

ZBIGNIEW KOWAL

Kielce University of Technology  
Faculty of Civil and Environmental Engineering  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7  
25-314 Kielce, Poland  
e-mail: zbigko@tu.kielce.pl

# PROBABILISTIC OPTIMISATION OF THE BEARING CAPACITY OF CONVENTIONAL HALL COVERINGS

## Abstract

*The paper presents a means of increasing the bearing capacity and reliability of beam-purlin and truss-purlin coverings of halls. That is achieved, on the basis of the bearing capacity probabilistic optimisation, through the coupling of the covering trusses by bracing them into a single kinematically admissible failure mechanism of the structure. Quantitative examples of the impact of continuous bracings on the bearing capacity of trusses and girders were included. Estimated values of  $k$  coefficients increasing the bearing capacity of the covering structure due to the optimisation were given in tables. The bearing capacity of the hall trusses coupled with a set of continuous bracings was compared with the bearing capacity and reliability of separately dimensioned girders and trusses.*

**Keywords:** probabilistic optimisation, halls, coverings

## 1. Introduction

Reliability and safety of building structures has been a matter of interest of many researchers. In Poland, such issues are currently investigated, among others, by Biegus [1], Gwóźdź and Machowski [3], Dziubdziela [4], Kopociński [5], Murzewski [15], and Woliński. Yet the solutions proposed by researchers are only fragmentarily represented in university syllabuses or standards for building structures. As a result, substantial economic and social losses are generated in construction throughout the world. The state-of-the-art knowledge of the reliability of structure systems, though imperfect it is, if applied, would be able to prevent approx. 70% of disasters and failures of building structures from happening. A vast number of random factors that affect the structure reliability are difficult to account for. It is problematic to differentiate the factors that have dominant effect and those that contribute to either increase or decrease in the structure bearing capacity and reliability. As regards complex structures, bearing capacity and reliability consist of the **value of the structure itself** connected with kinematically admissible failure mechanism (KAFM). That provides a physical basis of **probabilistic optimisation of the bearing capacity and reliability** of building structures at the design stage. It is also the case, when the structure bearing capacity and reliability are enhanced in order to make the structure energy-active.

Probabilistic optimisation of reliability yields particularly good results for hall structures. Their bearing capacity and reliability can be radically increased without increasing cross sections of the causative elements, because, at the same time, it is possible to reduce the impact of the stability loss on the bearing capacity of the covering. It should be mentioned that the bearing capacity of structure systems estimated with the academic methods, which rely on the strength of materials and the structure mechanics, contains inherent errors. For instance, statically determinate structures are the less safe, the more elements are found in the system. On the other hand, statically indeterminate structures are the safer, the more parallel, from the reliability standpoint, connections are found in a structure, and the more elements are contained in the minimal critical sets (MCS). **MCS of trusses is such a set in which, if only one truss is reliable, the whole set of trusses is reliable** [11]. That by no means excludes the work of supervision authority checking for defects, which contributes to enhancing the bearing capacity and reliability of trusses and girders in halls.

The paper discusses how, by introducing bracings that enforce parallel co-operation of the causative elements, it is possible to increase the structure bearing capacity and reliability. The issues under consideration are structures of hall coverings, in which

under gravitational load, beam failure mechanisms of separate girders, girder forms, or trusses can occur. In such structures, girders can be entered in cooperation by means of continuous vertical bracings between girders, and protected from stability loss due to bracings between trusses or girders as shown in Figure 1c, d, e. In this way a number of kinematically admissible failure mechanisms of the hall covering structure can be reduced to a single, segmented failure mechanism of girders or trusses. In this way, it is possible to substantially increase the bearing capacity and reliability of the hall covering structure, because standards [17] do not require the use of continuous longitudinal slope bracings along the hall or continuous vertical-longitudinal bracings between trusses and do not show the method of calculation.

In energy-active halls, additional loads in the form of power systems and temperature will occur. Additionally, structural causes of hall safety hazards described in work [13] still remain. That results in the bearing capacity and reliability being lower than those recommended by standards [16].

A comparison is made between the bearing capacity of hall girders and trusses coupled with a set of continuous bracings, shown in Figure 1c, d, e, with the bearing capacity and reliability of separately dimensioned solid hall girders and trusses.

## 2. Optimisation of the bearing capacity and reliability of hall girder coverings

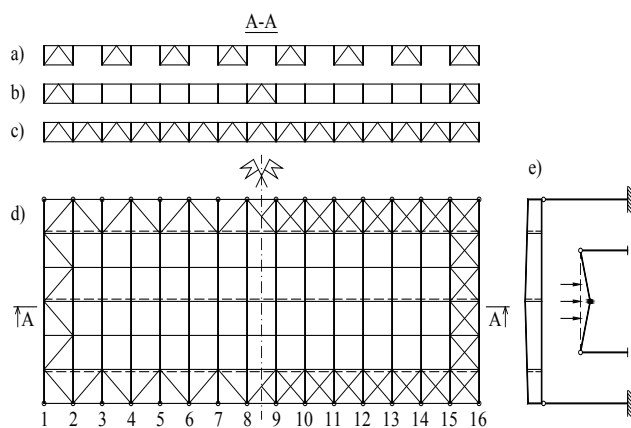


Fig. 1. Girder bracings: a) in pairs, b) key lateral, c) continuous lateral, d) slope, e) spacing on the girder + beam failure mechanism

Figure 1a shows an example of block lateral bracings of hall covering girders, which is readily used in the assembly of two blocked girders at a time. In Figure 1b, lateral bracings between girders, which limit the girder stability loss, are shown. Figure 1c presents

continuous lateral bracings between girders, which couple beam failure mechanisms of all girders into a single, segment failure mechanism. In Figure 1d, one can see continuous slope perimetral bracings that couple column tilt failure mechanisms into a single, segment column failure mechanism. The latter is discussed in a different paper. Broken lines in Figure 1d denote lateral bracings between girders. Figure 1e shows the spacing of bracings as seen on the girder.

If incomplete bracings, in accordance with Figure 1a or 1b, are applied, independent vertical girder displacements (keying) are possible. Consequently, girder failure frequency increases, whereas the covering bearing capacity and reliability decrease. That is illustrated by Examples 3 and 4 which concern independent KAFM of girders.

**Example 1.** Nine girders, joined in series, are given. The reliability of each girder is  $p_2 = 0.999\ 927\ 650$ , those are RC2 class with the index  $t_2 = 3.8$  [16]. Failure frequency of a single girder amounts to  $q_2 = 0.000\ 072\ 35$ . Failure frequency of nine girders, joined in series, is:  $q = 9q_2 = 0.000\ 651\ 15$ , reliability  $p = 1 - q = 0.999\ 348\ 85$ . The reliability index is:  $3.215 < 3.8$  below RC2 class, and also below RC1 class ( $t = 3.3$ ) [16]. For sixteen girders that are not braced, failure frequency grows up to  $q = 16q_2 = 0.0011576$ , whereas reliability is reduced to  $p = 0.998\ 842\ 4$ , and the reliability index  $t$  drops to  $3.04654 < 3.8$ .

The quantile of the bearing capacity of the  $m$  girders braced (Fig. 1c) into a single, beam kinematically admissible failure mechanism is determined. It is assumed that  $m$  girders that have the coefficient of bearing capacity variation  $v_1 = D(N)/E(N)$  were designed in accordance with the base reliability index  $t_2 = 3.8$  recommended for common RC2 class structures [16]. The reliability index  $t_2 = 3.8$  is historically validated against causative elements dimensioned in accordance with standards. The quantile of the bearing capacity of a single girder  $N_k$ , dimensioned in accordance with the standards [16] can be written in the following form (1) [11]:

$$N_k = E(N_1)[1 - t_2 v_1] \quad (1)$$

where:  $E(N_1)$  – average (expected) bearing capacity of the girder,  $t_2 = 3.8$  – reliability index,  $v_1 = D(N_1)/E(N_1)$  – coefficient of the bearing capacity variation,  $D(N_1)$  – standard deviation of the bearing capacity.

The quantile of the bearing capacity of  $m$  "identical" girders is as follows [11]:

$$N_k = m E(N_1)[1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] \quad (2)$$

The ratio  $k$  of  $N_k$  quantile of the bearing capacity of  $m$  girders coupled in parallel to  $m$  number of  $N_{1k}$  quantiles of separate girders amounts to:

$$\begin{aligned} k &= N_k / m N_{1k} = \\ &= mE(N_1)[1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] / mE(N_1)[1 - t_2 v_1] = \quad (3) \\ &= [1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] / [1 - t_2 v_1] \end{aligned}$$

Example 2 describes the way in which coefficient  $k$  is estimated. This coefficient shows an increase in the bearing capacity of the braced segment of the covering girders as a function of  $m$  number of girders.

**Example 2.** Four,  $m = 4$ , girders are given. Those have the bearing capacity coefficient  $v_1 = 0.06$  and the reliability index  $t_2 = 3.8$ . The quantile of the bearing capacity of a single girder amounts to:

$$\begin{aligned} N_{1k} &= E(N_1)[1 - t_2 v_1] = \\ &= E(N_1)[1 - 3.8 \times 0.06] = E(N_1)[1 - 0.228] = 0.772 E(N_1) \end{aligned}$$

The quantile of the bearing capacity of a coupled set of  $m = 4$  girders amounts to:

$$\begin{aligned} N_k &= mE(N_1)[1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] = \\ &= 4E(N_1)[1 - 3.8 \times 0.06 / 2] = 4E(N_1)[1 - 0.114] = \\ &= 4 \times 0.886 E(N_1). \end{aligned}$$

Coefficient  $k$  of an increase in the bearing capacity of a segment of four coupled girders is as follows:

$$\begin{aligned} k &= N_k / m N_{1k} = [1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] / [1 - t_2 v_1] = \\ &= 0.886 / 0.772 = 1.1477 \end{aligned}$$

**Conclusion:** The bearing capacity of four girders coupled with bracings has increased by 14.8%.

Table 1. presents coefficients  $k$  of an increase in the bearing capacity of  $m$  girders coupled with bracings, coefficients of the bearing capacity variation are  $v_1 = 0.06; 0.08; 0.09; 0.1$ , the recommended reliability index for RC2 class covering structure is  $t = \beta = 3.8$ . Lower row numbers indicate percentage increase in the bearing capacity of kinematically admissible failure mechanism of girder segment.

**Table 1.** Coefficients  $k$  of the bearing capacity of  $m$  braced girders of RC2 class hall covering

$m =$	2	3	4	5	6	7	8	9	12	16
$v = 0.06$	1.0865	1.1248	1.1477	1.1633	1.1748	1.1837	1.1909	1.1969	1.2101	1.2215
%	8.7	12.5	14.8	16.3	17.5	18.4	19.1	19.7	21.0	22.2
$v = 0.08$	1.1279	1.1846	1.2184	1.2414	1.2585	1.2717	1.2824	1.2919	1.3107	1.3276
%	12.8	18.5	21.8	24.1	25.9	27.2	28.2	29.1	31.1	32.8
$v = 0.09$	1.1522	1.2197	1.2599	1.2873	1.3076	1.3233	1.3360	1.3465	1.3697	1.3898
%	15,2	22,0	26,0	28,7	30,8	32,3	33,6	34,7	37,0	39,0
$v = 0.10$	1.1795	1.2590	1.3065	1.3388	1.3627	1.3829	1.3962	1.4086	1.4360	1.4597
%	18.0	25.9	30.7	33.9	36.3	38.3	39.6	40.9	43.6	46.0

### 3. Optimisation of the bearing capacity and reliability of truss covering

Figure 2 shows exemplary continuous and lateral slope bracings between trusses. Bracings in Figure 2a, b limit the stability loss of the nodes. Bracings in Figure 2c, additionally, couple kinematically admissible failure mechanisms of trusses into a single kinematically admissible failure mechanism of the hall covering. The causative elements of the trusses are bars and bar–node joints (Fig. 2e).

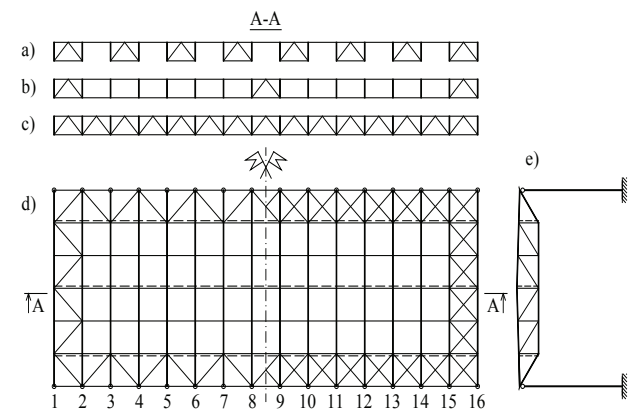


Fig. 2. Truss bracings: a) discontinuous, in pairs, b) key lateral, c) continuous, coupling trusses, d) slope, e) spacing of bracings on the truss

If no continuous bracing of the system of  $m$  statically determinate trusses made of bars that have the base reliability index  $t_2 = 3.8$  is used, safety  $p$  of a truss made of  $n$  causative elements can be estimated from a known formula (4):

$$p = \prod \Pr\{N_i > S_i\} = \prod p_i = 1 - \sum q_i \quad (4)$$

where:  $p_i = \Pr\{N_i > S_i\}$  – safety of the  $i$ -th bar or joint,  $S_i$  – load of the  $i$ -th element,  $q_i = 1 - p_i$  – failure frequency of bars and joints,  $p = 1 - \sum q_i$  – truss reliability.

In general construction, for RC2 class, the structure reliability index  $t_2 = 3.8$  is recommended. The causative elements of a truss, dimensioned in accordance with standards, satisfy the requirements set by the codes. The

reliability of statically determinate trusses, however, is the lower, the more causative elements are found in a truss. Causative elements include bars and bar-node joints. Thus, in order to estimate the reliability of a segment of trusses braced into a single kinematically admissible failure mechanism of trusses, it is necessary to employ the reliability of a truss, and not the reliability of truss elements. The structure elements dimensioned in accordance with standards meet the recommended reliability  $p_2 = 0.999\ 927\ 650$  for RC2 class with the index  $t_2 = 3.8$ . The failure frequency of elements is  $q_2 = 1 - p_2 = 0.000\ 072\ 350$ . Expected failure frequency of a truss depends on the  $n$  number of causative elements and can be estimated from the formula:

$$q = n q_2 \tag{5}$$

Reliability  $p$  of a truss of  $n$  elements that have identical expected reliability is as follows:

$$p = 1 - n q_2 \tag{6}$$

**Example 3.** Estimation of the expected reliability of a truss that consists of  $n = 100$  elements, each of which has the reliability index  $t_2 = 3.8$ . The truss failure frequency is  $q_w = 100q_2 = 0.007\ 235$ . The truss reliability is:  $p_w = 1 - n q_2 = 0.992\ 765$ . Estimated on the basis of distribution tables, the truss reliability index  $t_w = 2.4454 < 3.8$  is lower than the index recommended for the weakest class structure [16].

If the trusses were joined in series, additional decrease in the bearing capacity and reliability of the covering would show due to the occurrence of independent vertical girder displacements caused by the lack of bracing continuity. The failure frequency of trusses would increase, whereas the bearing capacity and reliability of the covering would be diminished. That is illustrated by Example 4, which concerns the reliability of four girders that are being independently displaced.

**Example 4.** If four trusses remain to be joined in series, the system failure frequency will increase four times up to  $q_w = 4q_2 = 0.028\ 94$ , while the reliability will decrease to  $p_w = 1 - 4q_2 = 0.97106$ . The reliability index will decrease to  $t_w = 1.8951 < t = 3.3$  below RC1 class, for which the recommended reliability index for temporary structures amounts to  $t = 3.3$ .

Parallel coupling of four trusses with bracings into a single kinematically admissible failure mechanism of the covering increases the bearing capacity and reliability in the way described in Example 5.

**Example 5.** The quantile of reliability of a single truss is:

$$N_{1k} = E(N_1)[1 - 2.4454 \times 0.06] = E(N_1)[1 - 0.146724] = 0.853276 E(N_1)$$

The quantile of the bearing capacity of a coupled system of four trusses is:

$$N_k = 4E(N_1)[1 - 2.4454 \times 0.06/2] = 4E(N_1)[1 - 0.07336] = 4 \times 0.9266 E(N_1)$$

An increase in the bearing capacity of four coupled trusses, determined from formula (3) amounts to:

$$k = N_k/m N_{1k} = [1 - t_w v_1 / 2] / [1 - t_{100} v_1] = 0.9266 / 0.853276 = 1.086$$

**Conclusion:** The quantile of the bearing capacity of a coupled system of four trusses is greater than the sum of quantiles of the bearing capacity of four separate trusses by 8.6%. The reliability index amounts to:  $t = 2 \times 2.4454 = 4.8908 > 4.3$  and is higher than the one recommended by standards for RC1, RC2 and RC3 classes. The reliability of the coupled system of four trusses is:  $p = 0.999\ 999\ 498\ 8$ . The impact of parallel coupling with bracings of  $m > 4$  statically determinate trusses which consist of 100 causative elements increases the bearing capacity and reliability of the structure kinematically admissible failure mechanism to the values higher than those recommended by the standards.

If nine trusses (of  $v_1 = 0.06$  elements) are coupled in parallel with bracings into a single kinematically admissible failure mechanism, the bearing capacity of the covering is increased by 11.5%.

**Table 2.** Increase in the bearing capacity  $N_k$  of the covering of  $m$  coupled trusses, each of which contains 100 causative elements

$m =$	4	6	9	12	16
$v = 0.06$	1.086	1.1018	1.1146	1.1223	1.1289
%	8.6	10.2	11.5	12.2	12.9
$v = 0.08$	1.1216	1.1439	1.1621	1.1730	1.1824
%	12.2	14.4	16.2	17.3	18.2
$v = 0.10$	1.1618	1.1916	1.2158	1.2303	1.2428
%	16.2	19.2	21.6	23.0	24.3

Table 2 presents coefficients of increase in the bearing capacity of trusses braced in parallel, made of 100 causative elements that have the reliability index  $t = 3.8$  (RC2 class), taking into account the coefficients of bearing capacity variation  $v_1 = 0.06, 0.08, 0.10$ . The truss reliability index calculated in Example 3 is:  $t_w = 2.4454$ . Bearing capacity increase due to the coupling of trusses with continuous bracings is determined in accordance with Example 5 from formula (3) in relation to the bearing capacity of statically determinate trusses that have the reliability index:  $t_w = 2.4454 < 3.8$ .

## 4. Summing-up, remarks and conclusions

The probabilistic analysis of the bearing capacity of the structure made of a hundred RC2 class elements, each of which has the reliability index  $t = 3.8$ , joined in series indicates as follows: the bearing capacity and reliability of a single truss of 100 causative elements, dimensioned on the basis of the standards in accordance with the reliability index  $t = 3.8$  decreases to the index  $t = 2.4454 < t = 3.3$  below RC1 class [16], for which the recommended reliability index  $t = 3.3$  is the same as for a temporary structure.

If, as shown in the example, a larger number of trusses remain being joined in series, an additional decrease in the bearing capacity and reliability of the structure will occur. For four trusses that are left unbraced, the reliability index will further decrease to  $t = 1.8951 < 3.3$ , the latter is the index value recommended for temporary structures.

The use of continuous bracings, which couple more than four trusses in parallel, increases the structure bearing capacity and reliability, yielding the results higher than those for RC2 class. As in an average hall a substantial number of trusses is found, a general conclusion can be drawn: **in halls, in which a large number of trusses or girders are adequately coupled with bracings in accordance with Figure 2 c, d, e, it is possible to dimension the elements of those girders and trusses without the risk of lowering the bearing capacity and reliability of the covering to below RC2 class, which is recommended by the standard** [16].

The task of bracings in the optimised hall structure is to couple, in parallel, whole segments of the main elements into the mechanism of kinematic failure. Continuous vertical lateral bracings between trusses (Fig. 2 c) account for parallel cooperation of the trusses forming minimal critical sets of trusses (or girders) that increase their bearing capacity and reliability.

It should be mentioned that continuous lateral slope bracings and continuous longitudinal slope bracings along halls (Fig. 2), which fulfil an important role in limiting the impact of stability loss on truss bearing capacity, also couple columns into a minimal critical set (MCS) of columns related to the kinematically admissible tilt failure mechanism of columns. The above issue is discussed in a separate paper [13].

## References

- [1] Biegus A.: *Podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji*, Of. Wyd. P. Wr. 1996.
- [2] Bogucki W.: *Budownictwo stalowe*, Wydanie czwarte, cz. 2. Arkady (1977), s. 33-35.
- [3] Gwóźdź M., Machowski A.: *Wybrane badania i obliczenia konstrukcji budowlanych metodami probabilistycznymi*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2011.
- [4] Dziubdziela W., Kopociński B., Kowal Z.: *Ultimate bearing capacity of structural systems with minimal critical sets having joint elements in pairs*, Archives of Mechanics 25, 5 (1973), pp. 719-731.
- [5] Kopociński B., Kowal Z.: *Losowa nośność graniczna konstrukcji o dwóch minimalnych krytycznych zbiorach elementów mających elementy wspólne*. Arch. Inż. Łąd. 1 (1972), s. 103-115.
- [6] Kowal Z.: *Losowa moc graniczna konstrukcji złożonych jako obiektywna z punktu widzenia niezawodności miara stanu granicznego konstrukcji*, ZN Politechniki. Gdańskiej 187, Budownictwo Łądowe XXIII, Gdańsk 1972, s. 13-22.
- [7] Kowal Z.: *Zuverlässigkeit von Konstruktionssystemen*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden 25 (1976), H. 1/2, s. 265-270.
- [8] Kowal Z.: *O przyczynach zmniejszenia niezawodności konstrukcji stalowych wielkopowierzchniowych hal. On the causes of lower reliability of steel structures of large surface halls*, Remo 2009, Wiadomości Konserwatorskie 26 (2009), s. 565-573.
- [9] Kowal Z., Tkaczyk Ł.: *Uszkodzenia doczołowostycznych połączeń dźwigarów z falistym środkiem*, Konferencja nt. Awarie Budowlane, Szczecin-Międzyzdroje, 23-26 maj 2007, s. 607-614.
- [10] Kowal Z., Piotrowski R., Szychowski A.: *Szywność połaciowa struktur prętowych o oczkach kwadratowych*, Konferencja nt. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica – Rzeszów 2011, Z.N. Politechniki Rzeszowskiej nr 3 (2011)/II, s. 249-256.
- [11] Kowal Z.: *The formation of space bar structures supported by the system reliability theory*, Arch. of Civil and Mechanical Engineering, Polish Ac. of Sci.-Wrocław Branch. Wr. Univ. of Technology, V. XI, No. 1 (2011), pp. 115-133.
- [12] Kowal Z.: *Hazards associated with the load-bearing capacity of bar space structures during assembly and performance*, Promysłowe budownictwo ta inżynerni sporudy, Kijów (2011), pp. 675-682.
- [13] Kowal Z.: *Probabilistyczna optymalizacja nośności słupów konstrukcji hal konwencjonalnych*, Konf. NT KILiW PAN i KN PZITB, Krynica – Rzeszów (2012), 2.59 (nr 3/2012/II) s. 185-192.
- [14] Łubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W.: *Konstrukcje metalowe*, Arkady, Warszawa 2000.
- [15] Murzewski J.: *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Arkady, Warszawa 1989.
- [16] Eurocod PN-EN–1990:2002. Podstawy projektowania konstrukcji.
- [17] Eurokod 3: PN-EN 1993-1 do 12 (2006-2008), Projektowanie konstrukcji stalowych.
- [18] Zieliński R.: *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1972.

Zbigniew Kowal

# Probabilistyczna optymalizacja nośności konstrukcji przekryć hal konwencjonalnych

## Streszczenie

*W artykule pokazano sposób zwiększenia nośności i niezawodności belkowo-płatwiowych oraz wiązarowo-płatwiowych przekryć hal na podstawie probabilistycznej optymalizacji nośności realizowanej za pomocą sprzężania stężeniami wiązarów przekrycia w jeden kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia konstrukcji. Pokazano ilościowe przykłady wpływu ciągłych stężeń na nośności wiązarów i rygli. W tabelach umieszczono oszacowania współczynników  $k$  zwiększających nośność konstrukcji przekrycia w wyniku optymalizacji. Porównano nośność wiązarów hali sprzężonych kompletem ciągłych stężeń z nośnością i niezawodnością odrębnie wymiarowanych rygli oraz wiązarów.*

**Słowa kluczowe:** probabilistyczna optymalizacja, hale, przekrycia

## 1. Wprowadzenie

Niezawodnością i bezpieczeństwem konstrukcji budowlanych zajmowało się wielu autorów. Aktualnie tą problematyką zajmują się w Polsce, między innymi: Biegus [1], Gwóźdź i Machowski [3], Dziubdziela [4], Kopociński [5], Murzewski [15] oraz Woliński. Jednakże z proponowanych rozwiązań realnie trafiają do projektowania oraz do dydaktyki i norm konstrukcji budowlanych tylko szczątkowe informacje. Wynikają z tego znaczące straty ekonomiczne i społeczne w budownictwie światowym. Wykorzystanie aktualnego, niedoskonałego stanu wiedzy o niezawodności systemów konstrukcyjnych mogłoby zapobiec wystąpieniu około 70% katastrof i awarii konstrukcji budowlanych. Jedną z przyczyn braku wdrożeń jest mnogość losowych wpływów o różnym znaczeniu na niezawodność konstrukcji. Wyróżnienie wpływów dominujących, nadających trend zwiększający lub zmniejszający nośność i niezawodność konstrukcji jest trudne. Nośność i niezawodność konstrukcji złożonych jest **wartością własną konstrukcji** stowarzyszoną z kinematycznie dopuszczalnymi mechanizmami zniszczenia (KDMZ) konstrukcji. Stanowi to fizyczną podstawę **probabilistycznej optymalizacji nośności i niezawodności** konstrukcji budowlanych w fazie projektowania, a także do zwiększenia nośności i bezpieczeństwa konstrukcji w procesie przystosowania do roli konstrukcji energoaktywnej.

Szczególnie efektywne wyniki daje probabilistyczna optymalizacja niezawodności konstrukcji hal, których nośność i niezawodność możemy radykalnie zwiększyć bez zwiększania przekrojów elementów sprawczych konstrukcji, gdyż jednocześnie możemy ograni-

czyć wpływ utraty stateczności na nośność przekrycia. Należy nadmienić, że nośność systemów konstrukcyjnych szacowana akademickimi metodami wytrzymałości materiałów i mechaniki budowli jest obarczona błędami systematycznymi. Na przykład konstrukcje statycznie wyznaczalne są tym mniej bezpieczne, im więcej elementów sprawczych występuje w systemie. Natomiast konstrukcje statycznie niewyznaczalne są tym bezpieczniejsze, im więcej równoległych z punktu widzenia niezawodności połączeń występuje w konstrukcji i im więcej elementów jest zawartych w minimalnych krytycznych zbiorach (MKZ). **MKZ wiązarów jest to taki zbiór, w którym jeśli jeden wiązar jest sprawny to cały zbiór wiązarów jest sprawny** [11]. Oczywiście nie wyklucza to konieczności nadzoru służb brakarskich skutkującego zwiększeniem nośności i niezawodności wiązarów i rygli hal.

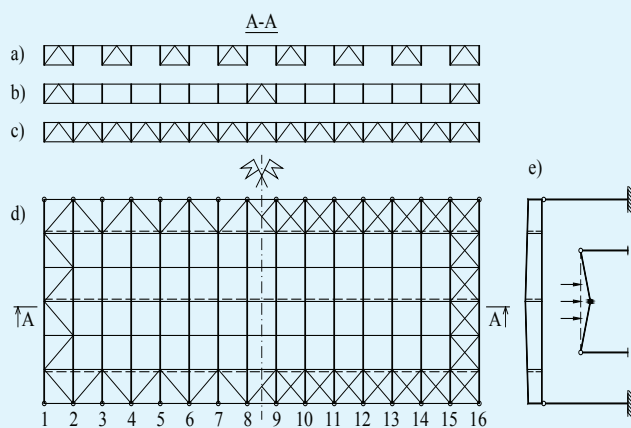
W artykule pokazano szczególny wpływ na zwiększenie nośności i niezawodności konstrukcji wprowadzenia stężeń wymuszających równoległą współpracę elementów sprawczych konstrukcji. Weźmy pod uwagę konstrukcje przekryć hal, w których mogą występować pod obciążeniem grawitacyjnym belkowe mechanizmy zniszczenia odrębnych dźwigarów, postaci rygli lub wiązarów. W takich konstrukcjach rygle mogą być wprężane do współpracy przez ciągłe stężenia pionowe pomiędzy dźwigarami i zabezpieczone przed utratą stateczności za pomocą stężeń między wiązarami lub ryglami w sposób pokazany na rysunku 1c,d,e. W ten sposób możemy zredukować liczbę kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia (KDMZ) konstrukcji nośnej przekrycia hali do jednego segmentowego mechanizmu zniszczenia rygli lub wiązarów.

W taki sposób możemy znacząco zwiększyć nośność i niezawodność konstrukcji przekrycia hali, gdyż normy [17] nie wymuszają stosowania ciągłych połączeniowych stężeń podłużnych wzdłuż hali oraz ciągłych pionowo poprzecznych stężeń pomiędzy wiązarami i nie pokazują metody ich rachunku.

W halach energoaktywnych wystąpią dodatkowe obciążenia instalacjami energetycznymi oraz temperaturą. Ponadto pozostaną strukturalne przyczyny zagrożeń bezpieczeństwa hal opisane w pracy [8] skutkujące mniejszą nośnością i niezawodnością hal aniżeli zalecana w normach [16].

Porównajmy nośność rygli oraz wiązarów hali sprzężonych kompletem ciągłych stężeń pokazanych na rysunku 1c,d,e z nośnością i niezawodnością odrębnie wymiarowanych pełnościennych rygli lub wiązarów hali.

## 2. Optymalizacja nośności i niezawodności przekryć hal o konstrukcji ryglowej



Rys. 1. Stężenia rygli: a) parami, b) klawiszowe poprzeczne, c) poprzeczne ciągłe, d) połączone, e) rozmieszczenie na ryglu + belkowy mechanizm zniszczenia

Na rysunku 1a pokazano przykład blokowych stężeń poprzecznych rygli przekryć hal, chętnie wykorzystywanych w montażu po dwa zblokowane rygle naraz. Na rysunku 1b pokazano (klawiszowe) poprzeczne stężenia między ryglami ograniczające utratę stateczności rygli. Na rysunku 1c pokazano poprzeczne stężenia ciągłe między ryglami sprzęgające belkowe mechanizmy zniszczenia wszystkich rygli w jeden segmentowy mechanizm zniszczenia. Na rysunku 1d pokazano ciągłe połączeniowe stężenia obwodowe sprzęgające przechyłowe mechanizmy zniszczenia słupów w jeden segmentowy mechanizm zniszczenia słupów będący przedmiotem odrębnej pracy [13]. Liniami przerywanymi oznaczono stężenia poprzeczne między ryglami. Na rysunku 1e pokazano rozmieszczenie stężeń w widoku na rygiel.

W przypadku zastosowania ułomnych stężeń według rysunków 1a lub 1b, umożliwiających niezależne przemieszczenia pionowe (klawiszowanie) rygli, awaryjność rygli ulega zwiększeniu a nośność i niezawodność przekrycia – zmniejszeniu. Pokazano to na przykładzie 3 i 4 niezależnych KDMZ rygli.

**Przykład 1.** Dane jest 9 szeregowo połączonych rygli o niezawodności  $p_2 = 0,999\ 927\ 650$  każdy, klasy RC2 o wskaźniku  $t_2 = 3,8$  [16]. Awaryjność pojedynczego rygla wynosi  $q_2 = 0,000\ 072\ 35$ . Awaryjność 9 szeregowo połączonych rygli wynosi:  $q = 9q_2 = 0,000\ 651\ 15$ . Niezawodność  $p = 1 - q = 0,999\ 348\ 85$ . Wskaźnik niezawodności wynosi:  $3,215 < 3,8$  poniżej klasy RC2 a także poniżej klasy RC1 ( $t = 3,3$ ) [16]. W przypadku 16 nie stężonych rygli awaryjność rośnie do  $q = 16q_2 = 0,0011576$ . Natomiast niezawodność maleje do  $p = 0,998\ 842\ 4$  a wskaźnik  $t$  niezawodności do  $3,04654 < 3,8$ .

Wyznamy kwantyl nośności  $m$  rygli stężonych za pomocą stężeń (rys. 1c) w jeden belkowy kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia (KDMZ). Załóżmy, że  $m$  rygli o współczynniku zmienności nośności  $v_1 = D(N)/E(N)$  zaprojektowano według bazowego wskaźnika niezawodności  $t_2 = 3,8$  zalecanego dla powszechnych konstrukcji klasy RC2 [16]. Wskaźnik  $t_2 = 3,8$  niezawodności jest historycznie sprawdzony na elementach sprawczych konstrukcji wymiarowanych według norm. Kwantyl  $N_k$  nośności pojedynczego rygla zwymiarowany wg norm [16] możemy zapisać w postaci (1) [11]:

$$N_k = E(N_1)[1 - t_2 v_1] \quad (1)$$

gdzie:  $E(N_1)$  – średnia nośność (oczekiwana) rygla,  $t_2 = 3,8$  – wskaźnik niezawodności,  $v_1 = D(N_1)/E(N_1)$  – współczynnik zmienności nośności,  $D(N_1)$  – odchylenie standardowe nośności.

Kwantyl nośności równoległe sprzężonych  $m$  „jednokowych” rygli wynosi [11]:

$$N_k = m E(N_1)[1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] \quad (2)$$

Stosunek  $k$  kwantyla  $N_k$  nośności  $m$  równoległe sprzężonych rygli do  $m$  kwantyli  $N_{1k}$  odrębnych rygli wynosi:

$$\begin{aligned} k &= N_k / m N_{1k} = \\ &= m E(N_1)[1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] / m E(N_1) [1 - t_2 v_1] = \\ &= [1 - t_2 v_1 / m^{0.5}] / [1 - t_2 v_1] \end{aligned} \quad (3)$$

Sposób oszacowania współczynnika  $k$  pokazującego zwiększenie nośności stężonego segmentu rygli przekrycia w funkcji liczby  $m$  rygli pokazano w przykładzie 2.

**Przykład 2.** Dane są  $m = 4$  rygle o współczynniku nośności  $v_1 = 0,06$  oraz wskaźniku niezawodności  $t_2 = 3,8$ . Kwantyl nośności pojedynczego rygla wynosi:

$$N_{1k} = E(N_1)[1 - t_2 v_1] = E(N_1)[1 - 3,8 \times 0,06] = \\ = E(N_1)[1 - 0,228] = 0,772 E(N_1)$$

Kwantyl nośności sprzężonego zespołu  $m = 4$  rygli wynosi:

$$N_k = mE(N_1)[1 - t_2 v_1 / m^{0,5}] = \\ = 4E(N_1)[1 - 3,8 \times 0,06 / 2] = 4E(N_1)[1 - 0,114] = \\ = 4 \times 0,886 E(N_1).$$

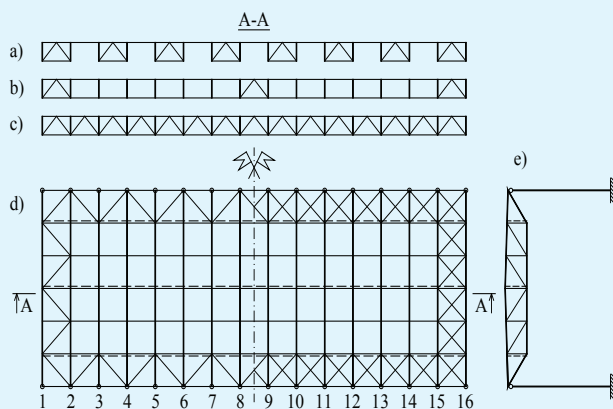
Współczynnik  $k$  zwiększenia nośności segmentu czterech sprzężonych rygli wynosi:

$$k = N_k / m N_{1k} = [1 - t_2 v_1 / m^{0,5}] / [1 - t_2 v_1] = \\ = 0,886 / 0,772 = 1,1477$$

**Wniosek:** Nośność czterech sprzężonych stężeniemi rygli zwiększa się o 14,8%.

W tabeli 1 zamieszczono współczynniki  $k$  zwiększenia nośności sprzężonych stężeniami  $m$  rygli o współczynnikach zmienności nośności  $v_1 = 0,06$ ; 0,08; 0,09; 0,1 konstrukcji przekrycia klasy RC2 o zalecanym wskaźniku niezawodności  $t = \beta = 3,8$ . Dolne liczby pokazują procentowe oszacowanie zwiększenia nośności KDMZ segmentu rygli.

### 3. Optymalizacja nośności i niezawodności przekrycia o konstrukcji wiązarowej



Rys. 2. Stężenia wiązarów: a) nieciągłe parami, b) klawiszowe poprzeczne, c) ciągłe sprzęgające wiązary, d) połączeniowe, e) rozmieszczenie stężeń na wiązarze

Na rysunku 2 pokazano przykładowe połączeniowe stężenia ciągłe i poprzeczne między wiązarami. Stężenia na rysunku 2a, b ograniczają utratę stateczności węzłów. Stężenia na rysunku 2c sprzęgają dodatkowo kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia wiązarów w jeden KDMZ przekrycia hali. Elementami sprawdzimi wiązarów są pręty oraz połączenia prętów z węzłami (rys. 2e).

W przypadku braku ciągłego stężenia układu  $m$  statycznie wyznaczalnych wiązarów wykonanych z prętów o bazowym wskaźniku niezawodności  $t_2 = 3,8$  bezpieczeństwo  $p$  wiązara zbudowanego z  $n$  elementów sprawdzonych można oszacować ze znanego wzoru (4):

$$p = \prod \Pr\{N_i > S_i\} = \prod p_i = 1 - \sum q_i \quad (4)$$

gdzie:  $p_i = \Pr\{N_i > S_i\}$  – bezpieczeństwo  $i$ -tego pręta lub połączenia,  $S_i$  – obciążenie  $i$ -tego elementu,  $q_i = 1 - p_i$  – awaryjność prętów i połączeń,  $p = 1 - \sum q_i$  – niezawodność wiązara.

W budownictwie powszechnym klasy RC2 zalecany jest wskaźnik niezawodności konstrukcji  $t_2 = 3,8$ . Elementy sprawcze wiązara wymiarowane na podstawie norm spełniają zalecenia normowe. Natomiast niezawodność statycznie wyznaczalnych wiązarów jest tym mniejsza im więcej elementów sprawdzonych występuje w wiązarze. Do elementów sprawdzonych należą pręty i połączenia z prętów z węzłami. Zatem do oszacowania niezawodności segmentu wiązarów stężonych w jednym MKZ wiązarów należy posłużyć się niezawodnością wiązara a nie jego elementów. Elementy konstrukcji wymiarowane na podstawie norm spełniają zalecaną niezawodność  $p_2 = 0,999\ 927\ 650$  klasy RC2 o wskaźniku  $t_2 = 3,8$ . Awaryjność elementów wynosi:  $q_2 = 1 - p_2 = 0,000\ 072\ 350$ . Oczekiwana awaryjność wiązara zależy od liczby  $n$  elementów sprawdzonych i można ją oszacować ze wzoru:

$$q = n q_2 \quad (5)$$

Tabela 1. Współczynniki  $k$  nośności  $m$  stężonych rygli przekrycia hali klasy RC2

$m =$	2	3	4	5	6	7	8	9	12	16
$v = 0,06$	1,0865	1,1248	1,1477	1,1633	1,1748	1,1837	1,1909	1,1969	1,2101	1,2215
%	8,7	12,5	14,8	16,3	17,5	18,4	19,1	19,7	21,0	22,2
$v = 0,08$	1,1279	1,1846	1,2184	1,2414	1,2585	1,2717	1,2824	1,2919	1,3107	1,3276
%	12,8	18,5	21,8	24,1	25,9	27,2	28,2	29,1	31,1	32,8
$v = 0,09$	1,1522	1,2197	1,2599	1,2873	1,3076	1,3233	1,3360	1,3465	1,3697	1,3898
%	15,2	22,0	26,0	28,7	30,8	32,3	33,6	34,7	37,0	39,0
$v = 0,10$	1,1795	1,2590	1,3065	1,3388	1,3627	1,3829	1,3962	1,4086	1,4360	1,4597
%	18,0	25,9	30,7	33,9	36,3	38,3	39,6	40,9	43,6	46,0



Niezawodność  $p$  wiaźara z  $n$  elementów o jednako-  
wej niezawodności oczekiwanej wynosi:

$$p = 1 - n q_2 \quad (6)$$

**Przykład 3.** Oszacować oczekiwaną niezawodność wiaźara złozonego z  $n = 100$  elementów o wskaźniku niezawodności  $t_2 = 3,8$  każdy. Awaryjność wiaźara wynosi  $q_w = 100q_2 = 0,007235$ . Niezawodność wiaźara wyniesie:  $p_w = 1 - n q_2 = 0,992765$ . Oszacowany z tablic rozkładu wskaźnik niezawodności wiaźara  $t_w = 2,4454 < 3,8$  jest mniejszy od wskaźnika zalecanego w najsłabszej klasie konstrukcji [16].

W przypadku szeregowego połączenia wiaźarów między sobą wystąpiłoby dodatkowe zmniejszenie nośności i niezawodności przekrycia wskutek występowania niezależnych przemieszczeń pionowych wiaźarów z braku ciągłości stężeń. Awaryjność wiaźarów uległaby zwiększeniu a nośność i niezawodność przekrycia zmniejszeniu. Pokazuje to przykład 4 niezawodności czterech niezależnie przemieszczających się rygli.

**Przykład 4.** W przypadku pozostawienia szeregowego połączenia czterech wiaźarów, awaryjność systemu zwiększy się cztery razy do  $q_w = 4q_2 = 0,02894$ . Natomiast niezawodność zmniejszy się do  $p_w = 1 - 4q_2 = 0,97106$ . Wskaźnik niezawodności zmniejszy się do  $t_w = 1,8951 < t = 3,3$  poniżej klasy RC1 o zalecanym wskaźniku niezawodności konstrukcji tymczasowych  $t = 3,3$ .

Natomiast równoległe sprzężenie czterech wiaźarów za pomocą stężeń w jeden KDMZ przekrycia zwiększa nośność i niezawodność w sposób pokazany w przykładzie 5.

**Przykład 5.** Kwantyl niezawodności pojedynczego wiaźara wynosi:

$$N_{1k} = E(N_1)[1 - 2,4454 \times 0,06] = \\ = E(N_1)[1 - 0,146724] = 0,853276 E(N_1)$$

Kwantyl nośności sprzężonego układu czterech wiaźarów wynosi:

$$N_k = 4E(N_1)[1 - 2,4454 \times 0,06/2] = \\ = 4E(N_1)[1 - 0,07336] = 4 \times 0,9266 E(N_1)$$

Zwiększenie nośności sprzężonych czterech wiaźarów wyznaczone ze wzoru (3) wynosi:

$$k = N_k / m N_{1k} = [1 - t_w v_1 / 2] / [1 - t_{100} v_1] = \\ = 0,9266 / 0,853276 = 1,086$$

**Wniosek:** Kwantyl nośności sprzężonego układu czterech wiaźarów jest o 8,6% większy od sumy kwantyli nośności czterech odrębnych wiaźarów. Wskaź-

nik  $t$  niezawodności wynosi:  $t = 2 \times 2,4454 = 4,8908 > 4,3$  i jest większy niż zalecany w normach dla klas RC1, RC2 i RC3. Niezawodność sprzężonego układu czterech wiaźarów wynosi:  $p = 0,9999994988$ . Oddziaływanie równoległego sprzężenia stężeniami  $m > 4$  statycznie wyznaczalnych wiaźarów złożonych ze 100 elementów sprawczych zwiększa nośność i niezawodność KDMZ ustroju powyżej nośności i niezawodności zalecanej w normach.

W przypadku równoległego sprzężenia dziewięciu wiaźarów (z elementów  $v_1 = 0,06$ ) za pomocą stężeń w jeden KDMZ, nośność przekrycia zwiększa się o 11,5%.

W tabeli 2 zamieszczono współczynniki zwiększania się nośności równoległe stężonych wiaźarów zbudowanych ze 100 elementów sprawczych o wskaźniku niezawodności  $t = 3,8$  (klasa RC2), biorąc pod uwagę współczynniki zmienności nośności  $v_1 = 0,06, 0,08, 0,10$ . Wskaźnik niezawodności wiaźara obliczony w przykładzie 3 wynosi:  $t_w = 2,4454$ . Zwiększenie nośności wskutek sprzężenia wiaźarów stężeniami ciągłymi wyznaczono według przykładu 5 ze wzoru (3) w stosunku do nośności wiaźarów statycznie wyznaczalnych o wskaźniku niezawodności:  $t_w = 2,4454 < 3,8$ .

**Tabela 2.** Zwiększenie nośności  $N_k$  przekrycia z  $m$  sprzężonych wiaźarów ze 100 elementów sprawczych każdy

$m =$	4	6	9	12	16
$v = 0,06$ %	1,086 8,6	1,1018 10,2	1,1146 11,5	1,1223 12,2	1,1289 12,9
$v = 0,08$ %	1,1216 12,2	1,1439 14,4	1,1621 16,2	1,1730 17,3	1,1824 18,2
$v = 0,10$ %	1,1618 16,2	1,1916 19,2	1,2158 21,6	1,2303 23,0	1,2428 24,3

#### 4. Podsumowanie, uwagi i wnioski

Z probabilistycznej analizy współczynników nośności ustroju zbudowanego ze stu szeregowo połączonych elementów klasy RC2 o wskaźniku niezawodności  $t = 3,8$  każdy, wynika, że: nośność i niezawodność pojedynczego wiaźara o 100 elementach sprawczych zwymiarowanych na podstawie norm wg wskaźnika niezawodności  $t = 3,8$  zmniejsza się do wskaźnika  $t = 2,4454 < t = 3,3$  poniżej klasy RC1 [16] o zalecanym wskaźniku niezawodności  $t = 3,3$  jak dla konstrukcji o krótkim okresie eksploatacji (tymczasowych).

W przypadku przykładowego pozostawienia szeregowego połączenia większej liczby wiaźarów wystąpi dodatkowe zmniejszanie nośności i niezawodno-

ści ustroju. Na przykład w przypadku pozostawienia czterech nie stężonych wiązarów wystąpi dodatkowe zmniejszenie wskaźnika niezawodności do  $t = 1,8951 < 3,3$  wskaźnika zalecanego dla budowli o krótkim okresie eksploatacji.

Zastosowanie ciągłych stężeń, sprzęgających równoległe z punktu widzenia niezawodności powyżej czterech wiązarów zwiększa nośność i niezawodność konstrukcji powyżej klasy RC2. Zważywszy, że w przeciętnej hali występuje znacząca liczba wiązarów, możemy wyciągnąć wniosek generalny: **W halach, w których występuje większa liczba wiązarów lub rygli poprawnie sprzężonych stężeniami wg rysunku 2c, d, e można elementy rygli i wiązarów wymiarować zgodnie z normami bez obawy zmniejszenia nośności i niezawodności przekrycia poniżej klasy RC2 zalecanej w normie [16].**

Zadaniem stężeń optymalizowanych konstrukcji hal jest równoległe sprzężenie w MKZ całych segmentów elementów głównych. Pionowe poprzeczne stężenia ciągłe między wiązarami (rys. 2c) realizują równoległe współdziałanie wiązarów tworząc minimalne krytyczne zbiory wiązarów (lub rygli) zwiększające ich nośność i niezawodność.

Należy nadmienić, że ciągłe stężenia poprzeczne 1 i ciągłe poprzeczne stężenia podłużne wzdłuż hal (rys. 2), odgrywające ważną rolę w ograniczeniu wpływu utraty stateczności na nośność wiązarów, jednocześnie sprzęgają również słupy w minimalny krytyczny zbiór (MKZ) słupów stowarzyszonych z kinematycznie dopuszczalnym mechanizmem przechyłowym zniszczenia słupów. Jest to przedmiotem odrębnej pracy [13].