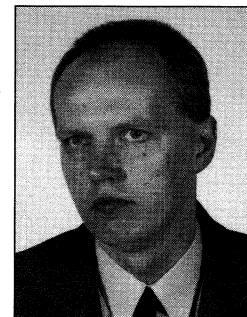


Danuta TURZENIECKA, Przemysław OTOMAŃSKIPOLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI**Dokładność oceny współczynnika rozszerzenia metodą efektywnej liczby stopni swobody w oparciu o znajomość splotu trzech rozkładów prawdopodobieństwa****Dr hab. inż. Danuta TURZENIECKA**

Profesor nadzwyczajny Politechniki Poznańskiej. Przez wiele lat kierowała pracami Zakładu Metrologii Elektrycznej w Instytucie Elektroniki i Telekomunikacji na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej. Stopnie naukowe uzyskuje w latach: doktora nauk technicznych w 1971 roku, doktora habilitowanego nauk technicznych w 1979 roku. Jest autorką rozpraw, monografii, publikacji i podręczników akademickich dotyczących tematyki związanej z elektrycznymi układami pomiarowymi i analizą dokładności pomiarów. Przez wiele lat przewodniczyła pracom Komisji Kształcenia, Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN, którego jest członkiem. Organizowała coroczne krajowe seminarium naukowe, poświęcone problemom kształcenia w zakresie metrologii.

Dr inż. Przemysław OTOMAŃSKI

Studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej ukończył w 1985 roku. Zatrudniony w Zakładzie Metrologii Instytutu Elektroniki i Telekomunikacji Politechniki Poznańskiej na stanowisku adiunkta. Główne zainteresowania: miernictwo optoelektroniczne, modelowanie i symulacja elementów układów pomiarowych oraz analiza dokładności pomiarów. Jest członkiem Sekcji Aparatury i Systemów Pomiarowych Komitetu Metrologii i Aparatury Pomiarowej PAN oraz Polskiego Towarzystwa Techniki Sensorowej.

Streszczenie

Przedstawiono wyniki badań błędów oceny współczynnika rozszerzenia przybliżoną metodą efektywnej liczby stopni swobody przy pomiarach pośrednich. Porównanie otrzymanych wyników ze znaną oceną tych błędów przy pomiarach bezpośrednich pozwoliło na określenie tendencji zmian błędów oceny współczynnika rozszerzenia, kiedy rośnie liczba składowych niepewności standardowych. Wykorzystano do badań znajomość charakterystyk współczynnika rozszerzenia dla splotu trzech wybranych rozkładów prawdopodobieństwa.

Abstract

The results of examining error evaluation of the coverage factor with approximate method of effective degrees of freedom in indirect measurements have been presented in the paper. Comparison of the results obtained with the known evaluation of these errors in direct measurements enabled to determine the change tendency of the errors of coverage factor evaluation, when the number of components of standard uncertainties grows. The knowledge of coverage factor characteristics for the convolution of three selected probability distributions was used for the examination.

1. WPROWADZENIE

Znane są wyniki prac [1], [2], [3], które dotyczą analizy dokładności przybliżonych metod oceny niepewności całkowitej dla prostego pomiaru bezpośredniego, kiedy występują jedynie dwie składowe niepewności standardowe. Podstawą do przeprowadzenia takiej analizy było założenie o konieczności ustalenia metody oceny, którą można uznać za ocenę dokładną. Przyjęto merytorycznie słuszną koncepcję, która nadal jest uwzględniana, że metoda, którą można uznać za metodę dokładną bazuje na znajomości splotu rozkładów prawdopodobieństwa błędów składowych.

W prezentowanej pracy przeprowadzono analizę dokładności oceny współczynnika rozszerzenia przy pomiarach pośrednich, które charakteryzują się na ogół większą liczbą niepewności standardowych. Jest to równoznaczne z tym, że ocena, którą można uznać za oceną dokładną, bazuje na znajomości splotu wielu rozkładów składowych.

Ze względu na złożoność i długi czas obliczeń splotu wielu rozkładów składowych ograniczono zakres prac do badania tendencji

zmian błędów oceny współczynnika rozszerzenia w oparciu o znajomość splotu trzech składowych rozkładów prawdopodobieństwa.

Przedstawiono wyniki badań dla splotu dwóch rozkładów Studenta i jednego rozkładu jednostajnego. Analizie poddano metodę efektywnej liczby stopni swobody, jedną z przybliżonych metod oceny współczynnika rozszerzenia, zalecaną przez międzynarodowy dokument „Guide to the expression of uncertainty in measurement” [4].

2. Pojęcia podstawowe

Wiadomo, że niepewność całkowita u_c jest parametrem pozwalającym na wyznaczenie granic przedziału ufności obejmującego nieznaną wartość prawdziwą z określonym prawdopodobieństwem

$$P(\bar{x} - u_c \leq \mu \leq \bar{x} + u_c) = \alpha \quad (1)$$

gdzie niepewność całkowita:

$$u_c = k(\alpha) \cdot u \quad (2)$$

- u jest niepewnością standardową odpowiadającą odchyleniu standardowemu rozkładu rozpatrywanych błędów
- $k(\alpha)$ jest współczynnikiem rozszerzenia odpowiadającym zmiennej standaryzowanej danego rozkładu.

Jeżeli chcemy wyznaczyć przedział ufności dla dowolnego parametru populacji musimy znać rozkład prawdopodobieństwa estymatora tego parametru. W rozpatrywanym zatem przypadku musimy znać rozkład średniej, która jest estymatorem nieznannej wartości prawdziwej. Rozkładem średniej jest rozkład Studenta, który dla n dążącego do nieskończoności staje się zbieżny do rozkładu normalnego.

Zgodnie z zaleceniami międzynarodowego dokumentu [4], dotyczącymi sposobu oceny i wyrażania niepewności, będą stosowane następujące oznaczenia i symbole, odpowiadające parametrom rozkładów prawdopodobieństwa:

- niepewność standardowa typu A obliczona na podstawie zaobserwowanego rozrzutu wyników serii pomiarów, równa estymatorowi odchylenia standardowego dla średniej:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \bar{s}_x \quad (3)$$

- niepewność standardowa typu B równa odchyleniu standardowemu przyjętego rozkładu błędów aparaturowych. Przy przyjętym

założeniu, że błędy aparatury mają rozkład jednostajny w granicach błędu granicznego $\pm \Delta_g$

$$u_B = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} = \sigma_J \quad (4)$$

– łączna niepewność standardowa dla wielkości mierzonej bezpośrednio, kiedy uwzględnia się niepewność standardową typu A i typu B:

$$u_s = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (5)$$

– zgodnie z prawem propagacji niepewności, łączna niepewność standardowa dla wielkości mierzonej pośrednio kiedy zmienne są niezależne:

$$u_s = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 u_{s_j}^2} \quad (6)$$

Niepewność całkowitą oceniamy różnie dla różnych sytuacji pomiarowych. W rozpatrywanym przypadku przy pomiarach pośrednich:

$$u_c = k(\alpha) \cdot u_{s_j} \quad (7)$$

Współczynnik rozszerzenia powinien w takiej sytuacji przyjmować wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu będącego spłotem rozkładów, których odchyleniami standardowymi są j-te wartości niepewności standardowych.

Ponieważ wartości zmiennych standaryzowanych dla spłotów są rzadko publikowane, nieznanymi współczynniki rozszerzenia ocenia się metodami przybliżonymi. Pociąga to za sobą określone błędy oceny niepewności całkowitej.

3. CHARAKTERYSTYKA SPLOTU DWÓCH ROZKŁADÓW STUDENTA I ROZKŁADU JEDNOSTAJNEGO

Sytuacja pomiarowa, dla której wykorzystuje się spłot dwóch rozkładów Studenta i rozkładu jednostajnego jest przykładem pomiaru pośredniego wykonywanego za pomocą dwóch przyrządów pomiarowych, które przy powtarzaniu pomiarów wykazują rozrzut wyników, niepewność standardowa typu B jednego z przyrządów jest do pominięcia, a liczba pomiarów jest mała ($n < 30$). Rozpatrywane są, zatem trzy niepewności standardowe: niepewność standardowa typu B odpowiadająca odchyleniu standardowemu rozkładu jednostajnego oraz dwie niepewności standardowe typu A odpowiadające odchyleniu standardowemu rozkładu Studenta.

Podstawą do obliczeń wartości współczynnika rozszerzenia dla rozkładu będącego badanym spłotem jest zależność (8) [1]. Wiąże ona wartości prawdopodobieństwa α , z określonymi wartościami k zmiennej standaryzowanej dla spłotu.

$$P_{2S,J}(x) = A \cdot \int_b^c \int_d^c \left[1 + \frac{\eta_s^2}{m_1} \left(\frac{\sqrt{1+\eta_s^2}}{\eta_s} w - y \right)^2 \right]^{-\frac{m_1+1}{2}} \left(1 + \frac{y^2}{m_2} \right)^{-\frac{m_2+1}{2}} dy dw \quad (8)$$

gdzie:

$$A = \Gamma_0(n_1) \cdot \Gamma_0(n_2) \frac{\sqrt{1+\eta_s^2}}{2\sqrt{3}u_B} \quad (9)$$

granice całkowania a i b

$$a = \frac{k \cdot u_s + \sqrt{3}u_B}{u_{s_A}} \quad (10)$$

$$b = \frac{k \cdot u_s - \sqrt{3}u_B}{u_{s_A}} \quad (11)$$

granice całkowania c i d, przy założeniu, że $\infty \approx j \cdot u_{A1}$

$$c = \frac{w \cdot \sqrt{1+\eta_s^2} + j}{\eta_s} \quad (12)$$

$$d = \frac{w \cdot \sqrt{1+\eta_s^2} - j}{\eta_s} \quad (13)$$

W zależności (8) wykorzystano następujące podstawienia

$$y = \frac{z - x}{u_{A2}} \quad (14)$$

gdzie:

- z jest zmienną losową rozkładu będącego spłotem S*S

- x jest zmienną losową rozkładu będącego spłotem S*S*J

$$u_s = \sqrt{u_{s_A}^2 + u_{s_B}^2} \quad (15)$$

$$\eta_s = \frac{u_{A1}}{u_{A2}} \quad (16)$$

$$\eta = \frac{u_{s_A}}{u_B} = \frac{u_A}{u_B} \quad (17)$$

Można wykazać, że współczynnik rozszerzenia dla spłotu nazywany dalej współczynnikiem $k_{S1S2J}(u)$ jest funkcją 5 zmiennych: prawdopodobieństwa α , liczby stopni swobody $m_1 = n_1 - 1$ i $m_2 = n_2 - 1$ i pierwszego i drugiego rozkładu Studenta oraz stosunku niepewności standardowych η_s i η :

$$k_{S1S2J}(\alpha) = f(\alpha, \eta, \eta_s, m_1, m_2) \quad (18)$$

Charakterystyką odniesienia, z którą będą porównywane charakterystyki $k_{S1S2J}(0,99)$ w funkcji η , będzie charakterystyka współczynnika rozszerzenia $k_{S,J}(0,99)$ dla spłotu S*J, dla określonej liczby stopni swobody, oraz charakterystyka współczynnika $k_N(0,99)$ dla rozkładu normalnego.

Można wykazać, że współczynnik rozszerzenia $k_{S,J}(\alpha)$ jest funkcją trzech zmiennych $k_{S,J}(\alpha) = f(\alpha, \eta, m)$.

4. CHARAKTERYSTYKI WSPÓLCZYNNIKÓW ROZSZERZENIA

Obliczenia przeprowadzono dla jednej wartości prawdopodobieństwa $\alpha = 0,99$. Do obliczeń wykorzystano program Matlab, przyjmując następujące parametry: dokładność przybliżenia prawdopodobieństwa α przez zmienną $k = \epsilon = 1e-4$, liczbę przedziałów całkowania w procedurze całkowania metodą Simpsona $lp = 300$, wielokrotność $j = 20$.

W tablicy 1 zestawiono otrzymane w wyniku obliczeń wartości współczynnika rozszerzenia $k_{S1S2J}(0,99)$, dla rozkładu będącego spłotem dwóch rozkładów Studenta i jednego rozkładu jednostajnego.

Na rys. 1 przedstawiono charakterystyki współczynnika rozszerzenia $k_{S1S2J}(0,99)$ dla $m_1 = m_2 = 3$ oraz dla $m_1 = m_2 = 9$, dla $\alpha = 0,99$ i $\eta_s = 1$ w funkcji stosunku niepewności standardowych $\eta = u_A/u_B$ i jego odwrotności.

Rozpatrywana jest zatem sytuacja, kiedy obie próby mają tę samą

Tablica 1 Obliczone wartości współczynnika rozszerzenia

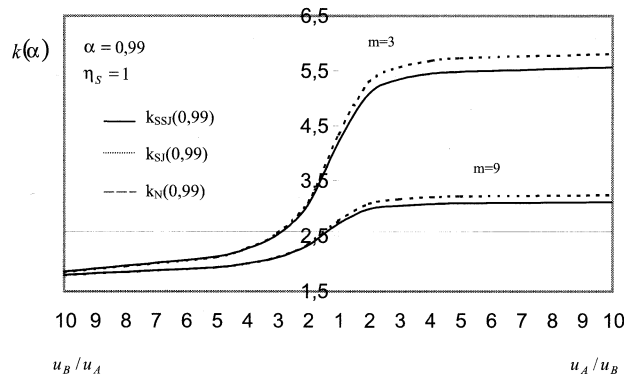
1/η	η	$m_1 = 3$	$m_1 = 9$
		$m_2 = 3$	$m_2 = 9$
10		1,8552	1,7969
5		2,1211	1,9313
4		2,2688	2,0016
3		2,5203	2,1125
2		3,0548	2,3227
1		4,2031	2,7195
	1	5,0938	2,9812
	2	5,3500	3,0475
	3	5,4500	3,0788
	4	5,4875	3,0900
	5	5,5750	3,1150

nią liczbę stopni swobody i żadna ze składowych niepewności standardowych typu A nie jest niepewnością dominującą. Linia przerywaną pokazano charakterystyki współczynnika rozszerzenia $k_{S,J}$ (0,99) dla splotu S*J dla $m = 3$ i $m = 9$, oraz charakterystykę $k_N(0,99)$ dla rozkładu normalnego.

Przedstawienie charakterystyk współczynnika rozszerzenia $k_{S1S2,J}(\alpha)$ na tle współczynników rozszerzenia innych rozkładów ma na celu zaobserwowanie tendencji zmian wartości $k_{S1S2,J}(0,99)$ kiedy rośnie liczba rozkładów składowych.

Zgodnie z przewidywaniami opartymi na centralnym twierdzeniu granicznym charakterystyki współczynnika rozszerzenia $k_{S1S2,J}(\alpha)$ mają tendencje zbliżania się do wartości współczynnika $k_N(\alpha)$ dla rozkładu normalnego. Tendencje te występują jedynie w obszarze, zwanym dalej obszarem A gdzie $v_A \geq v_B$. Wspólną cechą obu współczynników rozszerzenia, zarówno $k_{S1S2,J}(\alpha)$ jak i $k_{S,J}(\alpha)$ jest, że w obszarze A wykazują silne tendencje zbliżania się do wartości $k_N(\alpha)$ ze wzrostem liczności prób, natomiast w obszarze zwanym dalej obszarem B, gdzie $v_A < v_B$ wpływ liczności próby jest znacznie mniejszy i zanika wraz ze wzrostem wartości stosunku v_A/v_B .

Rys. 1 Charakterystyki współczynnika rozszerzenia $k_{S1S2,J}(0,99)$ dla $m_1 =$



$m_2 = 3$ i dla $m_1 = m_2 = 9$, $\eta_S=1$ oraz $k_{S,J}(0,99)$ dla $m = 3$ i $m = 9$, w funkcji stosunku niepewności standardowych η i jego odwrotności na tle współczynnika $k_N(0,99)$

5. METODA EFEKTYWNEJ LICZBY STOPNI SWOBODY

Dokument [4] proponuje, dla rozpatrywanej sytuacji pomiarowej charakteryzującej się małą liczebnością prób metodę, zgodnie z którą współczynnik rozszerzenia $k(\alpha)$ przyjmuje wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu Studenta, $k_{Se}(\alpha)$, odczytywane z tabel tego rozkładu dla efektywnej liczby stopni swobody m_e .

Zgodnie z formułą Welch-Satterthwaite'a [2], jeżeli łączna niepewność standardowa jest pierwiastkiem z sumy dwóch lub więcej wariancji ocenionych na podstawie wyników mało licznych prób o nieznanym odchyleniu standardowym σ , nieznan rozkład szukanej zmiennej standaryzowanej może być przybliżony rozkładem Studenta dla efektywnej liczby stopni swobody m_e . W rozpatrywanym przypadku pomiaru pośredniego efektywna liczba stopni swobody jest opisana zależnością (19) wynikającą z ogólnej formuły Welch-Satterthwaite'a [4].

$$m_e = \frac{u_{s_y}^4}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{m_{A_j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^4 u_{A_j}^4 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_{B_j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^4 u_{B_j}^4} \quad (19)$$

gdzie: u_{s_y} jest standardową niepewnością łączną wielkości Y mierzonej pośrednio i obliczanej zgodnie z prawem propagacji niepewności,

$m_{A_j} = n_j - 1$ jest liczbą stopni swobody j-tej próby,

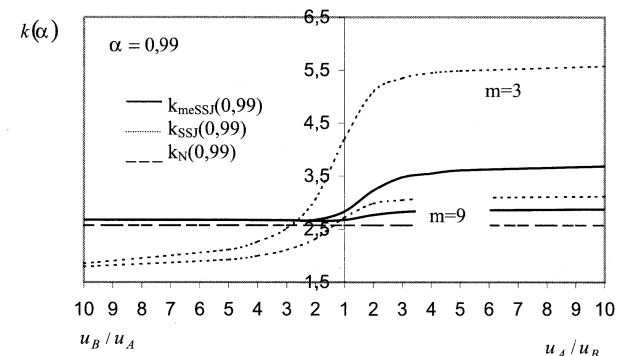
m_{B_j} jest liczbą stopni swobody typu B i jest obliczana na podstawie wiarygodności składowej niepewności typu B.

W sytuacji, gdy niepewność standardowa typu B oceniana jest

na podstawie znajomości rozkładu jednostajnego, którego granice wyznacza błąd graniczny aparatury pomiarowej, można przyjąć, że jest to niepewność dobrze znana. Do dalszych rozważań przyjmuje się zatem względną niepewność niepewności typu B, równą 0,1 [1,4], co odpowiada liczbie stopni swobody $m_B=50$. Przy założeniu, że wszystkie pochodne cząstkowe są równe jedności i po dokonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymujemy dla rozpatrywanej sytuacji:

$$m_e = \frac{(\eta^2 + 1)^2}{\eta^4 \left(\frac{1}{m_1} \eta_s^4 + \frac{1}{m_2} \right) + \frac{1}{m_B}} \quad (20)$$

Taka postać zależności opisującej m_e pozwala na przedstawienie charakterystyki współczynnika rozszerzenia rozkładu Studenta dla efektywnej liczby stopni swobody $k_{meSSJ}(\alpha)$ w funkcji η dla różnych wartości m , w celu porównania jej z charakterystyką współczynnika rozszerzenia dla badanego splotu $k_{S1S2,J}(\alpha)$. Na rys. 2 przedstawiono charakterystykę współczynnika $k_{meSSJ}(\alpha)$, $k_{S1S2,J}(0,99)$ dla $m_1 = m_2 = 3$ oraz dla $m_1 = m_2 = 9$, $\alpha = 0,99$ i $\eta_S = 1$. Rys. 2 Charakterystyki współczynnika $k_{meSSJ}(\alpha)$ i $k_{S1S2,J}(0,99)$ dla $m_1 =$



$m_2 = 3$ oraz dla $m_1 = m_2 = 9$, $\alpha = 0,99$ i $\eta_S=1$ w funkcji stosunku niepewności standardowych η i jego odwrotności na tle współczynnika $k_N(0,99)$

Cechą charakterystyczną obliczonego współczynnika $k_{meSSJ}(\alpha)$ jest, że w obszarze A jego wartości w sposób znaczący różnią się od wartości współczynnika $k_{S1S2,J}(\alpha)$, które są wartościami dokładnymi. Wraz ze wzrostem liczby stopni swobody m różnice te maleją. Obserwacja takich samych charakterystyk dla splotu S*J wykazywała dobrą zbieżność charakterystyk $k_{meS,J}(\alpha)$ i $k_{S,J}(\alpha)$ w obszarze A. W obszarze B współczynnik ten przyjmuje stałe wartości niezależne od liczby stopni swobody m i wartości te są bliskie wartościom współczynnika $k_N(0,99)$ dla rozkładu normalnego.

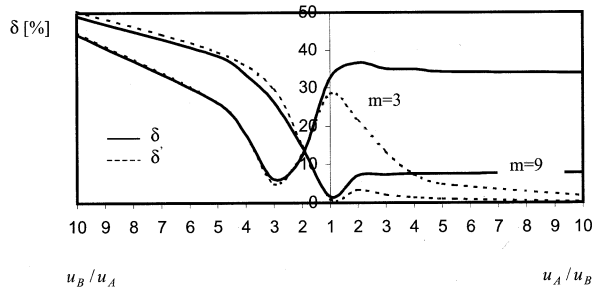
6. BŁĘDY METODY EFEKTYWNEJ LICZBY STOPNI SWOBODY

Zgodnie z przyjętym założeniem, że wartość współczynnika rozszerzenia dla badanego splotu rozkładów składowych można uznać za wartość dokładną, bezwzględną wartość błędów oceny tą metodą przybliżoną definiujemy jako:

$$\delta = \frac{|k_{meSSJ}(0,99) - k_{S1S2,J}(0,99)|}{k_{S1S2,J}(0,99)} \cdot 100\% \quad (21)$$

Na rys. 3 przedstawiono bezwzględne wartości błędów δ oceny współczynnika $k_{meSSJ}(\alpha)$ na tle błędów δ oceny współczynnika $k_{meS,J}(0,99)$ w funkcji η dla różnych wartości m_1 i m_2 , gdzie:

$$\delta' = \frac{|k_{meS,J}(0,99) - k_{S,J}(0,99)|}{k_{S,J}(0,99)} \cdot 100\% \quad (22)$$



Rys. 3 Bezwzględne wartości błędów δ współczynnika $k_{meSSA}(0,99)$, oraz błędów δ dla współczynnika $k_{meSA}(0,99)$ dla $m_1 = m_2 = 3$ i dla $m_1 = m_2 = 9$ w funkcji stosunku niepewności standardowych η i jego odwrotności

Jak wynika z rys. 3 istnieje pewne ograniczenie stosowania metody efektywnej liczby stopni swobody dla bardzo małych prób w sytuacji gdy znajdujemy się w obszarze A, czyli odwrotnie niż dla pomiarów bezpośrednich.

7. WNIOSKI

Przedstawione wyniki badań wskazują jedynie na tendencje zmian błędów oceny współczynnika rozszerzenia ocenianego zalecaną przez międzynarodowy dokument [4] przybliżoną metodą oceny. Zgodnie z zaleceniami tego dokumentu przyjmuje się, że jeżeli łączna niepewność standardowa jest pierwiastkiem z sumy dwóch lub więcej wariancji ocenianych na podstawie wyników małych prób o nieznanym odchyleniu standardowym σ nieznaną rozkład szukaną zmienną standaryzowaną, zwanej w metrologii współczynnikiem rozszerzenia, może być przybliżony rozkładem Studenta dla liczby efektywnych stopni swobody m_e .

Znana jest ocena dokładności tej metody dla dwóch wariancji [1], [2], [3]. Przedstawione w niniejszej pracy wyniki dotyczą sytu-

acji, gdy łączna niepewność standardowa jest pierwiastkiem z sumy trzech wariancji. Wyniki te wskazują jedynie na tendencje zmian błędów oceny współczynnika rozszerzenia i pozwalają na określenie ograniczeń stosowania tej metody oceny.

Jeżeli przyjmujemy, że graniczna wartość błędu oceny, której nie powinniśmy przekroczyć wynosi 20%, to w zależności od wartości stosunku u_A/u_B i jego odwrotności można wykazać, że w obszarze gdzie $u_A > u_B$ błąd ten będzie mniejszy od założonego, dla $m \geq 6$. W obszarze, gdzie u_B/u_A , błąd oceny praktycznie nie zależy od liczby stopni swobody i rośnie wraz ze wzrostem stosunku u_B/u_A , przekraczając znacznie dopuszczalną wartość błędu oceny.

Można również wykazać, że wzrost liczby stopni swobody tylko jednej serii w znaczący sposób powoduje zmniejszenie błędu oceny współczynnika rozszerzenia w obszarze, gdzie $u_A > u_B$.

Pomimo, że jest to metoda zalecana przez międzynarodowy dokument dla oceny współczynnika rozszerzenia przy pomiarach pośrednich, gdy dysponujemy małowielkimi seriami, to jest to metoda mająca silne ograniczenia dotyczące szczególnie prób skrajnie małych. Otrzymane wyniki są interesujące i wskazują na kierunki dalszych badań.

Literatura

- [1] D.: *Analiza dokładności przybliżonych metod oceny niepewności*; Monografia, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1999.
- [2] D.: *Comments on the accuracy of some approximate methods of evaluation of expanded uncertainty*; Metrologia, volume 36, number 2, Bureau International des Poids et Mesures, Sevres 1999, pp. 113-116.
- [3] Turzeniecka D.: *Errors in the evaluation of the coverage factor as a criterion of applications of approximate methods of evaluation of expanded uncertainty*, Measurement, Elsevier Science, Kidlington, Oxford 1999, pp. 223-229.
- [4] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, Geneva, International Organisation for Standardisation, 1995.

CENNIK PUBLIKACJI PŁATNYCH na II półrocze 2002 roku w czasopiśmie POMIARY • AUTOMATYKA • KONTROLA

REKLAMA	Czarno-biała	Kolorowa
*) I okładka	-----	3000 zł
II okładka	-----	2700 zł
III okładka	-----	2600 zł
IV okładka	-----	2800 zł
1 strona (175x255mm)	1500 zł	2250 zł
1/2 strony (175x125mm) – pozioma	800 zł	1200 zł
1/2 strony (85x255mm) – pionowa	800 zł	1200 zł
1/4 strony (85x125mm)	500 zł	750 zł
**) 1/8 strony (85x60mm) – pozioma	300 zł	450 zł
*) dodatkowa informacja na okładce wg uzgodnień **) tylko według indywidualnych uzgodnień		

ARTYKUŁY TECHNICZNO-INFORMACYJNE

Adresowane do specjalistów na poziomie inżynierskim
1 strona PAK – 1500 zł (+ 50% kolor)

Cena do uzgodnienia w zależności od liczby stron i sponsorowanego tematu

STAŁE WKŁADKI

tematyczne lub firmowe, wydrukowane przez zleceniodawcę

- 1-kartkowe (2-stronicowe) – 2000 zł
- 2-kartkowe (4-stronicowe) – 3000 zł
- wielokartkowe (do 12 stron) – 4000÷5000 zł

Do wszystkich cen doliczamy podatek VAT 22%