

DOMINIKA BYSIEC

Kielce University of Technology
Faculty of Civil and Environmental Engineering
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
25-314 Kielce, Poland
e-mail: mika3012@wp.pl

THE INVESTIGATION OF STABILITY OF DOUBLE-LAYER OCTAHEDRON-BASED GEODESIC DOMES

Abstract

The paper presents the investigation of stability of two double-layer octahedron-based geodesic domes. The stability analysis includes the forces acting in the bars as well as the displacements of the nodes with a static point load of 10 kN applied to the top symmetrical node. The investigation was conducted with both identical constant cross-section of all the bars and variable cross-sections (with their adjustment to the internal forces) in each of the bar groups. Moreover, diagrams illustrating the rates of change of the values of the forces and displacements were presented. Also the limit values were determined, above which the analysed structures are unstable..

Keywords: double-layer geodesic dome, stability of construction, allowable stress

1. Introduction

Geodesic domes can be applied as roof coverings for arenas, halls, shopping centres, etc. Constructed of metal bars, they produce lightweight structures, the span of which can range up to 200 m, without the application of any intermediate supports. The bar structures of the low-profile single-layer domes are particularly susceptible to stability loss. Therefore, constructing double-layer structures, which are formed by topological transformations of, e.g. Platonic solids, is a more expedient solution. Such structures, made up of two layers connected together by means of bracing members, show greater stability than single-layer domes [1].

2. Analysis model

Three 8-, 32- and 128-hedral single-layer bar structures, obtained on the basis of the first method of equilateral triangle division [2], were chosen. These structures were properly connected into two double-layer bar domes, the former made up of the 8-hedron and 32-hedron, and the latter of the 32- and 128-hedron.

The dome generated from the 8-hedron and 32-hedron consists of nodes numbered 1÷13 that constitute the vertices of the 32-hedron and nodes 14÷18 that are the vertices of the 8-hedron. On the basis of the conducted analysis all the nodes were arranged in 4 groups (Table 1).

Table 1. The nodes of the double-layer geodesic dome generated from the 8- and 32-hedron, arranged in groups

| nodes groups | numbers of nodes |
|--------------|-------------------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2, 3, 7, 10 |
| 3 | 14 |
| 4 | 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18 |

The bars numbered 1÷28 constitute the edges of the 32-hedron, bars 29÷36 constitute the edges of the 8-hedron, and the bars numbered 37÷52 are the bracing members. Like the nodes, all the bars were also systematised and arranged into 8 groups (Table 2).

Table 2. The bars of the double-layer geodesic dome generated from the 8- and 32-hedron, arranged w groups

| bars groups | numbers of bars |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 3, 11, 18, 24 |
| 2 | 37, 38, 39, 40 |
| 3 | 6, 9, 13, 16, 20, 23, 26, 28, 33, 34, 35, 36, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 51, 52 |
| 4 | 5, 7, 12, 14, 19, 21, 25, 27 |
| 5 | 29, 30, 31, 32 |
| 6 | 41, 44, 47, 50 |
| 7 | 4, 8, 15, 22 |
| 8 | 1, 2, 10, 17 |

The topology of 1/4 part of the investigated double-layer dome generated from of the 8- and 32-hedron was presented in Figure 1.

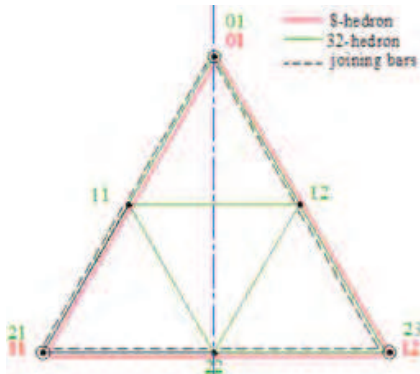


Fig. 1. The topology of one cell of the investigated double-layer dome made up of the lattices of the 8-hedron and 32-hedron

The other double-layer dome made up of the lattices of the 32- and 128-hedron has got nodes 1÷41 corresponding to the vertices of the 128-hedron and nodes 42÷54 constituting the vertices of the 32-hedron. All the nodes were arranged in 9 groups (Table 3).

Table 3. The nodes of a double-layer geodesic dome generated from the 32- and 128-hedron, arranged in groups

| nodes groups | numbers of nodes |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 4, 6, 18, 28 |
| 3 | 5, 17, 27, 36 |
| 4 | 2, 3, 16, 26 |
| 5 | 42 |
| 6 | 43, 44, 48, 51 |
| 7 | 8, 9, 19, 20, 29, 30, 37, 38 |
| 8 | 7, 10, 21, 31 |
| 9 | 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 39, 40, 41, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 53, 54 |

In this investigated double-layer dome, the bars numbered 1÷104 correspond to the edges of the 128-hedron, bars 105÷132 constitute the edges of the 32-hedron, and bars 133÷188 are the members joining two single-layer structures. All the bars were arranged in 26 groups and tabulated in Table 4.

Table 4. The bars of the double-layer geodesic dome generated from the 32- and 128-hedron, arranged in groups

| bars groups | numbers of bars |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 15, 42, 68, 92 |
| 2 | 107, 115, 122, 128 |
| 3 | 12, 18, 39, 45, 65, 71, 89, 94 |
| 4 | 140, 142, 145, 148, 162, 164, 175, 177 |
| 5 | 138, 146, 160, 173 |
| 6 | 3, 32, 58, 83 |
| 7 | 133, 134, 135, 136 |
| 8 | 105, 106, 114, 121 |
| 9 | 21, 24, 27, 30, 47, 50, 53, 56, 73, 76, 79, 82, 96, 99, 102, 104, 110, 113, 117, 120, 124, 127, 130, 132, 150, 151, 154, 155, 157, 158, 165, 166, 170, 171, 178, 179, 183, 184, 185, 186 |
| 10 | 5, 7, 33, 35, 59, 61, 84, 86 |
| 11 | 139, 141, 144, 147, 161, 163, 174, 176 |
| 12 | 6, 9, 34, 37, 60, 63, 85, 87 |
| 13 | 152, 153, 167, 168, 180, 181, 187, 188 |
| 14 | 149, 156, 169, 182 |
| 15 | 20, 28, 46, 54, 72, 80, 95, 103 |
| 16 | 109, 111, 116, 118, 123, 125, 129, 131 |
| 17 | 11, 16, 38, 43, 64, 69, 88, 93 |
| 18 | 4, 8, 36, 62 |
| 19 | 13, 14, 40, 41, 66, 67, 90, 91 |
| 20 | 23, 25, 49, 51, 75, 77, 98, 100 |
| 21 | 108, 112, 119, 126 |
| 22 | 19, 29, 55, 81 |
| 23 | 10, 17, 44, 70 |
| 24 | 22, 26, 48, 52, 74, 78, 97, 101 |
| 25 | 137, 143, 159, 172 |
| 26 | 1, 2, 31, 57 |

Figure 2 shows the topology of 1/4 of the lattice of the other double-layer bar geodesic dome.

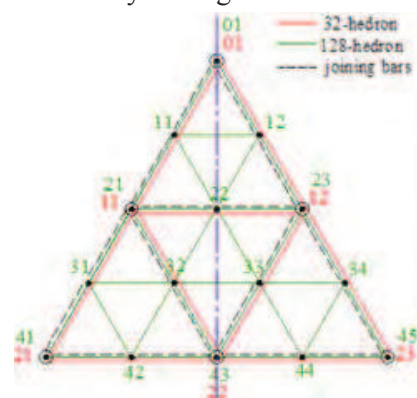


Fig. 2. The topology of one cell of the investigated double-layer dome made up of the lattices of the 32-hedron and the 128-hedron

3. Investigation of stability of the selected domes

During the investigation, the change in the dome thickness characterizing the distance between the layers, that is the relation of the radii of the spheres determining the nodes of every single-layer structure, was taken into consideration.

The two analysed models of double-layer geodesic domes were loaded with a point force of 10 kN, applied to the top symmetrical node. The focus was on the forces acting in the bars as well as on the displacements of the nodes. The calculations were made using algorithms generated by means of computer programs, which helped obtain the final results. The change of the R1/R2 radii relation of the spheres determining the nodes of the structures resulted in computing the variable values α and β , which correspond to the thicknesses of the analysed double-layer domes. The 0.05 interval of the change of value of the parametres within the range of 1.0 – 0.8 was assumed.

For the purpose of the analysis, in the first instance, an identical constant cross-section for all the bars ($d = 0.5\text{cm}$) was assumed. In the next step, new cross-sections in the function of the internal forces were applied for every bar group in the calculations. They were obtained, assuming the allowable stress $\sigma_{\text{dop}} = 210\text{MPa}$ and applying the formula:

$$d = \sqrt{\frac{P}{\pi \times \sigma_{\text{dop}}}} \quad [\text{cm}] \quad (1)$$

where: P – force value [kN].

The results of the forces acting in the selected groups of bars as well as of the displacements occurring in the selected groups of nodes were demonstrated in the figures that follow. Moreover, the derivatives illustrating the rate of change of the values of the forces and displacements were drawn. The drawn curves show a high rate of change of the values in certain areas, which can be interpreted as unstable areas for the analysed geodesic domes due to the forces in the bars and the displacements of the nodes. The limit value λ_{gr} was assumed both for the bar forces and the node displacements, as the limit area in which solutions are sought [1].

λ_{gr} – allowable limit value of the rate of change of the nodes/forces displacements in the bars.

The double-layer geodesic dome was made up of the lattices of the 8- and 32-hedron was analysed in the first run.

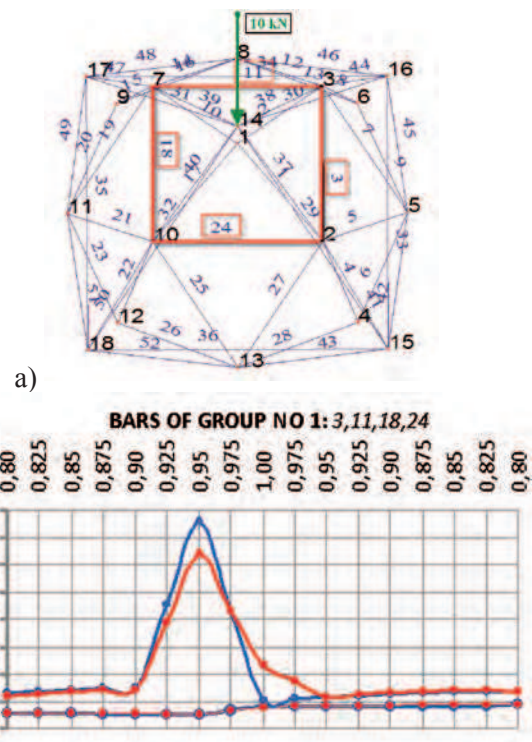


Fig. 3. a) The bars of group 1 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

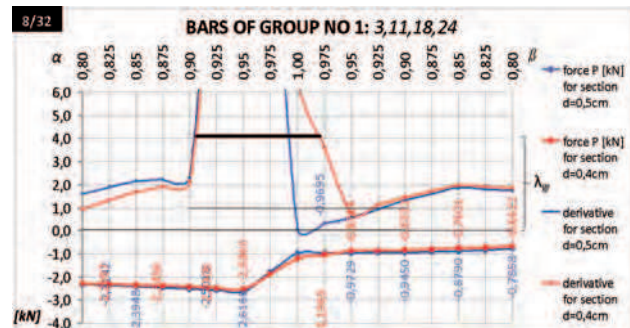
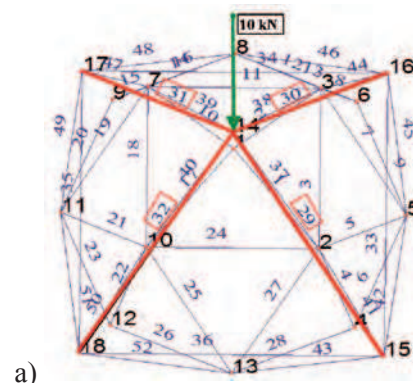


Fig. 4. The changes of the forces occurring in the bars of group 1 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.4\text{cm}$



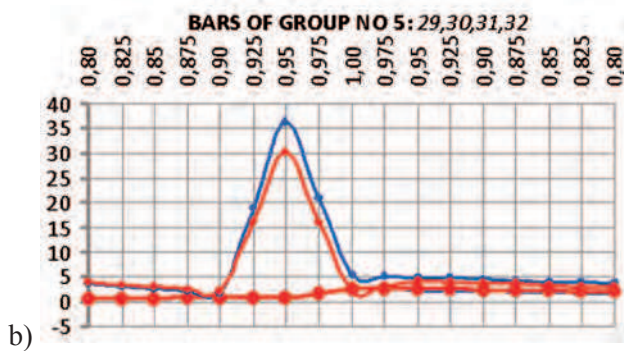


Fig. 5. a) The bars of group 5 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

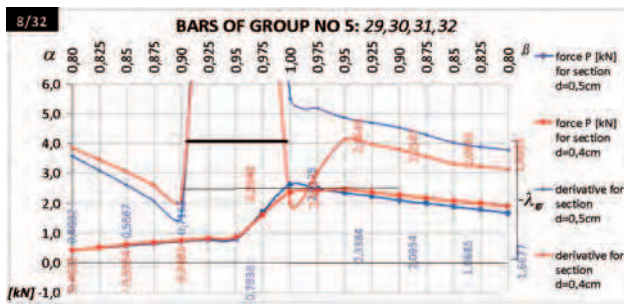


Fig. 6. The changes of the forces occurring in the bars of group 5 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.4\text{cm}$

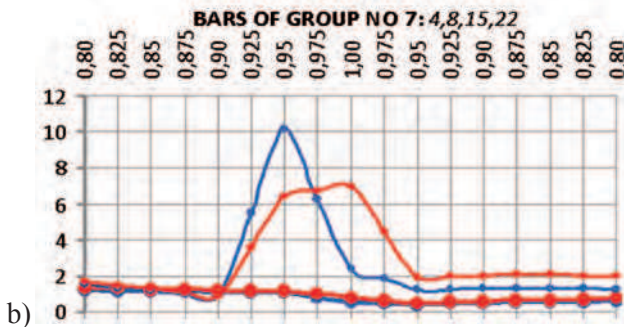
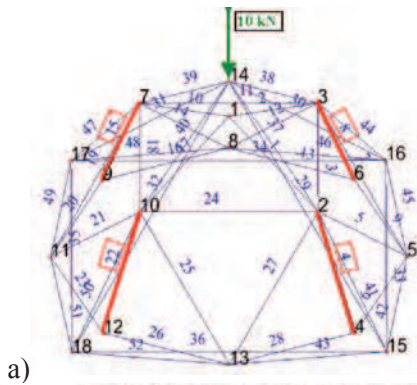


Fig. 7. a) The bars of group 7 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

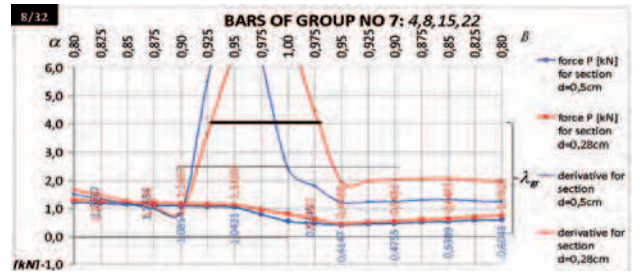
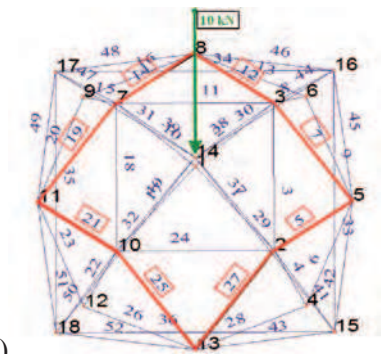


Fig. 8. The changes of the forces occurring in the bars of group 7 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.28\text{cm}$

For the purpose of comparison, an additional group of bars was selected. The group shows smaller λ_{gr} than the one assumed in the course of the analysis.



a)

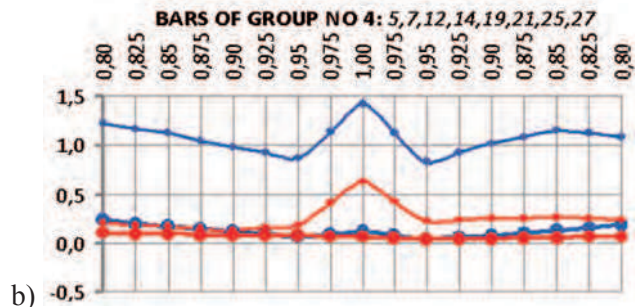


Fig. 9. a) The bars of group 4 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

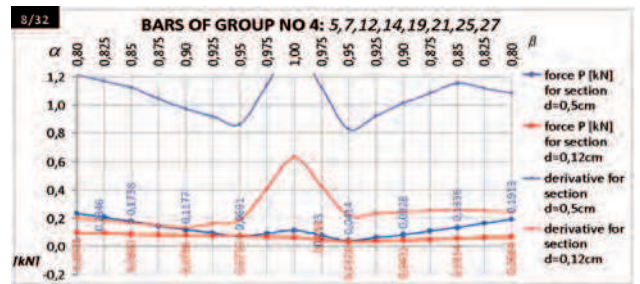


Fig. 10. The changes of the forces occurring in the bars of group 4 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.12\text{cm}$

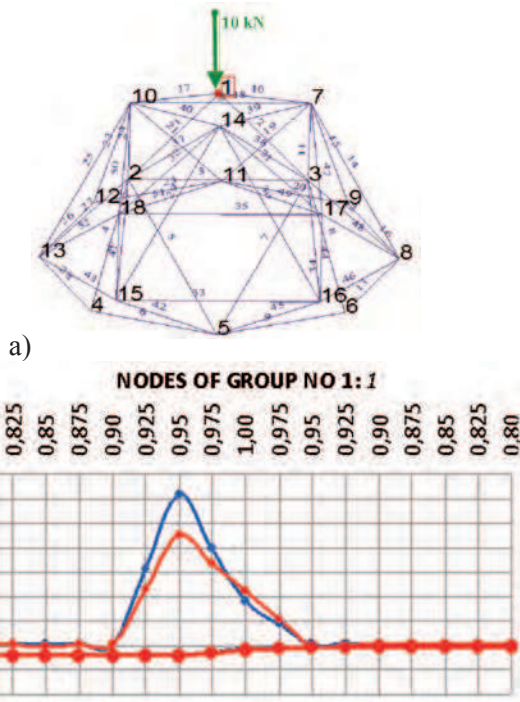


Fig. 11. a) The nodes of group 1 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

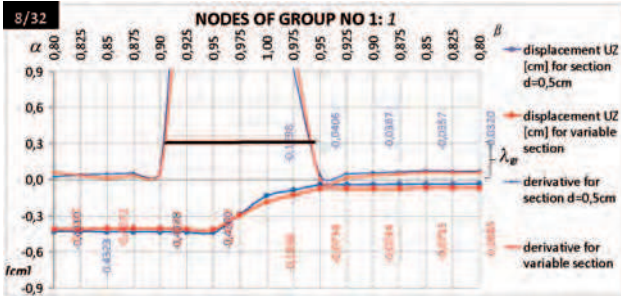
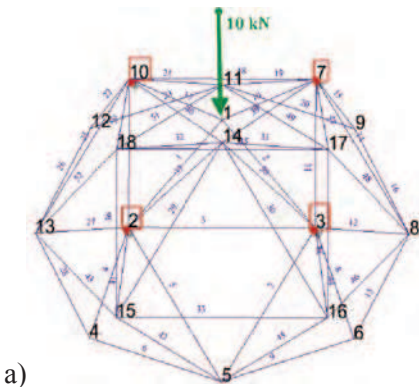
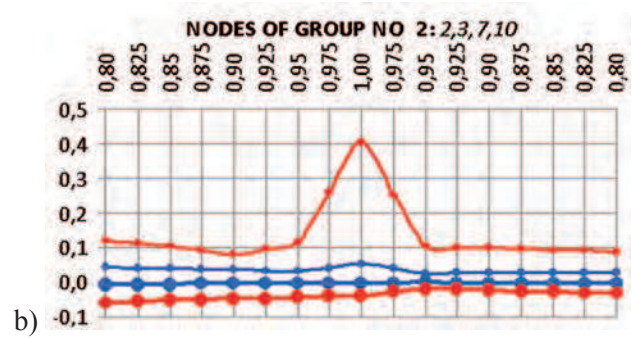


Fig. 12. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 1 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$



a)



b)

Fig. 13. a) The nodes of group 2 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

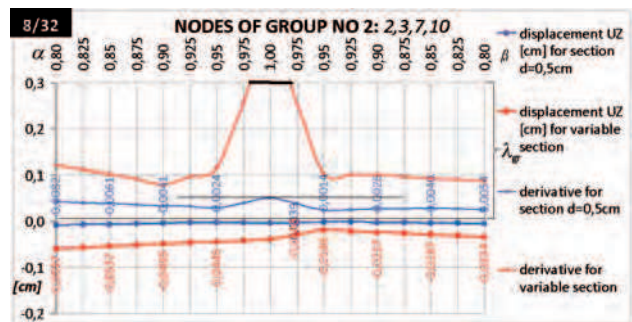
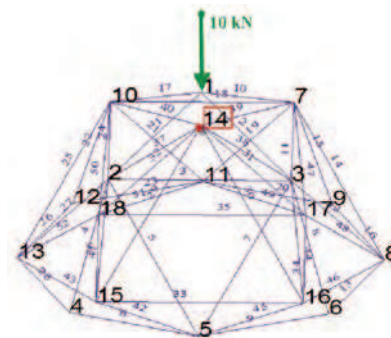
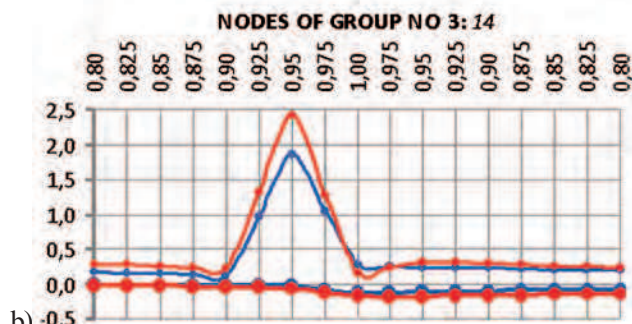


Fig. 14. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 2 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$



a)



b)

Fig. 15. a) The nodes of group 3 of the bar dome generated from the 8- and 32-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

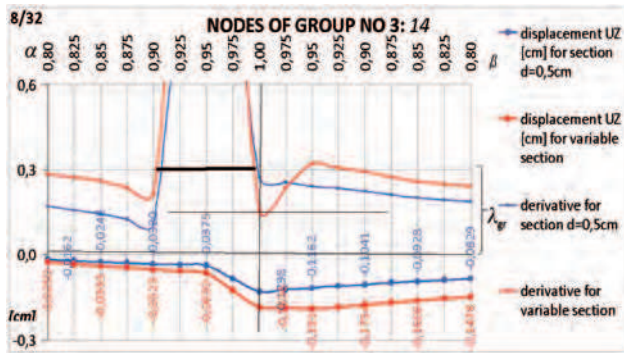
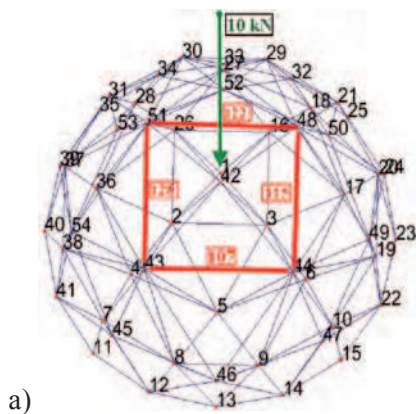


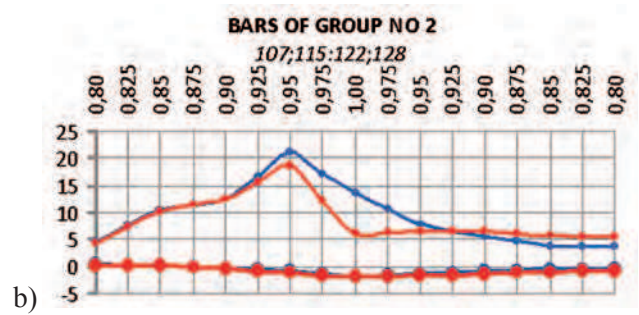
Fig. 16. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 3 of the dome generated from the 8- and 32-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

A family of double-layer dome structures generated from the 8- and 32-hedron within the range of $\alpha=0.8$ to $\beta=0.8$ was analysed. Their stability was investigated on the basis of the diagrams of the forces in the bars and their derivatives as well as the diagrams of the nodes displacements and their derivatives. Identical limit values of the rate of change were assumed 5.0 kN for the forces occurring in the bars, $\lambda_{gr} = 0.3\text{ cm}$ for the nodes displacements. Taking into account the assumed values λ_{gr} , the stability of the analysed double-layer bar dome made up of the lattices of the 8-hedron and 32-hedron was determined in the following areas: $\alpha \leq 0.905$ and $\beta \leq 0.98$ for the forces occurring in the bars as well as $\alpha \leq 0.905$ and $\beta \leq 0.96$ for the nodes displacements.

A similar analysis was conducted for the other double-layer geodesic dome, made up of lattices of the 32- and 128-hedron. The results were presented in the figures below.



a)



b)

Fig. 17. a) The bars of group 2 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron, b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

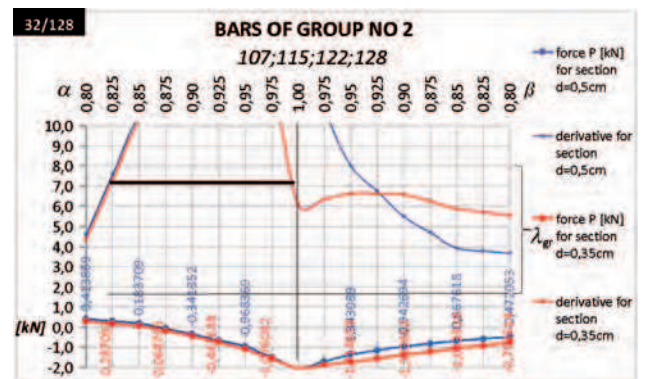
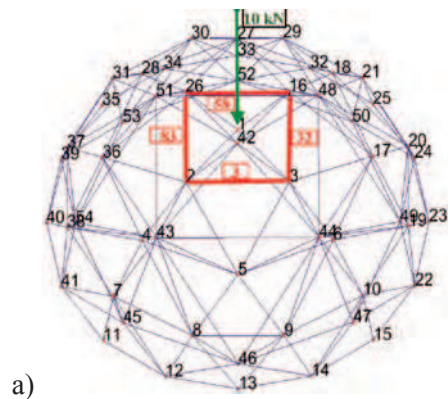
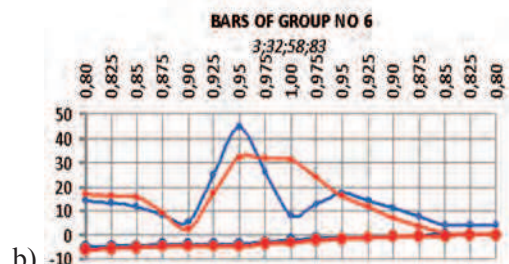


Fig. 18. The changes of the forces occurring in the bars of group 2 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.35\text{cm}$



a)



b)

Fig. 19. a) The bars of group 6 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

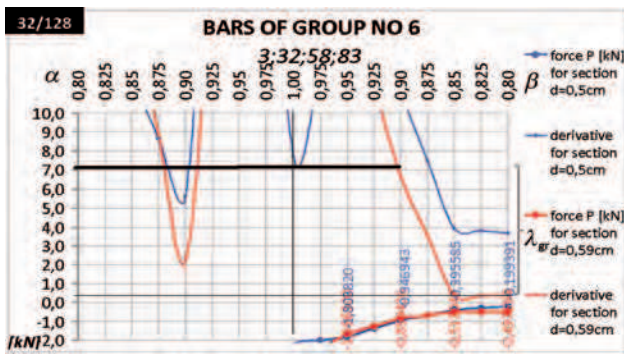


Fig. 20. The changes of the forces occurring in the bars of group 6 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.59\text{cm}$

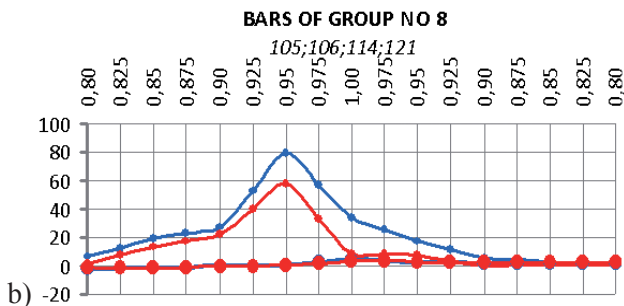
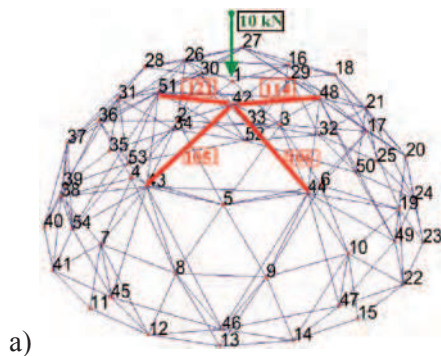


Fig. 21. a) The bars of group 8 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

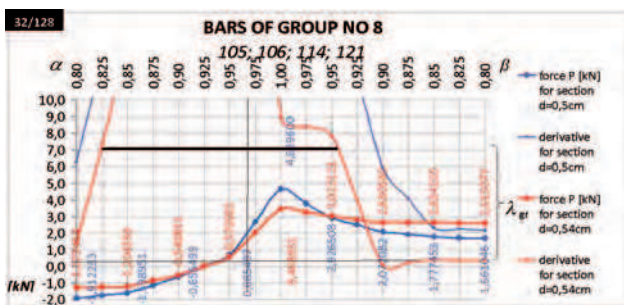
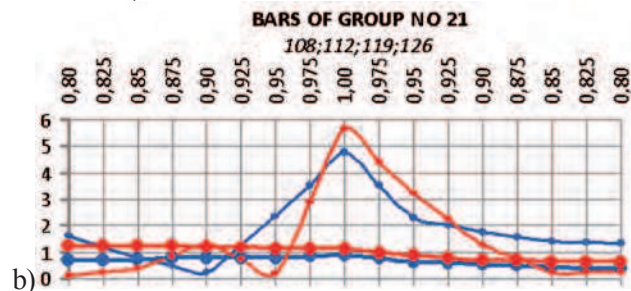
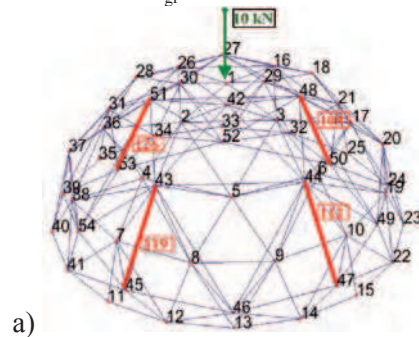


Fig. 22. The changes of the forces occurring in the bars of group 8 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.54\text{cm}$

For the purpose of comparison, Figures 23 and 24 illustrate the results of the bar group no. 21, the change (derivative) of which is smaller than the assumed limit value λ_{gr} .



Rys.23. a) The bars of group 21 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron b) the changes of the bar forces in the α and β function and their derivatives

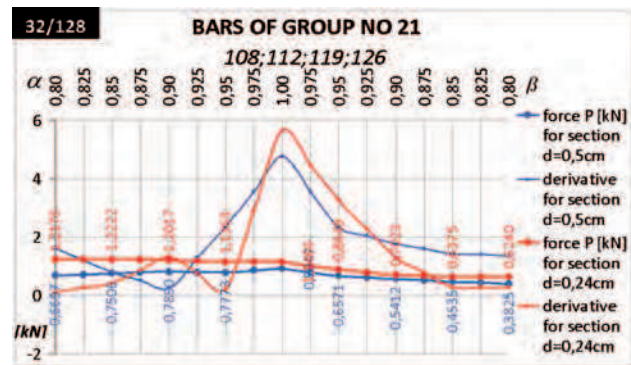
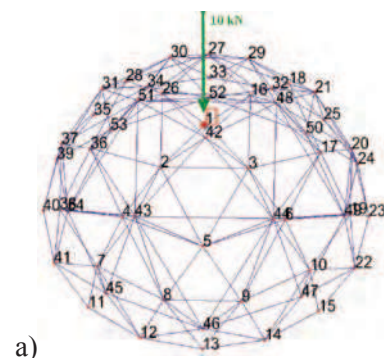


Fig. 24. The changes of the forces occurring in the bars of group 21 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = 0.24\text{cm}$



a)

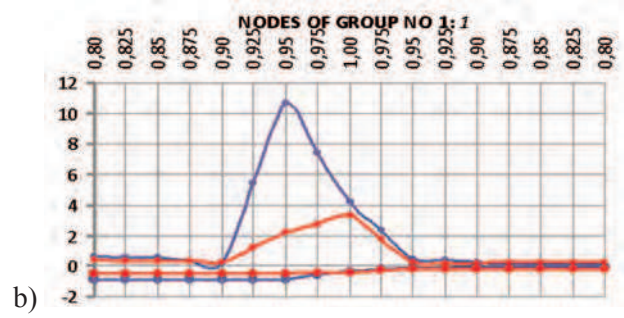


Fig. 25. a) The nodes of group 1 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

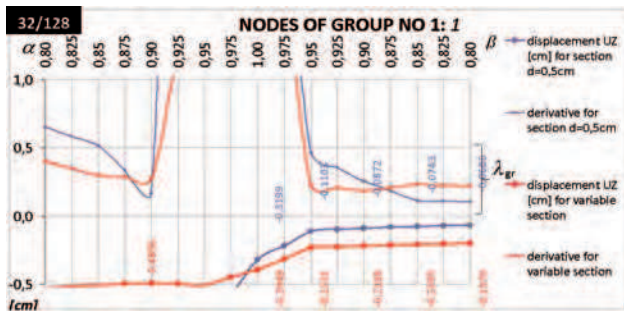


Fig. 26. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 1 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

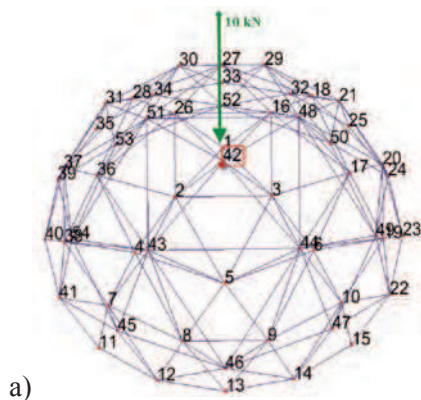


Fig. 27. a) The nodes of group 5 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

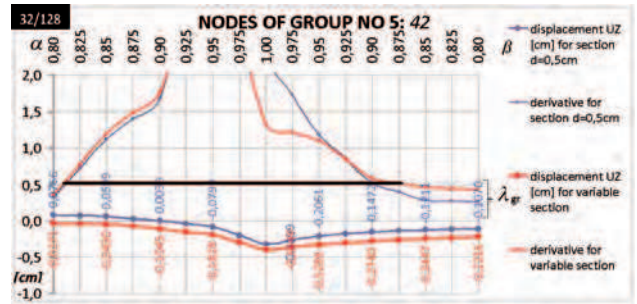


Fig. 28. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 5 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

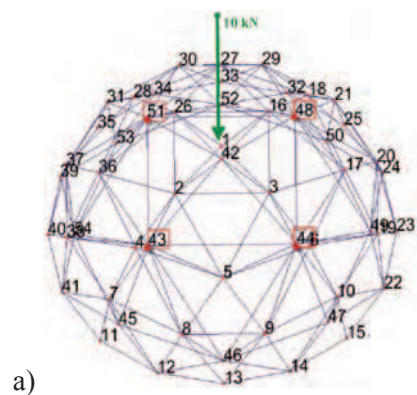


Fig. 29. a) The nodes of group 6 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

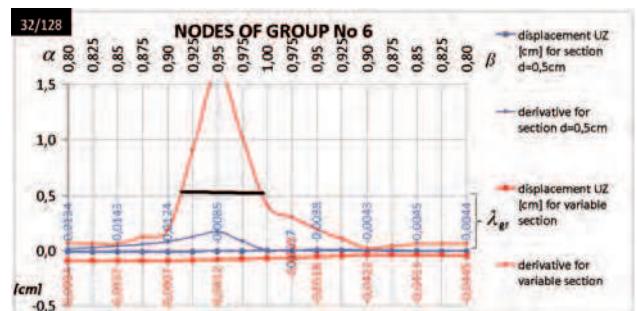
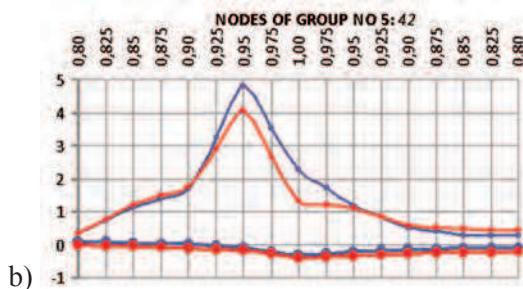


Fig. 30. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 6 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

For the purpose of comparison, Figures 31 and 33 illustrate the results of the forces occurring in the bar group no. 2. The rate of change is smaller than the assumed limit value λ_{gr} .

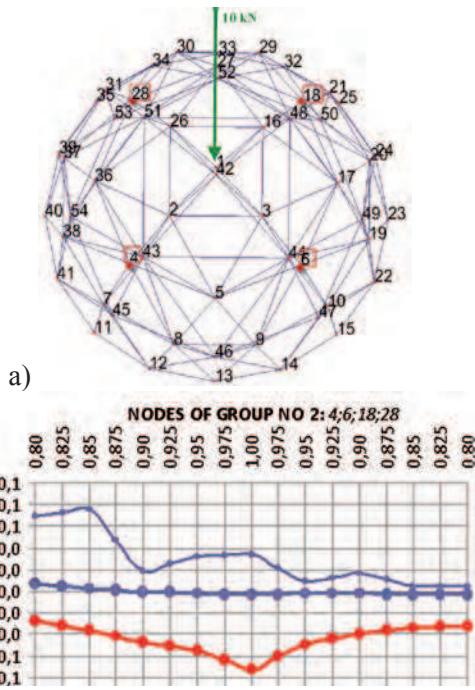


Fig. 31. a) The nodes of group 2 of the bar dome generated from the 32- and 128-hedron, b) the changes of the nodes displacements in the α and β function and their derivatives

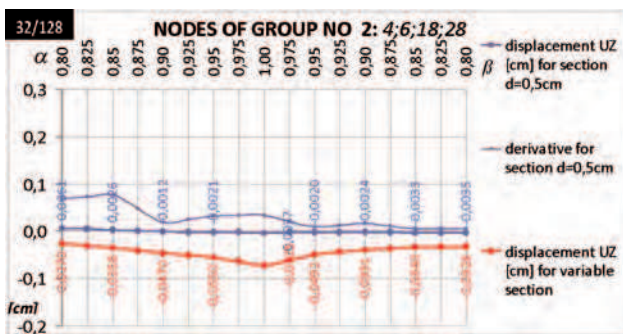


Fig. 32. The changes of the displacements occurring in the nodes of group 2 of the dome generated from the 32- and 128-hedron, in the α and β function and their derivatives for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

The other investigated geodesic dome was the structure made up of the lattices of the 32- and 128-hedron within the range of $\alpha = 0.8$ to $\beta = 0.8$. The limit values of the rate of change were as follows: $\lambda_{gr} = 17.0\text{ kN}$ for the forces occurring in the bars, $\lambda_{gr} = 1.0\text{ cm}$ for the nodes displacements. On the basis of the assumed values λ_{gr} , stability of the analysed double-layer bar dome made up of the lattices of the 32- and 128-hedron was determined in the following

areas: $\alpha \leq 0.87$ and $\beta \leq 0.955$ for the forces occurring in bars as well as $\alpha \leq 0.84$ and $\beta \leq 0.94$ for the nodes displacements.

4. Optimisation of the structural material

Two double-layer geodesic domes were investigated in two ways, namely taking into account the identical cross-section of each bar ($d = 0.5\text{cm}$) as well as the variable cross-sections in the function of the internal forces for each of the bar groups. Aside from the stability analysis, the structural material, requisite in both cases, was also analysed. Figures 33 and 34 demonstrate the obtained results.

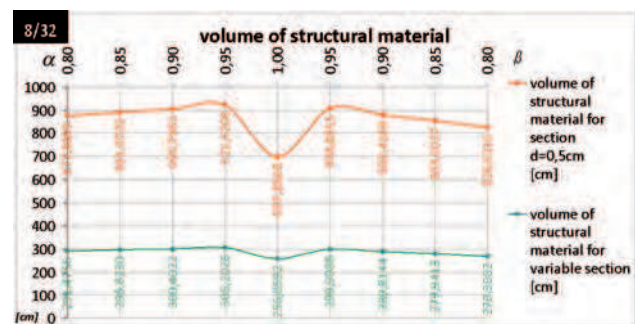


Fig. 33. The volume of the structural material of the geodesic dome generated from the 8- and 32-hedron in the α and β function for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

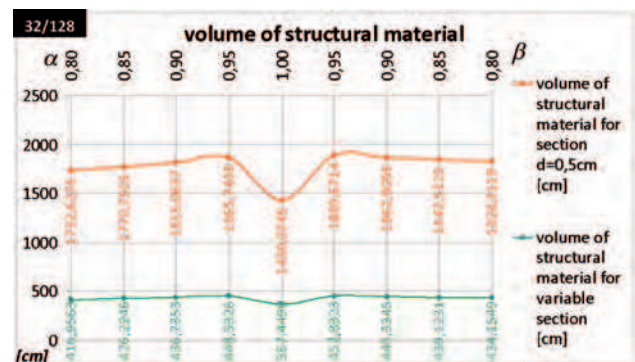


Fig. 34. The volume of the structural material of the geodesic dome generated from the 32- and 128-hedron in the α and β function for the bar cross-sections $d = 0.5\text{cm}$ and $d = \text{various cross-sections}$

5. Conclusions

The investigation showed that the change of the relation of the radii of the spheres determining the nodes influences the results of stability of geodesic domes among others. The static analysis is closely related to the geometric parameters.

Taking into account the analysed criteria, namely the forces in the bars as well as the displacements of the

nodes, the first of the investigated domes demonstrates stability in the area $\alpha \leq 0,905$ and $\beta \leq 0,96$.

Taking into consideration both of the analysed criteria, namely the forces in the bars as well as the displacements of the nodes, the other investigated dome shows stability in the area $\alpha \leq 0,84$ and $\beta \leq 0,94$.

On the basis of the analysis of the domes with variable cross-sections a decrease of the required amount of the structural material by as much as around 70% in comparison with the initial assumptions concerning the identity of the cross-section of all the bars in the given dome was observed.

The investigated double-layer geodesic domes demonstrated greater stability than single-layer domes.

The choice of the geodesic dome from the static areas can additionally depend on specific technological and operational requirements and others.

References

- [1] Mirski J.: *The Investigation of the Geometric Stability of the Selected Group of the Double-layer Bar Domes*. The 6th Scientific-Technical Conference „Current Scientific and Exploratory Problems in Civil Engineering”. The University of Warmia and Mazury, Olsztyn-Kortowo, 2003; pp. 225-234.
- [2] Mirski J.: *The Lattices/Grids Generated from the Transformations of the Regular Octahedron* (in Polish) Zesz. Nauk. A.R. we Wrocławiu, Mel. XLI; No. 212/1992, pp.27-39.
- [3] Bysiec D.: *A Group of Spherical Tessellations Based on Regular Octahedron*. The Journal of the Polish Society of Geometry and Engineering Graphics. Gliwice, December 2008, pp. 58-68.

Dominika Bysiec

Badanie stateczności dwuwarstwowych kopuł geodezyjnych pochodzących z oktaedru

1. Wprowadzenie

Kopuły geodezyjne mogą być wykorzystane jako przekrycia stadionów, hal, centrów handlowych, itp. Wykonane z prętów metalowych stanowią lekkie konstrukcje, których rozpiętość może sięgać nawet 200 m i nie istnieje konieczność zastosowania podpór pośrednich. Struktury prętowe kopuł jednowarstwowych o małych wyniosłościach są szczególnie podatne na niezachowanie stateczności. Dlatego też korzystniejszym rozwiązaniem jest budowa struktur dwuwarstwowych, które otrzymywane są poprzez topologiczne przekształcenia np. wielościanów foremnych. Konstrukcje te, zbudowane z dwóch warstw połączonych ze sobą za pomocą prętów stężających (łączyjących), wykazują większą stateczność niż kopuły jednowarstwowe [1].

2. Model badawczy

Wybrano trzy struktury prętowe jednowarstwowe pochodne z: 8-, 32- i 128-ścianu – powstałe z I sposobu podziału trójkąta równobocznego [2]. Struktury te odpowiednio połączono, tworząc dwie kopuły

prętowe dwuwarstwowe, pierwsza powstała – z 8- i 32-ścianu, druga – z 32- i 128-ścianu.

Kopuła utworzona z 8- i 32-ścianu składa się z węzłów o numerach 1÷13 stanowiących wierzchołki 32-ścianu oraz z węzłów 14÷18 będących wierzchołkami 8-ścianu. Na podstawie przeprowadzonej analizy wszystkie węzły pogrupowane zostały w 4 grupy (tabela 1).

Pręty 1÷28 odpowiadają krawędziom 32-ścianu, pręty 29÷36 odpowiadają krawędziom 8-ścianu, a pręty o numerach 37÷52 to pręty stężące. Podobnie jak węzły, wszystkie pręty również zostały usystematyzowane tworząc 8 grup (tabela 2).

Topologię $\frac{1}{4}$ części badanej kopuły dwuwarstwowej utworzoną z 8- i 32-ścianu przedstawiono na rysunku 1.

Druga kopuła dwuwarstwowa utworzona z siatek 32- i 128-ścianu ma 1÷41 węzły odpowiadające wierzchołkom 128-ścianu i 42÷54 węzły stanowiące wierzchołki 32-ścianu. Wszystkie węzły uszeregowane zostały w 9 grup (tabela 3).

W tej badanej kopule dwuwarstwowej pręty 1÷104 odpowiadają krawędziom 128-ścianu, pręty 105÷132

odpowiadają krawędziom 32-ścianu, a pręty 133÷188 są prętami łączącymi dwie struktury jednowarstwowe. Wszystkie pręty pogrupowano w 26 grup i zestawiono w tabeli 4.

Rysunek 2 przedstawia topologię ¼ siatki drugiej dwuwarstwowej struktury prętowej kopuły geodezyjnej.

3. Badanie stateczności wybranych kopuł

Podczas badań uwzględniono zmianę grubości kopuł, charakteryzującą odległość pomiędzy warstwami, czyli stosunek promieni sfer opisujących węzły każdej struktury jednowarstwowej.

Badane dwa modele dwuwarstwowych kopuł geodezyjnych obciążone zostały siłą skupioną o wartości 10 kN, umieszczoną w węzle symetrycznym, najwyżej położonym. Skoncentrowano się na siłach występujących w prętach oraz na przemieszczeniach węzłów. Obliczenia wykonane zostały za pomocą algorytmów utworzonych w używanych programach komputerowych. Dzięki nim uzyskano wyniki końcowe. Zmieniając relację promieni $R1/R2$ sfer opisujących węzły struktur, otrzymano zmienne wartości a i b , które odpowiadają grubościom analizowanych dwuwarstwowych kopuł. Przyjęto interwał zmiany wartości tych parametrów 0,05 w przedziale od 1,0 do 0,8.

Do celów analizy przyjęto w pierwszej kolejności stały przekrój dla wszystkich prętów ($d = 0,5\text{cm}$). W kolejnym kroku w obliczeniach dostosowywano nowe przekroje w funkcji sił wewnętrznych dla każdej grupy prętów. Uzyskano je przyjmując naprężenie dopuszczalne $\sigma_{\text{dop}} = 210\text{MPa}$ oraz korzystając ze wzoru (1).

Wyniki sił występujących w wybranych grupach prętów oraz przemieszczeń występujących w wybranych grupach węzłów zaprezentowano na rysunkach. Dodatkowo wykreślono pochodne obrazujące prędkość zmian wartości sił i przemieszczeń. Wykreślone krzywe wykazują w pewnych obszarach dużą prędkość zmian wartości, co można interpretować jako obszary niestateczne dla analizowanych kopuł geodezyjnych ze względu na siły w prętach i przemieszczenia węzłów. Przyjęto λ_{gr} zarówno dla sił w prętach, jak i przemieszczeń węzłów, jako dopuszczalny obszar, w którym poszukuje się rozwiązania [1].

λ_{gr} – dopuszczalna (graniczna) wartość prędkości zmian przemieszczeń węzłów/sił w prętach.

Jako pierwszą, analizie poddano dwuwarstwową kopułę geodezyjną utworzoną z siatek 8- i 32-ścianu. Dla celów porównawczych wybrano dodatkową grupę prętów, która wykazuje mniejsze λ_{gr} niż założone przy sporządzaniu analizy.

Analizie poddano rodzinę struktur dwuwarstwowej kopuły utworzonej z 8- i 32-ścianu w zakresie od $\alpha = 0,8$ do $\beta = 0,8$. Stateczność przebadano biorąc pod uwagę wykresy sił w prętach i ich pochodnych oraz wykresy przemieszczeń węzłów i ich pochodnych. Przyjęto jednakowe wartości dopuszczalnych (granicznych) prędkości zmian: dla sił występujących w prętach 5,0 kN, dla przemieszczeń węzłów $\lambda_{\text{gr}} = 0,3\text{cm}$. Na podstawie przyjętych wartości λ_{gr} określono stateczność analizowanej dwuwarstwowej kopuły prętowej utworzonej z siatek 8-ścianu i 32-ścianu w obszarach: $\alpha \leq 0,905$ i $\beta \leq 0,98$ dla sił występujących w prętach oraz $\alpha \leq 0,905$ i $\beta \leq 0,96$ dla przemieszczeń węzłów.

Podobną analizę przeprowadzono dla drugiej kopuły geodezyjnej, również dwuwarstwowej, utworzonej z siatek 32- i 128-ścianu. Wyniki zaprezentowano na rysunkach.

Do celów porównawczych rysunki 23 oraz 24 przedstawiają wyniki grupy prętów nr 21, których pochodna zmian jest mniejsza niż zakładana wartość graniczna λ_{gr} .

Dla celów porównawczych rysunki 31 oraz 32 przedstawiają wyniki sił występujących w grupie prętów nr 2. Szybkość ich zmian jest mniejsza od zakładanej wartości granicznej λ_{gr} .

Drugą badaną kopułą geodezyjną jest struktura utworzona z siatek 32-ścianu i 128-ścianu w zakresie od $\alpha = 0,8$ do $\beta = 0,8$. Wartości dopuszczalnych (granicznych) prędkości zmian: dla sił występujących w prętach $\lambda_{\text{gr}} = 17,0\text{kN}$, dla przemieszczeń węzłów $\lambda_{\text{gr}} = 1,0\text{cm}$. Na podstawie przyjętych wartości λ_{gr} określono stateczność analizowanej dwuwarstwowej kopuły prętowej utworzonej z siatek 32- i 128-ścianu w obszarach: $\alpha \leq 0,87$ i $\beta \leq 0,955$ dla sił występujących w prętach oraz $\alpha \leq 0,84$ i $\beta \leq 0,94$ dla przemieszczeń węzłów.

4. Optymalizacja materiału konstrukcyjnego

Dwie dwuwarstwowe kopuły geodezyjne przebadane zostały w dwojaki sposób, tj. biorąc pod uwagę identyczność przekroju każdego pręta: $d = 0,5\text{cm}$ oraz zmienność przekrojów w funkcji sił wewnętrznych dla każdej grupy prętów. Oprócz analizy stateczności, badaniu poddano również materiał konstrukcyjny, potrzebny w obydwu przypadkach. Rysunki 33 i 34 prezentują uzyskane wyniki.

5. Wnioski i podsumowanie

Z badań wynika, że zmiana relacji promieni sfer opisujących węzły wpływa m.in. na wyniki stateczności kopuł geodezyjnych. Analiza statyczna jest ści-

śle związana z parametrami geometrycznymi

Biorąc pod uwagę analizowane kryteria, tzn. siły w prętach oraz przemieszczenia węzłów, pierwsza analizowana kopuła wykazuje stateczność w obszarze $\alpha \leq 0,905$ i $\beta \leq 0,96$.

Biorąc pod uwagę obydwie analizowane kryteria, tzn. siły w prętach oraz przemieszczenia węzłów, druga analizowana kopuła wykazuje stateczność w obszarze $\alpha \leq 0,84$ i $\beta \leq 0,94$.

Na podstawie analizy kopuł ze zmiennymi przekrojami zauważono zmniejszenie potrzebnej ilości materiału konstrukcyjnego nawet o ok. 70% w porównaniu do pierwotnych założeń dotyczących identyczności przekroju wszystkich prętów w danej kopule.

Badane kopuły geodezyjne dwuwarstwowe wykazały większą stateczność aniżeli kopuły jednowarstwowe.

Wybór kopuły geodezyjnej z obszarów statecznych może być dodatkowo uzależniony od określonych wymogów technologicznych, eksploatacyjnych i innych.