Historyczne aspekty wyrażania niepewności pomiaru

Paweł Fotowicz

Główny Urząd Miar

Streszczenie: Historyczne podstawy dotyczące analizy danych pomiarowych pojawiły się już XIX wieku. Ukształtowały się w postaci metody najmniejszych kwadratów, prawa propagacji błędu i centralnego twierdzenia granicznego. Uzupełniały je o wnioskowania dotyczące przestawiania błędu pomiaru w postaci histogramu. Rozwiązania te uzasadniają współczesne podejście w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru, opisujące wielkość mierzoną rozkładem prawdopodobieństwa.

Słowa kluczowe: teoria błędu, niepewność pomiaru

1. Wprowadzenie

Tradycyjnie problematykę niepewności pomiaru można wiązać z pojawieniem się Przewodnika, podstawowego dokumentu dotyczącego jej wyrażania [1, 2]. Obecnie trwają intensywne prace nad wypracowaniem uniwersalnej metodyki opracowania danych pomiarowych, zgodnie z założeniami teorii niepewności, mogącej mieć zastosowanie w każdej dziedzinie nauk przyrodniczych i technicznych. Jednakże początki kształtowania się myśli naukowej, związanej z opracowaniem danych pomiarowych, należy wiązać z trzema podstawowymi jej osiągnięciami z początku XIX wieku.

2. Podstawowe osiągnięcia

Adrien Marie Legendre (1752–1833), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) i Pierre Simon Laplace (1749–1827) za sprawą swoich dzieł przedstawili rozwiązania, które współcześnie znane są pod nazwami: metoda najmniejszych kwadratów, prawo propagacji błędu oraz centralne twierdzenie graniczne.

Legendre w dziele „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes", które ukazało się w 1805 r., zamieszcza kilkustronicowy dodatek „Sur la methode des moindres carrés". Przedstawia w nim metodę minimalizacji sumy kwadratów błędów. Jeżeli przedstawimy równanie wielkości mierzonej w postaci liniowej, to możemy zapisać szereg równań błędu tej wielkości

$$E_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z + \ldots \tag{1}$$

gdzie a_i, b_i, c_i, … są znanymi współczynnikami, a x, y, z, … nieznanymi wielkościami wejściowymi. Zmienne równania można wyznaczyć podnosząc do kwadratu błędy i sumując je tak, aby wyznaczały najmniejszą z możliwych wartości. Współcześnie metoda ta stosowana jest w analizie regresji.

Kolejne rozwiązanie przynosi praca Gaussa z 1809 r. „Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium". Autor przedstawia podobnie wyglądający liniowy układ równań

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots \tag{2}$$

i formułuje błąd jako różnicę między obliczoną wartością V_i a zaobserwowaną M_i

$$\Delta_i = V_i - M_i \tag{3}$$

Prawdopodobieństwo błędu charakteryzuje krzywa $\varphi(\Delta)$, która jest symetryczna i osiąga maksimum dla $\Delta = 0$. Przyjmuje aksjomat, że najbardziej prawdopodobną wartością pojedynczej, nieznanej obserwacji jest średnia arytmetyczna zbioru danych, uzyskanego w tych samych warunkach pomiarowych podczas wielokrotnego powtarzania obserwacji. Postuluje, do opisu krzywej (rozkładu) błędu, przyjęcie funkcji

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \tag{4}$$

gdzie h jest stałą związaną z precyzją pomiaru. Powyższy zapis to postać funkcji gęstości rozkładu normalnego (krzywej dzwonowej).

Znajdujemy w tym dziele również zapis równań błędu, podobny do zapisu różniczki zupełnej, w postaci sumy składowych poprzedzonych pochodnymi cząstkowymi. Jest to pierwotny zapis prawa propagacji błędu.

W 1810 r. Laplace w swoim „Supplement au memoire" formułuje tezę, że jeżeli błąd każdej obserwacji jest taki sam, to prawdopodobieństwo, iż błąd średniej n obserwacji będzie zawarty w granicach: $\pm rh/n$, jest równe

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int \exp\left[-\frac{k}{2k'} r^2\right] \mathrm{d}r \tag{5}$$

gdzie h jest długością przedziału, wewnątrz którego zawarty jest błąd pojedynczej obserwacji. Prawdopodobieństwo błędu zawartego w granicach od $x = -h/2$ do $x = h/2$ autor oznacza $\phi(x/h)$ oraz definiuje, że

$$k = \int \phi\left(\frac{x}{h}\right) \mathrm{d}x\,, \quad k' = \int \frac{x^2}{h^2} \phi\left(\frac{x}{h}\right) \mathrm{d}x \tag{6}$$

W ten sposób pojawia się teza jednego z podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, a mianowicie centralnego twierdzenia granicznego o przyjęciu krzywej Gaussa dla błędu średniej obserwacji.

Słuszność przyjęcia rozkładu normalnego dla danych doświadczalnych potwierdza również George Biddell Airy (1801–1892) w swoim dziele „On the algebraical and numerical theory of errors of observations and the combination of observations", wydanym w 1875 r.

3. Dzieło Airy

Airy, choć nie wynika to bezpośrednio z przytoczonego w pełnym brzmieniu tytułu pracy, jest prekursorem pojęcia niepewność (*uncertainty*). Postuluje rozumienie błędu pomiaru (*error*) w kontekście niepewności pomiaru, używając pojęć *uncertain error* lub *uncertainty*. Przez niepewność błędu uważa każdą jego wartość łącznie z przypadkiem, gdy może on być równy zeru. Innymi słowy błąd pomiaru dla Airy to zbór jego wartości powtarzających się w danym pomiarze z określoną częstością. Z dzisiejszego punktu widzenia można powiedzieć, że błąd tworzy rozkład prawdopodobieństwa.

Autor stwierdza na kartach swojej pracy, że prawdopodobieństwo, iż błąd może znaleźć się w przedziale między określonym x a $x+\delta x$ wynosi

$$\frac{1}{c\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{c^2}} \cdot \delta x \tag{7}$$

Jak łatwo się domyślić, wzór powyższy zawiera równanie krzywej dzwonowej. We wzorze tym występuje parametr c, który autor nazywa *modulus* i definiuje jako

$$c = \text{Error of Mean Square} \times 1{,}414214 \tag{8}$$

Jak można się domyślić, *modulus* Airy jest równy iloczynowi błędu średniego kwadratowego i pierwiastka z dwóch. Dodatkowo, w konkluzji, autor nazywa wzór (7) prawem częstości błędu (*Law of Frequency of Error*), które wyraża prawdopodobieństwo określonej wartości błędu zawartej w przedziale między x i $x+\delta x$. Jednocześnie stwierdza, że *modulus* jest stały dla określonego pomiaru lecz inny dla różnych pomiarów. Z dzisiejszego punktu widzenia jest to oczywiste, gdyż dla każdej serii pomiarowej uzyskujemy określoną wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego, lecz możliwe są różne jego wartości dla każdej innej serii obserwacji.

Istotnym wnioskowaniem Airy jest również twierdzenie, że w przypadku łączenia błędów pomiaru X i Y ich wspólny *modulus* podlega prawu

$$\text{square of modulus for } Z = \text{square of modulus for } X + \text{square of modulus for } Y \tag{9}$$

co jest zapisem współczesnego równania niepewności pomiaru.

4. Podsumowanie

Trzy wymienione historyczne rozwiązania tworzą podstawy współczesnej metrologii teoretycznej w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru. Powstały na wiele lat przed ich praktycznym zastosowaniem i choć zostały przyjęte bez naukowego dowodzenia, świadczą o trafności wnioskowania. W tym krótkim okresie 1805–1810 zbudowano podstawy niepewności pomiaru. Miało to miejsce w dobie romantyzmu, która aksjologicznie w nauce kojarzy się, nie bez przyczyny, z genialną intuicją.

Nie sposób w tym miejscu pominąć dzieła Airy, wydanego w 1875 r., w którym autor postuluje używanie pojęcia „niepewność" przy wyrażaniu błędów obserwacji. Dzisiaj jest to podstawowe pojęcie związane z oceną niedokładności pomiaru.

Bibliografia

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement.* International Organization for Standardization 1993, 1995 (corrected and reprinted).
2. *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement.* BIPM JCGM 100:2008. ■

Historical aspects of expressing the measurement uncertainty

Abstract: Historical basics concerning the analysis of a measurement data were appeared in XIX century. They were formulated as a method of least squares, law of error propagation and central limit theorem. The inference treating measurement error as a histogram and expressing it as a uncertainty was also completed. Nowadays this approach justifies expressing the measurement result as a measurand described by the probability distribution.

Keywords: error theory, measurement uncertainty

dr inż. Paweł Fotowicz

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 r. Do 1999 r. pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, specjalizując się w problematyce laserowych technik pomiarowych – autor sześciu patentów. Od 1999 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się zagadnieniami teoretycznymi metrologii, głównie niepewnością pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji – referatów i artykułów w czasopismach krajowych i zagranicznych.

e-mail: uncert@gum.gov.pl