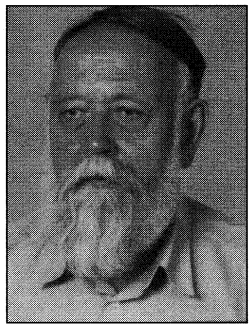
Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA
INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Wyznaczanie uproszczonych modeli cykli granicznych

Prof. dr hab. inż. Adam R. ŻUCHOWSKI



Profesor nadzwyczajny w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego. Posiada w dorobku 265 publikacji z dziedziny miernictwa i automatyki.

Streszczenie

Zjawisko stabilnego cyklu granicznego posiada ważne znaczenie w teorii drgań, a w kształcie cyklu zawarta jest pełna informacja o ich charakterze. Rozpatrzono kilka metod wyznaczenia uproszczonych modeli cykli granicznych, to jest związków pomiędzy sygnałem i jego pochodną w ustalonym stanie drgań.

Abstract

The theory of vibrations treats the phenomenon called stable limit cycle as essential one, since the form of the limit cycle contains complete information about the „nature" of periodic vibrations. The several methods for determining of simplified models of limit cycles have been considered. The proposed models are represented by approximate relations between signal and its derivative referring only to the state of limit cycle (the way of reaching of limit cycle is not taken into consideration).

1. Wstęp

Tak zwany „stabilny cykl graniczny" jest swoistym stanem trwałej, dynamicznej równowagi układu, którego zachowanie opisuje nieliniowe równanie różniczkowe. Najprostsze cykle graniczne występują już w układach przekaźnikowych (regulacja dwupołożeniowa) opisywanych równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu, ale „klasycznym terenem" analiz i syntez cykli granicznych są równania różniczkowe nieliniowe rzędu drugiego. Występują one także w równaniach rzędów wyższych, lecz wszelkie analizy i syntezy są tu znacznie trudniejsze, a równania rzędu drugiego stwarzają wystarczająco bogate możliwości rozmaitych zachowań. Z tych względów dalsze rozważania ograniczymy do równań różniczkowych rzędu drugiego.

Można uważać, że modelem stabilnego cyklu granicznego jest nieliniowe równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \tag{1}$$

w którym symbolem $P\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$ oznaczono funkcję zmiennych y, dy/dt, spełniającą określone warunki. Taka definicja wydaje się zbyt szeroka, gdyż równanie (1) opisuje także procesy przejściowe związane z dochodzeniem do cyklu, w silnym stopniu zależne od warunków początkowych równania (1). Oznaczając symbolem $f(y)$ pewną funkcję zmiennej y przyjmiemy, że modelem cyklu jest związek:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{2}$$

spełniający warunek $dy/dt=y'_0$ dla $y=y_0$ gdzie y'_0 i y_0 są współrzędnymi punktu leżącego dokładnie na cyklu. Związek ten może być także podany w postaci równań parametrycznych:

$$\frac{dy}{dt} = \phi_1(r), \quad y = \phi_2(r) \tag{3}$$

we współrzędnych biegunowych:

$$\frac{dy}{dt} = R(\phi)\sin\phi, \quad y = R(\phi)\cos\phi \tag{4}$$

lub innych układach współrzędnych. Model cyklu określa jego kształt i jest istotny dla różnych praktycznych zastosowań.

Dla pewnej klasy cykli granicznych istnieją zarówno dokładne [3], jak i przybliżone metody syntezy równań różniczkowych, które takie cykle posiadają, przy tym metody przybliżone wykorzystują układy z ruchem ślizgowym [2]. Jeśli równania różniczkowe nie spełniają warunków określonych w [2,3], to wyznaczenie kształtu ich cykli granicznych – poza metodami symulacyjnymi – jest problemem trudnym i możliwe wydaje się jedynie wyznaczanie modeli przybliżonych.

2. Metoda Pade'go

Wprowadzimy oznaczenia: $Y = dy/dt$, $X = y$ i zapiszemy równanie różniczkowe (1) w równoważnej postaci:

$$Y\frac{dY}{dX} + P(X,Y) = 0 \tag{5}$$

Zakładając, że znane są współrzędne pewnego punktu X_0, Y_0 leżącego na cyklu granicznym możemy przyjąć:

$$\begin{gathered} X = X_0 + v \\ Y = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots + a_n v^n + \ldots \\ \frac{dY}{dX} = a_1 + 2a_2 v + 3a_3 v^2 + \ldots + na_n v^{n-1} + \ldots \end{gathered} \tag{6}$$

i po podstawieniu tych związków do (5) wyznaczyć współczynniki a_i przyrównując do zera kolejne wyrazy z członami v^i poczynając od i = 0. Metoda taka jest równoważna rozwinięciu w szereg Taylora funkcji:

$$Y(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(X - X_0)^i \left.\frac{d^iY}{dX^i}\right|_{X=X_0} \tag{7}$$

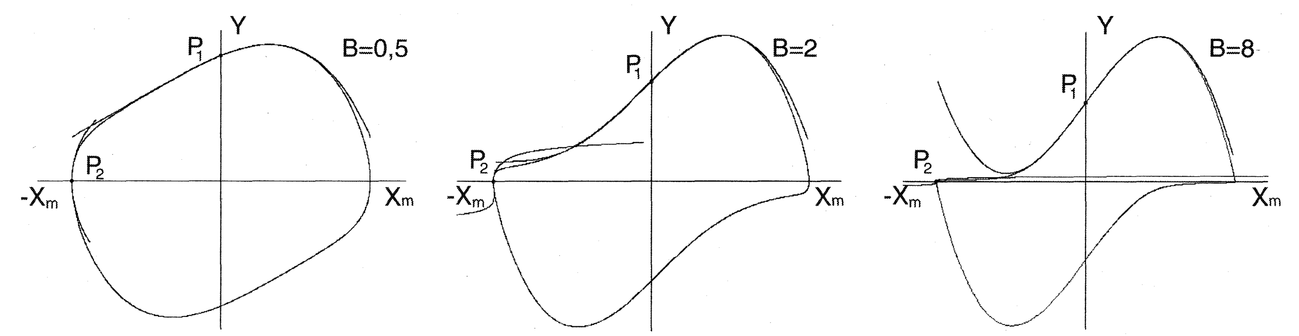
w otoczeniu punktu $X = X_0$ a odpowiednie wartości pochodnych $\left.\frac{d^iY}{dX^i}\right|_{X=X_0}$ mogą być wyznaczane wprost z równania (5). Takie przedstawienie metody jest bardziej eleganckie, ale praktyczne obliczenie współczynników a_i jest zwykle łatwiejsze, niż wyznaczanie odpowiednich pochodnych we wzorze (7), przy tym zawsze współczynnik a_{i+1} daje się w stosunkowo prosty sposób uzależnić od współczynników a_i, a_{i-1},... a_0.

Najwygodniej jest przyjąć $X_0 = 0$, X = v (punkt P_1 na rys. 1), a związek (6) stanowi uproszczony model cyklu tym mniej dokładny im większe jest odchylenie od tego punktu. Ponieważ cykl graniczny przecina oś X pod kątem prostym w punkcie P_2 (rys. 1) o współrzędnych $Y = 0$, $X = X_m$, zatem model (6) nie nadaje się do wykorzystania w otoczeniu tego punktu, gdyż warunku tego nie może spełnić.
Można jednak przyjąć:

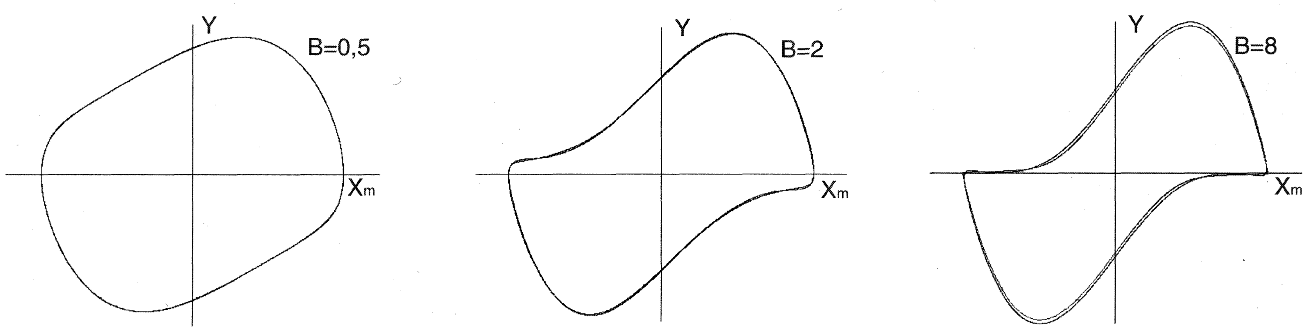
$$\begin{gathered} Y = v, \ X = b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + \ldots + b_n v^n + \ldots \\ \frac{dX}{dY} = b_1 + 2b_2 v + 3b_3 v^2 + \ldots \ nb_n v^{n-1} + \ldots \end{gathered} \tag{8}$$

i wykorzystując równanie (5) wyznaczyć parametry bi, a następnie „zszyć" obie wersje uproszczonego modelu, wykorzystując jednocześnie związek określający najczęściej spotykany rodzaj symetrii cyklu:

$$Y = \text{sgn}\, Y\, f\,(X\ \text{sgn}\, Y)$$



Rys.1. Przebiegi Y(X) dla stabilnego cyklu granicznego w równaniu Van der Pola oraz przebiegi $Y(X)_{modelu}$ uzyskanego metodą Pade'go.



Rys.2. Przebiegi Y(X) dla stabilnego cyklu granicznego w równaniu Van der Pola oraz przebiegi $Y(X)_{modelu}$ uzyskanego metodą minimalizacji funkcionału.

Prowadzi to na ogół do modeli uproszczonych o niezłym stopniu przybliżenia (rys. 1).

Dla przykładu rozpatrzymy równanie Van der Pola [1]:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}\left(y^2-1\right)+y=0$$

które przy współczynniku $B > 0$ posiada stabilny cykl graniczny. Stosując opisaną metodę otrzymuje się łatwo związki (6) i (8). Wykresy cykli granicznych uzyskane metodą symulacyjną, oraz odpowiednie fragmenty modelu (6) (górna połowa płaszczyzny fazowej) przy wykorzystaniu 6 składników sum, dla $B = 0.5$, 2 i 8 pokazano na rys. 1 zaznaczając oba punkty P_1 i P_2, wokół których dokonano rozwinięć w szeregi. „Zszywanie modeli" jest kłopotliwe i wykorzystanie tej metody w przypadku silnych nieliniowości może być dyskusyjne. Jej niewątpliwą zaletą jest fakt, że nie wykorzystuje wyników badań symulacyjnych poza wyznaczeniem punktów P_1 i P_2.

3. Metoda parametryczna

Model uproszczony cyklu granicznego o postaci (3) można uzyskać wykorzystując wyniki badań symulacyjnych w postaci zależności $X(t)$, rozwijając ją w szeregi Fouriera i ograniczając liczbę składników szeregu. Uzyskujemy wtedy równania (3) w postaci:

$$X(t)=X_1\sin(\omega t+\phi_1)+X_2\sin(2\omega t+\phi_2)+\ldots+X_n\sin(n\omega t+\phi_n) \qquad (9)$$

$$Y(t)=\omega X_1\cos(\omega t+\phi_1)+2\omega X_2\cos(2\omega t+\phi_2)+\ldots n\omega X_n\cos(n\omega t+\phi_n)$$

Jest to metoda dokładna, lecz prowadzi do modelu o złożonej budowie i dlatego warto zaproponować jej prostszą odmianę.

Uzależnimy zmienne X i Y od pewnego parametru ϕ i zapiszemy równanie (5) w postaci:

$$Y(\phi)\frac{dY(\phi)}{d\phi}+\frac{dX(\phi)}{d\phi}P[X(\phi),Y(\phi)]=0 \qquad (10)$$

Ponieważ $Y\frac{dY}{d\phi}=\frac{1}{2}\frac{dY^2}{d\phi}$ zatem oznaczając otrzymujemy równanie:

$$\frac{dU(\phi)}{d\phi}+2\frac{dX(\phi)}{d\phi}P\left(X(\phi),\sqrt{U(\phi)}\right)=0 \qquad (11)$$

Wygodnie jest przyjąć $X(\phi) = X_m \cos\phi$, $U(0) = 0$ a równanie (10) można rozwiązać np. metodami symulacyjnymi uzyskując związek $U(\phi)$, a więc także $Y(\phi)$. $\phi = 0 \ldots \pi$ Rozwijając $Y(\phi)$ w szereg Fouriera przy ograniczonej liczbie składowych i z uwzględnieniem rodzaju symetrii cyklu:

$$Y(\phi)=\sum_{i=0}^{n}A_{2i+1}\sin[(2i+1)\phi]+\sum_{i=0}^{n}B_{2i+1}\cos[(2i+1)\phi] \qquad (12)$$

przy $X(\phi) = X_m \cos\phi$ otrzymuje się model parametryczny typu (3). Model ten można stosować w nieograniczonym zakresie zmian ϕ uzyskując pełny kształt cyklu granicznego. Trudności wynikają z faktu, że równanie (10) stanowi rezultat zapisu:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)=Y\frac{dY}{dX}=Y\frac{\frac{dY}{d\phi}}{\frac{dX}{d\phi}}$$

niepoprawnego w warunkach gdy $\frac{dX}{d\phi}=0$, co zachodzi np. dla. $\phi=\pi$.

Można ich uniknąć wykorzystując wyniki badań symulacyjnych

w postaci $X(t)$ i $Y(t)$ stosując podstawienie $\cos\phi=\frac{X(t)}{X_m}$, wyznaczając zależność $Y(\phi)$ i rozwijając ją w szereg Fouriera z uwzględnieniem wzoru (12). Model parametryczny (12) może służyć jako „wyjściowy" w metodzie minimalizacji funkcjonału

4. Metoda minimalizacji funkcjonału

Wykorzystując równanie (10) utworzymy funkcjonał np.:

$$J = \int_0^{\pi} \left\{ Y(\phi) \frac{dY(\phi)}{d\phi} + \frac{dX(\phi)}{d\phi} P[X(\phi), Y(\phi)] \right\}^2 d\phi \tag{13}$$

Przyjmując typ modelu uproszczonego (12) można wyznaczyć jego parametry A_{2i+1}, B_{2i+1} z warunków:

$$\frac{\partial J}{\partial A_{2i+1}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial B_{2i+1}} = 0 \tag{14}$$

minimalizując wartość funkcjonału J. Prowadzi to do skomplikowanego układu nieliniowych równań algebraicznych na parametry modelu. Zamiast rozwiązywania takiego układu równań można poszukiwać optymalnych parametrów A_{2i+1}, B_{2i+1} np. metodą Gaussa-Zeidela.

Dla przytoczonego już równania Van der Pola i przy wykorzystaniu funkcjonału (13) uzyskane w ten sposób wyniki zilustrowano wykresami $Y(X)_{ideal}$, oraz $Y(X)_{modelu}$ na rys. 2.

Uzyskane modele uproszczone wykazują dobrą zgodność z wy nikami symulacji komputerowej.

5. Modele w układzie współrzędnych biegunowych

Wykorzystując wyniki symulacji $X(t)$ i $Y(t)$, oraz związki $X = R(\phi) \cos \phi$, $Y = R(\phi) \sin \phi$ otrzymuje się:

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{Y(t)}{X(t)} \quad \text{oraz} \quad R^2(\phi) = X^2(t) + Y^2(t)$$

Ze związków tych należy wyrugować czas t, a zależność R(φ) przedstawić w postaci szeregu Fouriera o skończonej liczbie składników tworząc uproszczony model we współrzędnych biegunowych. W konkretnym przypadku równania Van der Pola wykorzystując (10) można uzyskać równanie różniczkowe o postaci:

$$\frac{dU}{d\phi} = \frac{BU(1 - \cos 2\phi)(U\cos^2\phi - 1)}{1 + \frac{1}{2} B \sin 2\phi (U\cos^2\phi - 1)} \tag{15}$$

z warunkiem $U(0) = X_m^2$ gdzie $U(\phi) = R^2(\phi)$. Z wymienionych już powodów zakres ważności tego równania jest ograniczony i tym samym korzystanie z niego nie wydaje się celowe.

6. Podsumowanie

Istnieje kilka metod wyznaczania uproszczonych modeli cykli granicznych, przy tym najwłaściwszą wydaje się metoda minimalizacji funkcjonału. Przy jej stosowaniu wykorzystanie wyników badań symulacyjnych sprowadza się do wyznaczenia wielkości X_m często słabo zależnej od parametrów wyjściowego równania (1). Wyniki uzyskane dla równania Van der Pola zdają się wniosek ten potwierdzać w całej rozciągłości.

7. Literatura

[1] Chihiro Hayashi – *Drgania nieliniowe w układach fizycznych.* WNT Warszawa 1968.

[2] Dorota Fok – *Wybrane koncepcje układów o zmiennej strukturze realizujących trajektorie fazowe na zadanej hiperpowierzchni. Rozprawa doktorska.* Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Szczecin, 1983 r.

[3] Adam Żuchowski – *O modelirowaniu prostich sistiem z opriedielonnym priedielnym ciklom. VII Internationale Konferenz Łber nichtlineare Schwingungen.* Band 1, 2 S. 391-396, Akademie Verlag Berlin 1977.