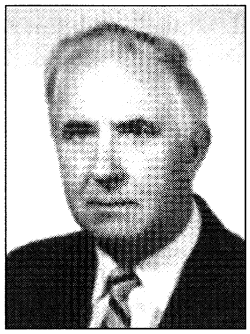
Tadeusz Kaczorek
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Minimalny rząd obserwatorów funkcjonalnych liniowych układów ciągłych



Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK

Uzyskał dyplom magistra inżyniera elektryka w roku 1956 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Na tym samym Wydziale w roku 1962 uzyskał stopień naukowy doktora nauk technicznych, a w roku 1964 doktora habilitowanego. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego nadała Mu Rada Państwa w roku 1971, a profesora zwyczajnego w 1974 r. Członkiem korespondentem PAN został wybrany w 1986 roku, a członkiem rzeczywistym w 1998. Od czerwca 1999 r. jest również członkiem zwyczajnym Akademii Inżynierskiej w Polsce. W latach 1969-1970 był dziekanem Wydziału Elektrycznego, a w latach 1970-1979 prorektorem d/s nauczania Politechniki Warszawskiej. W latach 1970-1981 był dyrektorem Instytutu Sterowania i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej. W latach 1988-1991 był dyrektorem Stacji Naukowej PAN w Rzymie. Jest autorem 18 książek, w tym 5-ciu wydanych za granicą oraz ponad 500 artykułów i rozpraw naukowych opublikowanych w czasopismach krajowych i zagranicznych. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania i systemów, a w szczególności układy wielowymiarowe, układy singularne i układy dodatnie.

Streszczenie

Podano nową metodę wyznaczania (projektowania) obserwatorów funkcjonalnych minimalnego rzędu liniowych układów ciągłych. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające istnienia statycznego sprzężenia od wyjścia układu, które dokładnie odtwarza zadaną funkcję liniowego wektora stanu. Podano również procedury doboru macierzy obserwatora funkcjonalnego oraz statycznego sprzężenia od wyjścia. Procedury te zostały zilustrowane przykładami numerycznymi.

Abstract

A New method for designing of the functional observers for linear continuous-time systems is proposed. Necessary and sufficient conditions are established for the existence of a static output-feedback that reconstruct exactly a given linear function of state vector. Procedures for computation of matrices of the functional observer and the static output-feedback are derived and illustrated by numerical examples.

1. Wprowadzenie

Obserwatorem funkcjonalnym nazywamy układ dynamiczny, który na podstawie znajomości wymuszenia i odpowiedzi obiektu wyznacza estymatę zadanej funkcji liniowej wektora stanu tego obiektu (układu). Obserwatory funkcjonalne układów liniowych były rozpatrywane w wielu pracach [1, 4, 7-10]. W ostatnich latach dużo uwagi poświęcono algorytmom syntezy (projektowania) obserwatorów funkcjonalnych minimalnego rzędu ciągłych układów liniowych. Chia-Chi Tsui w pracach [8-10] podał różne algorytmy oraz coraz to lepsze oszacowanie minimalnego rzędu obserwatorów funkcjonalnych liniowych układów ciągłych. Najlepsze z tych oszacowań minimalnego rzędu jest następujące [8]: $min\{n, v1 + ... + v_m\}$ oraz $min\{n - p, (v_1 - 1) + ... + (v_m - 1)\}$, gdzie n, m, p i v_i (i = 1,..., p) są odpowiednio rzędem obiektu, liczbą wejść, liczbą wyjść obiektu oraz indeksami obserwowalności obiektu.

Celem tej pracy jest podanie nowej metody (projektowania) wyznaczania obserwatorów funkcjonalnych minimalnego rzędu liniowych układów ciągłych. Zostaną podane warunki konieczne i wystarczające istnienia statycznego sprzężenia od wyjścia, które dokładnie (dla wszystkich chwil większych od zera) odtwarza zadaną funkcję liniową wektora stanu obiektu. Zostaną podane również procedury doboru macierzy obserwatora funkcjonalnego oraz statycznego sprzężenia od wyjścia.

2. Sformułowanie zadania

Niech $R^{n \times m}$ będzie zbiorem macierzy o elementach z ciała liczb rzeczywistych i wymiarach $n \times m$ oraz $R^n = R^{n \times 1}$. Dany jest układ liniowy ciągły opisany równaniem

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1a}$$

$$y = Cx \tag{1b}$$

przy czym $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x = x(t) \in R^n$, $u = u(t) \in R^m$ i $y = (t) \in R^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia (sterowania) i odpowiedzi, a A, B i C macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.
Zakładamy, że para (A, C) jest obserwowalna, oraz rząd $C = p$.
Poszukiwać będziemy obserwatora funkcjonalnego minimalnego rzędu r układu (1) opisanego równaniami

$$\dot{z} = Fz + Gu + Hy \qquad , z \in R^r,\ F \in R^{r \times r},\ G \in R^{r \times m},\ H \in R^{r \times p} \tag{2a}$$

$$w = Lz + My \qquad w \in R^q,\ L \in R^{q \times r},\ M \in R^{q \times p} \tag{2b}$$

który odtwarza asymptotycznie tj. $\lim_{t \to \infty} [w(t) - Kx(t)] = 0$ zadaną funkcję wektora stanu

$$Kx \tag{3}$$

przy czym macierz $K \in R^{q \times n}$, jest znana.
Zadanie nasze można więc sformułować następująco: Znane są macierze A, B, C układu (1) oraz macierz K. Należy wyznaczyć minimalny rząd r oraz macierze F, G, H, L i M obserwatora (2).

3. Rozwiązanie zadania

Niech

$$e = z - Tx \tag{4}$$

Korzystając z (4), (1) i (2a) możemy napisać

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{x} = Fz + Gu + Hy - T(Ax + Bu) = Fe + (FT + HC - TA)x + (G - TB)u \tag{5}$$

Dla

$$FT + HC - TA = 0 \text{ i } G = TB \tag{6}$$

zależność (5) przyjmuje postać

$$\dot{e} = Fe \tag{7}$$

Rozwiązanie

$$e(t) = e^{Ft}e(0) \tag{8}$$

równania (7) zanika asymptotycznie do zera dla $t \to \infty$ dla dowolnego $e(0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz F ma wszystkie wartości własne w lewej półpłaszczyźnie (jest macierzą Hurwitza).
Z zależności (4) wynika, że $z(t) \to Tx(t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e(t) \to 0$ dla $t \to \infty$. W tym przypadku w stanie ustalonym

$$Kx = (LT + MC)x \tag{9}$$

oraz

$$K = LT + MC = [L \quad M]\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \tag{10}$$

W równaniu (10) znane są macierze K i C, a poszukujemy macierzy L, M i T o możliwe najmniejszej liczbie wierszy macierzy T.
Z twierdzenia Kroneckera-Capellego [5] wynika, że istnieje macierz $M \in R^{q \times p}$ taka, że $K = MC$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rząd\ C = rząd\begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} \tag{11}$$

W tym przypadku $T = 0$, $r = 0$, rekonstrukcja funkcji stanu (3) nie wymaga obserwatora dynamicznego (2), a jedynie wyznaczenia macierzy M jako rozwiązania równania $MC = K$.
Jeżeli macierz C pełnego rzędu równego p nie ma postaci

$$C = [0 \quad I_p],\ (I_p \text{ macierz jednostkowa stopnia } p) \tag{12}$$

to poprzez zamianę kolumn doprowadzamy ją najpierw do postaci $C = [C_1\ C_2]$, $C_1 \in R^{p \times (n-p)}$, $C_2 \in R^{p \times n}$, $\det C_2 \neq 0$ a następnie dokonujemy zamiany zmiennych $x = Q\bar{x}$, gdzie

$$Q = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$[C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix} = [0 \quad I_p] \tag{14}$$

Jeżeli macierz C ma postać (12) oraz $K = [K_1\ K_2]$, $K_1 \in R^{q \times (n-p)}$, $K \in R^{q \times p}$ to macierz M dobieramy $M = K_2$ i wtedy

$$[K_1 \quad 0] = LT = K - MC \tag{15}$$

Niech rząd $K_1 = r \le q$.
Z zależności [5] rząd $[L\ T] \le min\ (rząd\ L,\ rząd\ T)$ wynika, że liczba wierszy macierzy T równa r może być co najwyżej równa rzędowi macierzy K_1. Stanowi to dolne ograniczenie na minimalny rząd poszukiwanego obserwatora funkcjonalnego (2).
Z zależności (6) i (12) mamy

$$[TA - FT]\begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = H[0 \quad I_p] \tag{16}$$

oraz

$$[TA - FT]\begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{17}$$

$$[TA - FT]\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} = H \tag{18}$$

Niech

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} := A\begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix},\ A_1 \in R^{(n-p)\times(n-p)}, \text{oraz } T_1 := T\begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Mnożąc lewostronnie równanie (17) przez macierz L i korzystając z (15) i (19) otrzymamy

$$LFT_1 = K_1A_1 \tag{20}$$

W równaniu (20) znana jest macierz $K_1A_1 \in R^{p \times (n-p)}$, zakładamy na przykład, że macierz Hurwitza $F \in R^{r \times r}$ ma postać diagonalną

$$F = diag[s_1 \quad s_2 \quad \ldots \quad s_r],\ s_i < 0\ i = 1, \ldots, r \tag{21}$$

poszukujemy nieznanych macierzy $L \in R^{q \times r}$ i $T_1 \in R^{r \times (n-p)}$.

Niech $r < q$. Wtedy istnieje macierz nieosobliwa $P \in R^{q \times q}$ działań elementarnych na wierszach macierzy K_1 taka, że

$$PK_1 = \begin{bmatrix} \overline{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

przy czym $\overline{K}_1 \in R^{r \times (n-p)}$ ma pełny rząd wierszowy.
Mnożąc lewostronnie równanie (20) przez macierz P i biorąc pod uwagę (22) otrzymamy

$$L_1FT_1 = \overline{K}_1A_1 \tag{23}$$

przy czym

$$L_1 = P_1L,\ L_2 = P_2L = 0,\ P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix},\ P_1 \in R^{r \times q},\ P_2 \in R^{(q-r)\times q} \tag{24}$$

Mnożąc lewostronnie równanie (15) przez macierz P i zakładając, że

$$T_2 = T\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} = 0 \tag{25}$$

po uwzględnieniu (22) i (24) otrzymamy

$$\overline{K}_1 = L_1T_1 \tag{26}$$

Mnożąc prawostronnie (26) przez A_1 i podstawiając $K_1A_1 = L_1T_1A_1$ do (23) otrzymamy

$$L_1(FT_1 - T_1A_1) = 0 \tag{27}$$

oraz

$$FT_1 - T_1A_1 = 0 \tag{28}$$

gdyż możemy wybrać L_1 tak, aby $\det L_1 \neq 0$.
Równanie macierzowe (28) ma rozwiązanie niezerowe $T1$ dla danych F i A_1 wtedy i tylko wtedy, gdy macierze F i A_1 mają przynajmniej jedną wspólną wartość własną [5].
Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Dla układu (1) istnieje obserwator funkcjonalny (2) rzędu $r = rząd\ K_1$ jeżeli macierze F i A_1 mają przynajmniej jedną wspólną wartość własną.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura rozwiązania naszego zadania.

Procedura

Krok 1. Jeżeli macierz C nie ma postaci kanonicznej (12), to stosując zamianę zmiennych i korzystając z macierzy (13) wyznaczamy macierze

$$\overline{A} = \overline{Q}AQ,\ \overline{B} = Q^{-1}B,\ \overline{C} = CQ = [0 \quad I_p] \tag{29}$$

układu (1).

Krok 2. Wyznaczamy $M = K_2$, $K_1 = LT_1$, $r = rząd\,\overline{K}_1$ oraz macierze P i K_1 spełniające równanie (22).
Krok 3. Zakładając macierz Hurwitza F w postaci (21) z równań (23) i (24) oraz (26) wyznaczamy macierze T_1, L_1, L.

Uwaga: Zakładając macierz F możemy macierz T_1 wyznaczyć również z równania (28)

Krok 4. Znając macierze F i T oraz korzystając z zależności (6) i (18) wyznaczamy macierze

$$G = TB \text{ i } H = [TA - FT]\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \tag{30}$$

Krok 5. Korzystając z równań (2) wyznaczamy poszukiwany obserwator funkcjonalny.

Przykład 1.

Wyznaczyć obserwator funkcjonalny (2) układu (1) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

który odtwarza asymptotycznie funkcję liniową Kx dla

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{32}$$

W tym przypadku mamy $n = 4$, $m = 1$, $p = q = 2$, a para (A, C) jest obserwowalna. Korzystając z Procedury otrzymamy kolejno:
Krok 1. Macierz C ma już pożądaną postać (12). Wobec tego $Q = I_4$ oraz $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, $\overline{C} = C$.
Krok 2. Dla

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{33}$$

macierz

$$[K_1 \quad 0] = K - MC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

ma rząd $r = 1$. W tym przypadku $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $PK_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

oraz $\overline{K}_1 = [1 \quad -1]$

Krok 3. Przyjmujemy

$$F = [-2] \tag{35}$$

oraz obliczamy

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{K}_1 A_1 = [-2 \quad 2],$$

$$T_1 = T\begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [t_1 \quad t_2]$$

Dla $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$, $L_1 = [l_1]$, $L_2 = [2l_1 + l_2] = 0$, z (23) otrzymamy

$-2l_1[t_1 \quad t_2] = [-2 \quad 2]$ oraz dla $l_1 = 1, T_1 = [1 \quad -1]$,

$$T = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \tag{36}$$

Macierz L ma więc postać

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (36) i (37) spełniają równanie $K_1 = LT_1$.
Krok 4. Korzystając z zależności (30) otrzymamy

$$\begin{gathered} G = TB = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \\ H = [TA - FT]\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -3]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -3] \end{gathered} \tag{38}$$

Krok 5. Korzystając z (2), (33), (35)-(38) otrzymamy poszukiwany obserwator funkcjonalny o postaci

$$\begin{gathered} \dot{z} = -2z + u + [0 \quad -3]\,y \\ w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} y \end{gathered} \tag{39}$$

Zauważmy, że dla danego układu (1) rząd r obserwatora (2) oraz jego istnienie w sposób istotny zależą od macierzy K. Jeżeli dla danych macierzy K i C jest spełniony warunek (11), to rozwiązując równanie

$$K = MC \tag{40}$$

wyznaczymy macierz M. W tym przypadku statyczne sprzężenie od wyjścia układu (1) o postaci My, odtwarza dokładnie, dla $t \geq 0$, funkcję Kx, czyli $Kx = My$ dla $t \geq 0$. Warunek (11) może być spełniony nawet wtedy, gdy para (A, C) nie jest obserwowalna. Istnienie macierzy M nie zależy od macierzy A i B układu (1).

Przykład 2.

Dany jest układ o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Należy wyznaczyć obserwator funkcjonalny (2) odtwarzający funkcję Kx tego układu dla

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku para (A, C) nie jest obserwowalna ale jest spełniony warunek (11), gdyż

$$rząd\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = rząd\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

W tym przypadku równanie (40) ma postać

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a jego rozwiązanie jest równe

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Wobec tego sprzężenie statyczne od wyjścia o postaci

$$My = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} y$$

odtwarza dokładnie funkcję Kx dla każdego, czyli

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} y$$

4. Uwagi końcowe i wnioski

Podano nową metodę wyznaczania (projektowania) obserwatorów funkcjonalnych minimalnego rządu liniowych układów ciągłych opisanych równaniami (1). Sformułowano warunki konieczne i wystarczające istnienia statycznego sprzężenia zwrotnego od wyjścia, które dokładnie odtwarza zadaną funkcję liniową wektora stanu. Podano procedury doboru macierzy obserwatora funkcjonalnego (2) oraz macierzy M statycznego sprzężenia zwrotnego od wyjścia obiektu. Przykład 2 pokazuje, że statyczne sprzężenie zwrotne może istnieć nawet wtedy gdy układ nie jest obserwowalny.

Podaną metodę można również stosować do wyznaczania obserwatorów funkcjonalnych liniowych układów dyskretnych. Zagadnieniem otwartym jest uogólnienie tej metody na układy singularne [4], układy dwu-wymiarowe [4,6] oraz układy nieliniowe.

5. Literatura

[1] T. Kaczorek, Perfect functional observers of singular continuous-time linear systems, Machine Intelligence and Robotic Control, Vol. 4, No. 1/2002 (in press).

[2] T. Kaczorek, Full-order perfect observers for continuous-time linear systems, Pomiary Automatyka Kontrola, 1/2001.

[3] T. Kaczorek, Full-order Perfect Observers for Continuous-time Linear Systems, Bull. Pol. Acad. Tech. Sci., Vol. 49, No. 4, 2001.

[4] T. Kaczorek, Teoria sterownia i systemów, PWN, Warszawa, 1999.

[5] T. Kaczorek, Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice, WNT, Warszawa, 1998.

[6] T. Kaczorek, Perfect Observers for Singular 2-D Fornasini--Marchesini Models, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 46, No. 10, 2001, str. 1-4.

[7] J. O' Reilly, Observers for Linear Systems, Academic Press, London, 1983.

[8] C. C Tsui, What is the Minimum Function Observer Order?, Journal of The Franklin Institute, Volume: 335, Issue: 4, May, 1998, str. 623-628.

[9] C. C. Tsui, A New Algorithm for Design of Multifunctional Observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-30, 1985, str. 89-93.

[10]C. C. Tsui, On the order reduction of linear function observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-31,1986, str. 447-449.