JADWIGA LAL-JADZIAK
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI
INSTYTUT METROLOGII ELEKTRYCZNEJ

Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej

Streszczenie

Przedstawiono twierdzenia Widrowa i warunki odtwarzalności dla kwantowania w zastosowaniu do wartości średniokwadratowej. Dokonano analizy błędu obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej spowodowanego niespełnienieniem warunków odtwarzalności dla kwantowania.

Szczególną uwagę poświęcono sygnałom o rozkładzie prostokątnym i normalnym, sygnałowi harmonicznemu oraz sygnałowi harmonicznemu z szumem gaussowskim.

Abstract

The quantizing theorems of Widrow and quantizing reconstruction conditions for the estimation of the mean square value are presented. An analysis of the bias error of the mean square value estimator, caused by non-satisfied quantizing reconstruction conditions, is carried out.

Special attention is devoted to the rectangular and normal pdf signals, the harmonic signal, and the harmonic signal with Gaussian noise.

WPROWADZENIE

Podstawowym przetwarzaniem, jakiemu poddawany jest sygnał w przyrządach cyfrowych oraz współczesnych systemach pomiarowych, jest dyskretyzacja w dziedzinie czasu (próbkowanie) oraz w dziedzinie wartości (kwantowanie). Uzyskana w wyniku dyskretyzacji reprezentacja sygnału jest następnie przetwarzana w celu uzyskania oceny (estymatora) wartości prawdziwej mezurandu. Zniekształcenia towarzyszące dyskretyzacji wpływają na dokładność wyznaczania mezurandów.

Celem niniejszej pracy jest analiza wpływu kwantowania na dokładność wyznaczania wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów.

WARUNKI ODTWARZALNOŚCI DLA WARTOŚCI ŚREDNIOKWADRATOWEJ

Podstawy teoretyczne

Za twórcę teorii kwantowania sygnałów uważany jest Widrow. W publikacjach z końca lat 50-tych i początku 60-tych Widrow sformułował kilka ważnych twierdzeń. Teoria Widrowa obowiązuje dla kwantowania równomiernego w kwantyzatorze o nieograniczonym zakresie i sygnału będącego wartością ergodycznego procesu stochastycznego. Z uwagi na ergodyczność procesu wnioski wypływające z teorii można przenieść na poszczególne realizacje procesu, a więc sygnały losowe, które podlegają badaniu w praktyce.

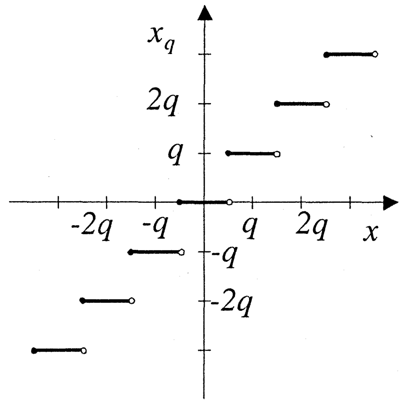
Zainteresowanie przetwarzaniem a-c oraz zagadnieniem warunków odtwarzalności dla kwantowania (warunkami odtwarzalności są warunki, przy których ze statystyk wielkości skwantowanych można odtworzyć statystyki wielkości pierwotnych) artykułowane na łamach prestiżowych czasopism z dziedziny metrologii skłoniły Widrowa do sformułowania twierdzeń językiem współczesnym i ustosunkowania się do niektórych poglądów [6].

Przedstawienie teorii Widrowa wymaga wprowadzenia pojęcia funkcji charakterystycznej. Funkcja charakterystyczna jest transformatą Fouriera funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ do dziedziny v ze zmianą znaku. Dla sygnału x poddanego kwantowaniu jest ona równa

$$\Phi_x(v)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{jvx}dx = E\left[e^{jvx}\right] \qquad (1)$$

Jeśli charakterystyka kwantowania jest typu roundoff (rys. 1), to funkcje charakterystyczna $\Phi_{xq}(v)$ odpowiadająca sygnałowi po kwantyzacji może być określana na podstawie wzoru [6]

$$\Phi_{xq}(v)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Phi_x\left(v-\frac{2\pi}{q}i\right)\operatorname{sinc}\left[\frac{q}{2}\left(v-\frac{2\pi}{q}i\right)\right] \qquad (2)$$



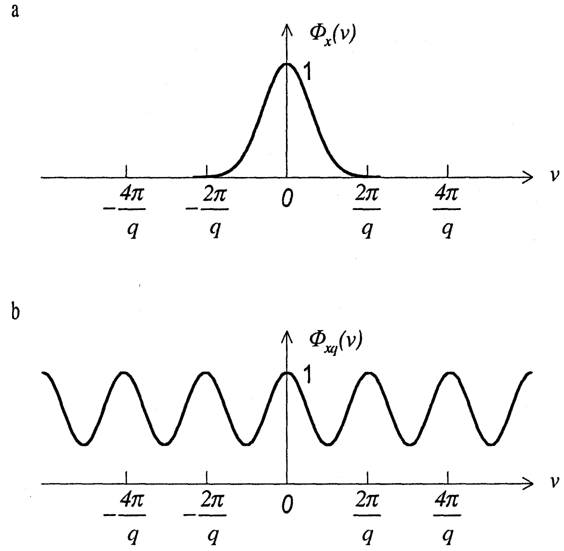
Rys. 1. Fragment typowej charakterystyki operacji kwantowania równomiernego

Na rys. 2 przedstawiono przykładowe funkcje charakterystyczne sygnałów x i x_q.

Moment 2. rzędu sygnału x - w technice nazywany zazwyczaj wartością średniokwadratową - może być wyznaczony przez różniczkowanie funkcji charakterystycznej jako

$$E\left[x^2\right] = -\left.\frac{d^2\Phi(v)}{dv^2}\right|_{v=0} \tag{3}$$

Twierdzenie teorii kwantowania Widrowa dotyczące odtwarzalności momentów sygnału ma postać [6]:



Rys. 2. Funkcje charakterystyczne: a) sygnału x, b) sygnału x_q

Twierdzenie

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma ograniczoną dziedzinę, czyli gdy

$$\Phi_x(v) = 0 \text{ dla } |v| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon \tag{4}$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnału x mogą być wyznaczone z momentów skwantowanego sygnału x_q.

Można zauważyć, że warunek (4) jest spełniony, gdy funkcja charakterystyczna sygnału poddanego kwantowaniu ma ograniczoną dziedzinę lub gdy $q \to 0$, czyli ma miejsce kwantowanie z nieskończenie dużą rozdzielczością (pomiar analogowy).

Założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej będące warunkiem dostatecznym odtwarzalności dla kwantowania nie jest spełniane przez sygnały rzeczywiste. Oznacza ono bowiem, że dziedziną funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest zbiór $(-\infty, +\infty)$, czyli że zbiór wartości sygnału poddanego kwantowaniu jest nieograniczony [1].

Zgodnie z teorią kwantowania w warunkach spełnienia założenia twierdzenia słuszna jest zależność [6]

$$E\left[x_q^2\right] = E\left[x^2\right] + \frac{q^2}{12} \tag{5}$$

łącząca wartość średniokwadratową sygnału z jej estymatorem uzyskanym na podstawie sygnałów skwantowanych.

Błędy kwantowania w pomiarach wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów

Obliczona na podstawie (2) i (3) wartość średniokwadratowa skwantowanego sygnału x_q przyjmuje postać [2, 5]

$$E\left[x_q^2\right] = E\left[x^2\right] + \frac{q^2}{12}$$

$$+ \frac{q}{\pi}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \dot{\Phi}_x\left(\frac{2\pi}{q} i\right)\frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi}{q} i\right)\frac{(-1)^{i}}{i^2} \tag{6}$$

Gdyby zaistniał warunek (4), to zależność (6) przyjęłaby postać (5), co oznacza, że składowa

$$b = E\left[x_q^2\right] - E\left[x^2\right] - \frac{q^2}{12}$$

$$= \frac{q}{\pi}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \dot{\Phi}_x\left(\frac{2\pi}{q} i\right)\frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi}{q} i\right)\frac{(-1)^{i}}{i^2} \tag{7}$$

obciążenia (pozostała po uwzględnieniu poprawki Shepparda $q^2/12$) przyjęłaby wartość równą zero.

Istnieją sygnały, które spełniają zależność (5), chociaż nie można im przypisać nawet przybliżonego spełnienia warunków odtwarzalności według Widrowa. Takim sygnałem jest sygnał losowy o prostokątnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$p(x) = \begin{cases} 1/2A, & |x| \le A \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $2A$ jest wartością międzyszczytową sygnału.

Sygnałowi temu odpowiada funkcja charakterystyczna postaci

$$\Phi(v) = \frac{\sin Av}{Av} \tag{9}$$

W wyniku prostych przekształceń można otrzymać wyrażenie na odpowiadające temu sygnałowi obciążenie b. Jest ono postaci

$$b = \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}\cos\frac{2A}{q}\pi i$$

$$+ \frac{q^4}{8A^2\pi^3}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{i^3}\sin\frac{2A}{q}\pi i + \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{i^2}\,\frac{\sin\frac{2A}{q}\pi i}{\frac{2A}{q}\pi i} \tag{10}$$

Można wykazać, że dla

$$q = \frac{2A}{K}, \quad K \in N \setminus \{0\} \tag{11}$$

b przyjmuje wartość równą zero.

Jeżeli zatem krok kwantowania q sygnału losowego o rozkładzie prostokątnym stanowi podwielokrotność wartości międzyszczytowej, to spełniona zostanie zależność (5). Oznacza to, że zachodzi odtwarzalność wartości średniokwadratowej na podstawie sygnału skwantowanego z dokładnością do wartości $q^2 / 12$ nazywanej poprawką Shepparda.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla sygnału o rozkładzie normalnym

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left(-x^2/2\sigma^2\right) \qquad (12)$$

któremu odpowiada funkcja charakterystyczna postaci

$$\Phi(v)=exp\left(-0.5v^2\sigma^2\right) \qquad (13)$$

Względne obciążenie estymatora można wyrazić jako [3, 4]

$$\delta(\sigma/q)=b/\sigma^2$$

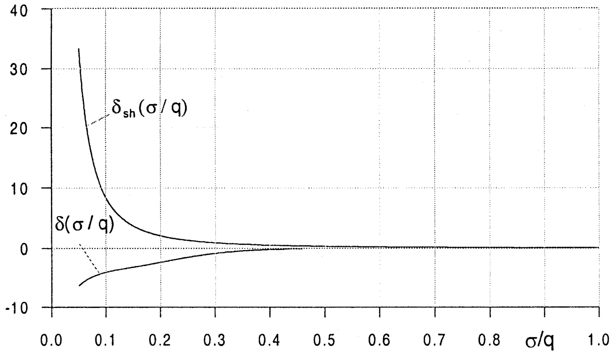
$$=2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left[2+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\pi\sigma i}\right)^2\right]exp\left[-2\left(\frac{\pi\sigma i}{q}\right)^2\right] \qquad (14)$$

W tab. 1 zawarto przykładowe wartości obciążenia (14), a na rys. 3 jego zależność w funkcji σ/q.

Tab. 1. Względne obciążenie (14)

$\delta(\sigma/q)$		
$q=\sigma$	$q=2\sigma$	$q=3\sigma$
$-1{,}1\cdot10^{-8}$	$-3{,}1\cdot10^{-2}$	$-0{,}54$

Jak wynika z tabeli obciążenie osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości kroku kwantowania ($q > \sigma$). Stanowi to wyjaśnienie znanego zjawiska polegającego na otrzymywaniu dokładnych ocen parametrów sygnału gaussowskiego już przy niewielkich liczbach poziomów kwantowania.



Rys. 3. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału gaussowskiego wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności ($\delta(\sigma/q)$) oraz niezastosowania poprawki Shepparda ($\delta_{sh}(\sigma/q)$)

Analogiczną analizę można przeprowadzić dla sygnału sinusoidalnego o amplitudzie A. Odpowiadająca mu funkcja charakterystyczna ma postać

$$\Phi(v)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(i!)^{-2}(Av/2)^{2i}=J_0(Av) \qquad (15)$$

przy czym $J_0(Av)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0.

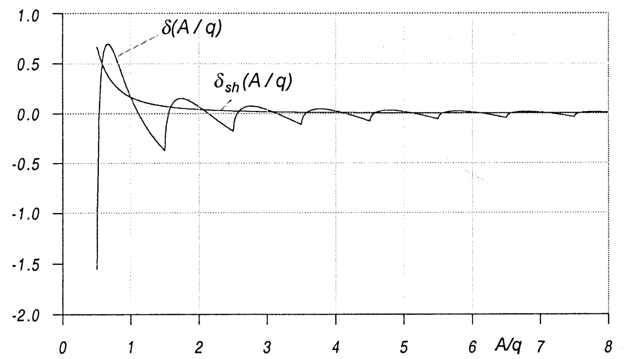
Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej można wyrazić wzorem [3, 4]

$$\delta(A/q)=b/0.5A^2$$

$$=4\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{A\pi i}\right)^2 J_0\left(\frac{2A\pi i}{q}\right)+\frac{q}{A\pi i}J_1\left(\frac{2A\pi i}{q}\right)\right] \qquad (16)$$

gdzie $J_1\left(\frac{2A\pi i}{q}\right)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 1.

Jak wynika ze wzoru (16) oraz rys. 4 względne obciążenie estymatora uzyskanego na podstawie skwantowanej reprezentacji jest - po uwzględnieniu poprawki Shepparda - oscylacyjnie tłumioną funkcją stosunku A/q.



Rys. 4. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału harmonicznego wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności ($\delta(A/q)$) oraz niezastosowania poprawki Shepparda ($\delta_{sh}(A/q)$)

Warto zwrócić uwagę (rys. 4), że $\delta(A/q)$ może przyjmować wartości przewyższające znacznie obciążenie

$$\delta_{sh}(A/q)=\frac{1}{6}(A/q)^{-2} \qquad (17)$$

wynikające z nieuwzględnienia poprawki Shepparda $q^2/12$ w wyniku pomiaru.

Rozważmy na koniec sygnał sinusoidalny występujący w obecności szumu gaussowskiego. Funkcja charakterystyczna takiego sygnału jest równa iloczynowi funkcji charakterystycznych składowych i może być wyrażona zależnością

$$\Phi(v)=J_0(Av)exp\left(-\sigma^2v^2/2\right) \qquad (18)$$

Wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału jest równa

$$E\left[x_q^2\right] = E\left[x^2\right] + \frac{q^2}{12} + b(A,\sigma,\sigma) \tag{19}$$

przy czym [3, 4]

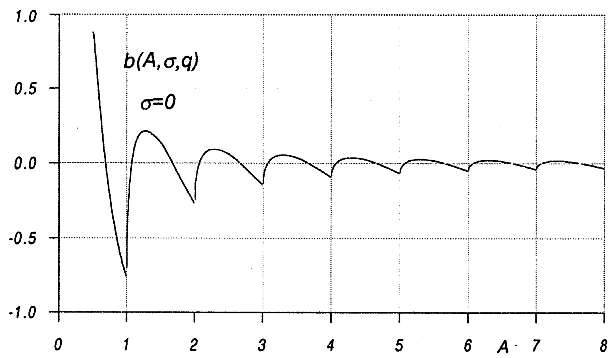
$$E\left[x^2\right] = \frac{A^2}{2} + \sigma^2 \tag{20}$$

$$b(A,\sigma,q) = 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \left\{ \left[2\sigma^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\pi i}\right)^2 \right] J_0\left(\frac{2A\pi i}{q}\right) + \right.$$

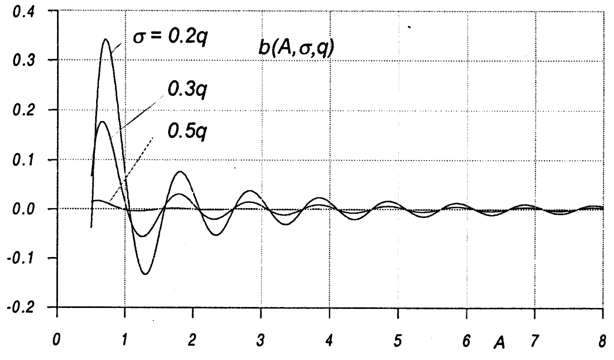
$$\left. + A\frac{q}{\pi i} J_1\left(\frac{2A\pi i}{q}\right) \right\} exp\left[-2\left(\frac{\pi\sigma i}{q}\right)^2 \right] \tag{21}$$

Ze wzoru (21) wynika, że wartość średniokwadratowa $E\left[x_q^2\right]$ sygnału skwantowanego jest równa sumie wartości średniokwadratowej $A^2/2 + \sigma^2$ sygnału pierwotnego, poprawki Shepparda $q^2/12$ i składnika $b(A,\sigma,q)$ wynikającego z niespełnienia przez funkcję $\Phi(v)$ warunku ograniczonej dziedziny.

W charakterze przykładu - na rys. 5, 6 przedstawiono obciążenie $b(A,\sigma,q)$ dla sumy sygnału harmonicznego i zakłócenia gaussowskiego w funkcji A dla $q=1$ oraz $\sigma = 0; 0.2q; 0.3q; 0.5q$. Jest ono tłumioną oscylacyjną funkcją amplitudy A, zanikającą szybciej dla sygnału z zakłóceniem niż dla sygnału niezakłóconego.



Rys. 5. Zależność obciążenia $b(A,\sigma,q)$ w funkcji A dla $\sigma=0$ i $q=1$



Rys. 6. Zależność obciążenia $b(A,\sigma,q)$ w funkcji A dla $\sigma = 0.2q$; $0.3q$; $0.5q$ i $q=1$

PODSUMOWANIE

Funkcja charakterystyczna sygnału losowego o rozkładzie prostokątnym nie spełnia warunku odtwarzalności Widrowa. Mimo to dla kroku kwantowania stanowiącego podwielokrotność wartości międzyszczytowej zachodzi odtwarzalność wartości średniokwadratowej na podstawie sygnału skwantowanego z dokładnością do poprawki Shepparda $q^2/12$.

Funkcja charakterystyczna sygnału o rozkładzie normalnym spełnia warunek ograniczonej dziedziny z dobrym przybliżeniem i dlatego obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości kroku kwantowania ($q > \sigma$).

W pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału harmonicznego obciążenie wynikające z niespełnienia przez funkcję charakterystyczną sygnału warunku ograniczonej dziedziny może wielokrotnie przewyższać obciążenie spowodowane nieuwzględnieniem poprawki Shepparda do wyniku.

Towarzyszące sygnałowi harmonicznemu gaussowskie zakłócenie może wpływać na zmniejszenie obciążenia wynikającego z niespełnienia warunków odtwarzalności dla kwantowania.

LITERATURA

1. Domańska A., *Model operacji kwantowania utworzony na podstawie formuły zagadnienia odtwarzalności*, Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, vol. 41, z. 4, s. 419-433, 1995.
2. Kollar I..: *Bias of mean value and mean square value measurements based on quantized data*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol.43, no. 5, pp.733-739, 1994.
3. Lal-Jadziak J.: *Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych*, Seria Monografie, Nr 101, Wyd. Pol. Zielonogórskiej, Zielona Góra, 2001.
4. Lal-Jadziak J.: *Wpływ kwantowania na dokładność wyznaczania funkcji korelacyjnych*, Metrology and Measurement Systems, vol. VIII, no. 1, pp. 26-40, 2001.
5. Sripad B.; Snyder D., *A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white*, IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process., vol. ASSP-25, no. 5, pp. 442-448, 1977.
6. Widrow B., Kollar I., Liu M.-C.: *Statistical theory of quantization*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 45, no. 2, pp. 353-361, 1996.

Artykuł recenzowany.