszłością. To już nie jest przecież liniowo uporządkowana prosta, i tu po prostu nie ma żadnego porządku liniowego. Zaproponowano więc podejście polegające na wprowadzeniu linii rozdziału o postaci np.

$$T_k := \{(i,j) : i + j = k\} \qquad (3)$$

reprezentującej k-ty czyli teraźniejszy „moment" uogólnionego czasu, patrz Rys. 1.

Teraz, linie leżące na prawo, do góry od linii podziału będą reprezentować przyszłą dynamikę układu, a te położone na lewo, dół – przeszłą dynamikę układu. Płacimy tu jednak wielką cenę, stan układu na k-tej linii T_k, zwany stanem globalnym, jest nieskończenie wymiarowy, choćby dla tego, że T_k zawiera nieskończenie wielką liczbę punktów. Jeżeli ograniczymy się do układów przyczynowych, gdzie tylko wartości w prawej górnej ćwiartce są niezerowe, możemy co prawda uzyskać skończenie wymiarowy model ale wymiar stanu będzie rósł w miarę rozwijania się dynamiki, co jest związane z faktem, że każde T_k ma $k+1$ punktów. Mamy więc do czynienia z układem niestacjonarnym o rosnącym wymiarze wektora stanu, co jest bardzo kłopotliwe dla dalszej analizy. Podejścia takie były jednak rozważane np. Porter i Aravena, a także przez Kaczorka. Nawiasem mówiąc, w zależności od potrzeb, możemy definiować inne linie podziału T_k, niekoniecznie linie proste, co jest często spotykane w zagadnieniach związanych z analizą i obróbką obrazów (sygnałów wielowymiarowych).



Rys.1: Globalny wektor stanu dla układu 2D

Aby uniknąć poprzednio opisanych problemów, stosuje się tak zwane lokalne modele stanowe, gdzie wektor stanu jest przyporządkowany każdemu punktowi płaszczyzny dyskretnej Z^2. Pierwszy model został opracowany przez Roesser'a i pochodzi z roku 1975 . Polega on na wprowadzeniu dwu frakcji – pod-wektorów stanu lokalnego rozwijających swoją dynamikę w dwu prostopadłych kierunkach. Może być on przedstawiony jak następuje:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + Bu(i,j),$$

$$y(i,j) = C \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + Du(i,j) \qquad (4)$$

gdzie $i, j \in N$ oznacza elementy zbioru liczb naturalnych, $x^h(i,j) \in R^{t_1}$ i $x^v(i,j) \in R^{t_2}$ oznaczają tak zwane poziome i pionowe lokalne pod-wektory stanu, $y(i,j) \in R^q$ i $u(i,j) \in R^p$ oznaczają wektory wyjść i wejść, odpowiednio, a A, B, C i D są macierzami ze stałymi rzeczywistymi elementami, o odpowiednich wymiarach. Zauważmy, że dla tego modelu zwykły warunek początkowy dla $i = j = 0$ jest niewystarczający i aby wyliczyć odpowiedź na zadany ciąg wejściowy, musimy znać warunki brzegowe $x^h(0,j) = \hat{x}^h(j), j = 0,1,2,\ldots,$ $x^v(i,0) = \hat{x}^v(i), i = 0,1,2,\ldots$. Czwórka macierzy $\{A, B, C, D\}$ jest często nazywana realizacją stanową typu Roessera systemu 2D.

Drugim powszechnie stosowanym modelem jest model Fornasini'ego-Marchesini-ego (1978). Uogólniona jego wersja znana również jako model ogólny Kurka może być przedstawiona jako

$$\begin{aligned} x(i+1,j+1) &= A_1 x(i+1,j) + A_2 x(i,j+1) + \\ &+ A_3 x(i,j) + Bu(i,j) + B_1 u(i+1,j) + B_2 u(i,j+1) \\ y(i,j) &= Cx(i,j) + Du(i,j) \end{aligned} \qquad (5)$$

gdzie $x(i,j) \in R^n$ jest lokalnym wektorem stanu, wejścia i wyjścia są definiowane jak poprzednio, również teraz musimy zadawać warunki brzegowe o postaci $x(0,j) = \hat{x}(j), j = 0,1,2,\ldots, x(i,0) = \hat{x}(i), i = 0,1,2,\ldots$. Zwróćmy jeszcze uwagę, że jeżeli macierze A_3 i B w (5) są zerowe to model jest nazywany modelem Fornasini'ego Marchesini-ego pierwszego stopnia, a jeżeli A_3, B_1 i B_2 są zerowe to model jest nazywany modelem Fornasini'ego, Marchesini'ego drugiego stopnia. Należy tu zauważyć, że modele typu Roesser'a i typu Fornasini'ego, Marchesini'ego nie są w pełni niezależne i na ogół, mając jeden z nich można też uzyskać drugi, chociaż można pokazać, że w pewnych warunkach model Roesser'a jest ogólniejszy.

Pojawienie się metod stanowych dla układów 2D skompletowały podstawy teorii systemów w tej klasie i badania nad nimi stały się bardzo popularne. Modele stanowe szybko uogólniono dla dowolnego $n > 2$, potem do postaci ciągłej, bądź co było niemożliwe dla układów 1D, do postaci dyskretno-ciągłej Rozpoczęto intensywne badania nad własnościami teorio-systemowymi układów 2D i nD, jak sterowalność, obserwowalność, minimalność, stabilność, stabilizacja za pomocą sprzężenia zwrotnego, sterowanie optymalne, układy osobliwe (deskryptorowe), układy z opóźnieniami, sterowanie odporne, H_∞ itd. We wszystkich tych problemach stosowano zarówno metody stanowe jak i transmitancyjne, oczywiście za wyjątkiem sterowalności i obserwowalności, które są nierozerwalnie związane z opisem stanowym. Rozwinięto znacznie wachlarz zastosowań podejścia nD, jak np. w procesach powtarzalnych, które będą omawiane w jednym z następnych rozdziałów, w telekomunikacji – cyfrowe przetwarzanie i transmisja sygnałów wielowymiarowych, np. obrazów czy w sterowaniu procesami opisywanymi układami równań różniczkowych / różnicowych o pochodnych / przyrostach cząstkowych. Z tym nowym etapem rozwoju układów 2D wiążą się wielkie nazwiska zarówno teorii obwodów jak i sterowania jak, Nirmal Kumar Bose, Ettore Fornasini, Eliahu Jury, Tadeusz Kaczorek, Marian S. Piekarski, Dante Youla, Spyros Tzafestas, Jan Willems, i wielu, wielu innych. Należy tu dodać, że teoria układów 2D i nD dostarcza wielu ciekawych problemów matematycznych, stąd i duże zainteresowanie matematyków tymi badaniach, jak np. oprócz już wymienionego Jana Willemsa, Bruno Buchberger, Ivan Gaishun, Jean F. Pommaret, Clive Pugh, Stanisław Walczak.

Na zakończenie tej części zrekapitulujemy udział polskiej nauki w rozwój dziedziny układów 2D i nD. Początki były związane z dwoma, już wspomnianymi nazwiskami, Tadeusz Kaczorek z Politechniki Warszawskiej i Marian Piekarski z Politechniki Wrocławskiej. Obaj zainteresowali się tematyką układów nD i odcisnęli swoje piętno na niej, bez wątpienia w sensie międzynarodowym. Spuścizna naukowa Kaczorka jest olbrzymia, wiele książek wydanych za granicą i w kraju w tym i takie, które weszły na stałe do kanonu pozycji podstawowych w dziedzinie, mnóstwo artykułów w czasopismach i niepoliczalna liczba artykułów konferencyjnych. Piekarski, który opublikował znacznie mniej, ma jednak też bardzo ciekawe, można rzec podstawowe pozycje, które do tej pory są ciągle cytowane. Obaj podchodzą do systemów nD z nieco innej perspektywy, Kaczorek, raczej czysto teoretycznie i bardziej z punktu widzenia teorii systemów i sterowania a Piekarski, choć również uzyskał wiele bardzo interesujących wyników teoretycznych, szuka bardziej konkretnych zastosowań w telekomunikacji. Potem pojawili się inni, jak Jerzy Klamka – bardzo ważne wyniki ze sterowalności różnych klas układów nD, Jerzy Kurek, Stanisław Walczak i pierwszy z autorów tego opracowania, który powinien chyba napisać, że czuje się w równej mierze uczniem obu prekursorów badań nad układami nD w Polsce, a teraz rozwija je ze swoim młodym zespołem, zaangażowanym w części w tworzeniu tego opracowania.

3. Systemy nD a klasyczne systemy 1D i problemy otwarte

Teoria systemów 2D i ogólnie nD nie jest prostym uogólnieniem teorii systemów klasycznych choć zajmuje się tymi samymi problemami, jak na przykład:

- konstrukcja realizacji stanowych, i badanie ich ekwiwalentności,
- sterowalność i obserwowalność,
- stabilność, stabilizacja, sterowanie w pętli sprzężenia zwrotnego,
- istnienie i konstrukcja realizacji minimalnej,
- sterowanie optymalne, i wiele innych.

Dla układów 2D i nD wiele zagadnień dawno już rozwiązanych dla klasycznych układów liniowych jest nadal nierozwiązanych albo bardzo trudnych do rozwiązania. Jest to związane z faktem, że równania układów nD są równaniami o pochodnych / przyrostach cząstkowych, a w sferze algebraicznej, pierścień wielomianów wielu zmiennych nie jest pierścieniem Euklidesowym, czyli nie ma w nim algorytmu dzielenia, nie jest on nawet tzw. pierścieniem głównych ideałów. Ma to daleko idące konsekwencje, jak na przykład to, że dwa wielomiany mogą mieć wspólny pierwiastek a nie mieć wspólnego czynnika, jak na przykład $p(z_1,z_2)=(1-z_1)(1-z_2)$ i $q(z_1,z_2)=2-z_1-z_2$. Jest oczywiste, że para $z_1=1, z_2=1$ jest wspólnym pierwiastkiem obu wielomianów ale nie mają one wspólnego czynnika. Stąd, możemy mieć sytuację nieznaną dla układów klasycznych, gdzie istnieją wspólne pierwiastki w liczniku i mianowniku funkcji transmitancji (funkcji wymiernej wielu zmiennych), a zatem nieoznaczoności, które są nieusuwalne poprzez uproszczenie. Taka sytuacja jest nazywana nieistotnymi osobliwościami drugiego stopnia. Ma to znaczne konsekwencje dla stabilności. Goodman pokazał, że na przykład funkcja wymierna $g(z_1,z_2)=\dfrac{(1-z_1)(1-z_2)}{2-z_1-z_2}$ jest niestabilna, tymczasem gdy $g(z_1,z_2)=\dfrac{(1-z_1{}^8)(1-z_2{}^8)}{2-z_1-z_2}$ jest. A więc LICZNIK FUNKCJI WYMIERNEJ MOŻE WPŁYWAĆ NA STABILNOŚĆ, na szczęście tylko w wypadku istnienia nieistotnych osobliwości drugiego stopnia.

Jeszcze bardziej skomplikowana sytuacja występuje dla macierzy wymiernych, czyli gdy układ jest wielowymiarowy w zwykłym sensie. Rozważmy macierz wielomianów wielu zmiennych $A_{p,q}(.)$, $p<q$ od $z_1,\ldots,z_n$ istnieją trzy formy względnej pierwszości:

- czynnikowa – wszystkie lewe dzielniki $Q(.)$ macierzy A, tj. $A(.)=Q(.)A'(.)$ są unimodularne (ich wyznacznik jest jednostkowy),
- minorowa – wszystkie $p\times p$ minory macierzy A nie mają wspólnych wielomianowych czynników, i
- zerowa – nie istnieje takie $z_1,\ldots,z_n$, które jest zerem wszystkich $p\times p$ minorów macierzy A.

Dla macierzy wielomianowych jednej zmiennej wszystkie trzy formy są równoważne gdy dla układów nD „zerowa" względna pierwszość pociąga „minorową" a ta z kolei pociąga „czynnikową", przy czym dla układów 2D „minorowa" i „czynnikowa" są równoważne, ale już dla 3D nie. Stąd można wywnioskować, że istotne różnice pojawiają się na drodze uogólnienia teorii systemów z przypadku 1D do 2D i z 2D do 3D. Przy dalszych uogólnieniach nie zaobserwowano istotnych różnic.

Innym dobrze znanym faktem jest, że realizacja minimalna układu 2D nie musi, jak to jest dla układów 1D, być jednocześnie sterowalna i obserwowalna. Co więcej, dla układów 2D i nD minimalność opisu stanowego nie została jeszcze jednoznacznie rozwiązana, i istnieją tylko rozwiązania cząstkowe, jak np. dla układów o separowalnych wielomianach charakterystycznych (iloczyny wielomianów jednej zmiennej). Zagadnieniem tym zajmowało się wielu uczonych, jak np. Eising, Gałkowski, Kummert, Żak, ale wydaje się, że jeszcze nie wszystko zostało wyjaśnione. Podobnie jest jeszcze wiele możliwości uogólniania dotychczasowych pojęć sterowalności i obserwowalności.

Takich jeszcze nierozwiązanych do tej pory podstawowych zagadnień jest znacznie więcej, np. dla układów 1D położenie biegunów całkowicie określa dynamikę układu i mamy dużą wiedzę w jakie miejsca płaszczyzny zespolonej przesuwać bieguny, aby zapewnić sobie określoną dynamikę. Dla układów 2D i nD nie dysponujemy taką pełną wiedzą, możemy tylko, podobnie jak dla przypadku 1D, scharakteryzować w terminach biegunów stabilność i ewentualnie marginesy stabilności. Należy tu podkreślić, że bieguny układu nD nie są izolowanymi punktami jak to jest dla układów klasycznych 1D, a pewnymi rozmaitościami różniczkowymi. Dla wyjaśnienia tego faktu wróćmy do wielomianu $q(z_1,z_2)=2-z_1-z_2$ i zauważmy, że wszystkie punkty $(z_1,z_2)=\ldots(-1{,}3),(0{,}2),(1{,}1),(2{,}0),(3{,}-1)\ldots$ są jego pierwiastkami i trudno jest powiązać dynamikę układu z taką linią pierwiastkową, a także trudno jest testować czy każde $(z_1,z_2)=\ldots(-1{,}3),(0{,}2),(1{,}1),(2{,}0),(3{,}-1)\ldots$ itp. leży w lewej stronie hiperpłaszczyzny zespolonej lub wewnątrz multi dysku, co jest odpowiednikiem tradycyjnego spektralnego warunku stabilności układu.

Reasumując, układy nD jest to ciągle rozwijająca się, atrakcyjna dla badaczy, ze względu na wielość problemów, jak i dla inżynierów, ze względu na rozliczne zastosowania, o których będzie mowa w następnych rozdziałach, dziedzina.

4. Nowe trendy i przegląd zastosowań

Jedną z burzliwie rozwijających się gałęzi układów 2-D są tak zwane procesy powtarzalne. Charakteryzują się one powtarzalnością wykonywanych operacji i w swej podstawowej wersji prowadzą do dyskretno - ciągłych układów 2-D, lub czysto dyskretnych. Istotą jest, że dynamika procesu przebiega na danym etapie, pasie czy też w ramach danej iteracji, w skończonym czasie lub przestrzeni, następnie jest zatrzymywany i rozpoczyna się na nowo w zmienionych warunkach. Nie jest więc to proces okresowy gdyż zmiana np. warunków początkowych dla każdego nowego etapu uniemożliwia cykliczność rozwiązań. Powyższa charakterystyka wyraźnie wskazuje na to, że opis dynamiki procesu powtarzalnego wymaga dwu niezależnych zmiennych, jednej zawsze dyskretnej tj. numeru pasa, iteracji czy fazy procesu i drugiej, ciągłej lub dyskretnej, w zależności od procesu lub sposobu operowania, sterowania nim, tj. pozycji na bieżącym pasie. Opis stanowy dla tych zjawisk został wprowadzony przez Rogersa i Owensa dla dyskretnych, liniowych procesów powtarzalnych w postaci

$$\begin{aligned} X(k+1,t+1) &= AX(k+1,t) + BU(k+1,t) + B_0Y(k,t) \\ Y(k+1,t) &= CX(k+1,t) + DU(k+1,t) + D_0Y(k,t) \end{aligned} \quad (6)$$

$k = 0,1,\dots; t = 0,1,\dots,\alpha-1$ i dla tzw. liniowych różniczkowych procesów powtarzalnych w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}X(k+1,t) &= AX(k+1,t) + BU(k+1,t) + B_0Y(k,t), \\ Y(k+1,t) &= CX(k+1,t) + DU(k+1,t) + D_0Y(k,t). \end{aligned} \quad (7)$$

$k = 0,1,\dots; 0 \le t \le \alpha$ gdzie $X(k,t)$, $U(k,t)$, i $Y(k,t)$

reprezentują wektor stanu, wejścia i profilu pasa będącego również wektorem wyjścia, a wszystkie macierze są rzeczywiste o odpowiednich wymiarach. W obu wypadkach musimy znać warunki brzegowe tj. wartości dla $X(k,0)$, $k = 0,1,\dots$ oraz $Y(0,t)$; $0 \le t \le \alpha$.

Metodyka ta znalazła wiele zastosowań w przemyśle, a zwłaszcza w górnictwie i hutnictwie. Została sformułowana ogólna klasa procesów, zwanych sieciowymi (*ang. web forming processes*), jak produkcja papieru, tekstyliów, naparowywanie warstw itp. gdzie naturalnym podejściem jest podejście procesów powtarzalnych. Przykładem może być walcowanie blachy.

Również, bardzo ważne, m.in. w robotyce, zagadnienie uczenia iteracyjnego zostało sformułowane w terminach tej klasy układów.

Porównanie równań (6) i (7) wskazuje, że procesy powtarzalne, a w ogólności układy 2D bądź nD mogą mieć charakter „hybrydowy", tj. „wzdłuż" jednej zmiennej mogą być ciągłe a „wzdłuż" innej mogą być dyskretne. Naturalnym uogólnieniem tej sytuacji, może być przypadek „typowego" systemu hybrydowego zawierającego frakcje „tradycyjne" – ciągłe i / lub dyskretne oraz frakcje dyskretne w sensie zdarzeniowym. Szczególnie interesujące wydaje się być sytuacja, gdy frakcja zdarzeniowa jest opisana w formalizmie (max, +). Pierwsze badania w tej dziedzinie zostały właśnie rozpoczęte w zespole zielonogórskim.

Układy nD są żywą, intensywnie rozwijającą się dziedziną. Istnieje w niej wiele ciekawych trendów mających wiele różnorodnych zastosowań. Jednym z nich jest uogólnienie dla układów nD i procesów powtarzalnych, metod Liniowych Nierówności Macierzowych (LMI) – ciekawego numerycznego narzędzia optymalizacyjnego pozwalającego na efektywne rozwiązywanie wielu ważnych i bardzo trudnych zagadnień sterowania. Są to badanie stabilności, stabilizacja w pętli sprzężenia zwrotnego, sterowanie optymalne, czy H_∞, uwzględnienie w tych zagadnieniach istnienia opóźnień czy niepewności. Te ostatnie możliwości są szczególnie ważne ze względu na zastosowania praktyczne jak na przykład zastosowanie Internetu do sterowania obiektami rzeczywistymi, co wiąże się z występowaniem wielorakich, nieprzewidywalnie zmiennych opóźnień. Niepewność, z kolei, bardzo często występuje w świecie rzeczywistym ze względu na nie dokładność modeli matematycznych, którymi dysponujemy i możliwością fluktuacji parametrów obiektu rzeczywistego wokół modelu nominalnego, co wiąże się z koniecznością stosowania tak zwanych strategii odpornych.

Ciekawym i ostatnio rozpowszechnionym podejściem do analizy systemów, zarówno klasycznych, jak i nD, są tak zwane metody behawioralne, zapoczątkowane przez Jana Willems'a i jego grupy. Ich cechą charakterystyczną jest badanie struktury algebraicznej zbioru trajektorii systemu, czyli rozwiązań równań różniczkowych. Jako ciekawostkę można podać, że w tym podejściu nie dzieli się tradycyjnie zmiennych systemowych na zmienne wejściowe, wyjściowe i stanu a rozważa się je wszystkie równoprawnie. Podejście to wymaga zaawansowanej wiedzy matematycznej głównie algebry abstrakcyjnej, pozwala jednak na scharakteryzowanie bardzo trudnych do ujęcia w inny sposób zagadnień, jak na przykład problemu biegunów układu nD. Wśród najbardziej znanych nazwisk w tej gałęzi występują Jean F. Pommaret, Alban Quadrat, Paula Rocha Maria Elena Valcher, Geoffrey Wood, Raimo Ylinen i Eva Zerz. Ciekawym przykładem zastosowania metod algebraicznych i związanych z nimi metod komputerowej algebry są tak zwane bazy Grobnera, wprowadzone przez Bruno Buchbergera, i ich zastosowania do analizy i syntezy układów nD, patrz np. prace Bose, Z. Lin. Ostatnio pojawiło się też wiele prac nad klasą układów nD, charakteryzujących się wymogiem aby wszystkie zmienne zależne przyjmowały wartości nieujemne lub dodatnie. Jest to wymóg pewnych specyficznych zastosowań, jak np. procesy elektroniczne czy biologiczne. W tej dziedzinie szczególnie aktywny jest Kaczorek.

5. Badania nad układami nd prowadzone w instytucie sterowania i systemów informatycznych w zielonej górze.

Badania prowadzone są równolegle nad wieloma aspektami teorii i zastosowań układów nD ze szczególnym uwzględnieniem procesów powtarzalnych. Początkowo badania były prowadzone głównie nad problemem konstrukcji realizacji stanowych dla układu 2D i nD z danych wejściowo wyjściowych np. kiedy znana jest macierz transmitancji operatorowych wielu zmiennych zespolonych. Opracowano oryginalna metodę nazwaną Algorytmem Operacji Elementarnych, która pozwala wyznaczyć klasę równoważnych realizacji stanowych o jak najmniejszym możliwym wymiarze przestrzeni stanów. Całość wyników została zawarta w monografii.

Wiele uwagi poświęca się ostatnio zastosowaniu metod LMI do badania stabilności, i stabilizacji w pętli sprzężenia zwrotnego układów 2D i nD, z uwzględnieniem procesów powtarzalnych, w warunkach niepewności, przy obecności opóźnień. W tej dziedzinie współpracujemy aktywnie z Uniwersytetami w Southampton i Sheffield oraz z The Hong Kong University. Chociaż badania w tej dziedzinie są prowadzone stosunkowo od niedawna, uzyskano już szereg ciekawych wyników, które już zostały opublikowane bądź są w trakcie publikacji.

W dziedzinie procesów powtarzalnych zajmowano się takimi zagadnieniami jak:

- budowa realizacji stanowych i analiza własności procesów powtarzalnych,
- opracowanie efektywnych metod stabilizacji i sterowania procesami powtarzalnymi,
- budowa narzędzi komputerowej analizy i wspomagania projektowania układów sterowania procesami powtarzalnymi,
- procesy z „efektem wygładzania" (*ang. smoothing effect*),
- procesy powtarzalne o charakterze falowym,
- procesy powtarzalne 3D (powtarzanie na płaszczyźnie).

Rozpoczęto też badania już wspomnianych układów hybrydowych, gdzie klasyczna dynamika opisywana równaniami różniczkowymi lub różnicowymi przenika się z dynamiką dyskretną typu zdarzeniowego – *ang. discrete event systems*.

O poziomie badań i znaczeniu zespołu w skali międzynarodowej świadczy również już dwukrotna organizacja Międzynarodowej Konferencji NDS 98 w Łagowie Lubuskim i NDS 2000 na zamku Czocha Dolny Śląsk, przy współpracy z University of Southampton, w której uczestniczyła większość specjalistów światowych w tej dziedzinie. Jako trzecią odsłonę tej konferencji zorganizowano minisymposium na bardzo znanej w świecie dużej konferencji Mathematical Theory for Networks and Systems MTNS 2002 w Notre Dame, Indiana, USA.

Literatura

1. Bose N.K.: Multidimensional Systems Theory, Reidel Publishing Company, Dodrecht, 1985.
2. Gałkowski, K.,: State-Space Realisations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD Case, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2001, vol. 263, Springer Verlag, London.
3. Gałkowski, K., (Ed.): Proceedings of 2-nd International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (NDS-2000), 2000, Czocha Castle, Poland.
4. Kaczorek, T.: Two-dimensional Linear, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1985 Systems, vol. 68, Springer Verlag Berlin.
5. Jerzy Klamka, „Controllability of Dynamical Systems", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
6. Rogers E., Gałkowski K. and Owens D.H., Control Systems Theory and Applications or Linear Repetitive Processes, Springer Verlag, LNCIS 2003.
7. Rogers E., Owens D.H.: Stability analysis for Linear Repetitive Processes, 1992, vol. 175, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag.

Artykuł recenzowany.