Punktowa zupełność i punktowa degeneracja układów dyskretnych niecałkowitego rzędu

Wojciech Trzasko

Politechnika Białostocka w Białymstoku

Streszczenie: W pracy rozpatrzono liniowe stacjonarne układy dyskretne niecałkowitego niewspółmiernego rzędu. Sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji układów dyskretnych standardowych oraz dodatnich. Rozważania zilustrowano przykładami

Słowa kluczowe: punktowa zupełność, punktowa degeneracja, niecałkowity niewspółmierny rząd, układ dyskretny, standardowy, dodatni.

Układ dynamiczny, niepoddany wymuszeniu, jest nazywany punktowo zupełnym, jeżeli każdy zadany stan końcowy można osiągnąć poprzez odpowiedni wybór stanu początkowego. Układ, który nie jest punktowo zupełny, jest nazywamy punktowo zdegenerowanym. Pierwszy raz pojęcie punktowej zupełności i punktowej degeneracji dla ciągłych układów z opóźnieniami wprowadził Weiss (np. [17]).

1. Wprowadzenie

W ostatnich latach coraz częściej wykorzystuje się teorię rachunku różniczkowego i różnicowego niecałkowitego rzędu [11, 12, 18] w zagadnieniach modelowania zjawisk fizycznych i projektowania regulatorów. W monografii [9] teorię układów niecałkowitego współmiernego rzędu rozszerzono na układy dodatnie ciągłe i dyskretne.

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [10] oraz cytowanej tam literaturze.

Sformułowany przez Weissa problem był rozpatrywany w wielu pracach, np. [3, 13]. Problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dodatnich układów: dyskretnych, ciągłych, z opóźnieniami oraz niecałkowitego rzędu został sformułowany i rozwiązany w pracach [1, 2, 8, 9, 16], zaś w pracach [6, 7, 14, 15] został rozwiązany dla układów dwuwymiarowych, w tym hybrydowych.

W niniejszej pracy rozpatrzymy układy liniowe stacjonarne dyskretne, opisane równaniami różnicowymi niecałkowitego niewspółmiernego rzędu, dla których zostaną na początku podane warunki dodatniości oraz zostanie wyprowadzona postać rozwiązania równania stanu. Następnie zostaną podane definicje oraz warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności i punktowej degeneracji takich układów. Przy ich sformułowaniu wykorzystamy rezultaty prac [1, 5, 9], poświęconych dyskretnym układom niecałkowitego współmiernego rzędu.

2. Układ dyskretny niecałkowitego rzędu

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times l}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times l}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_+, zaś macierz jednostkową o wymiarach $n\times n$ przez I_n.

Weźmy pod uwagę dyskretny układ liniowy, opisany jednorodnym równaniem stanu niecałkowitego niewspółmiernego rzędu [4, 5]

$$\Delta^{\overline{\alpha}} x(i+1) = Ax(i), \tag{1}$$

gdzie

$$\Delta^{\overline{\alpha}} x(i+1) = \begin{bmatrix} \Delta^{\alpha_1} x_1(i+1) \\ \vdots \\ \Delta^{\alpha_q} x_q(i+1) \end{bmatrix} \in \Re^n, \tag{1a}$$

$$x(i) = \begin{bmatrix} x_1(i) \\ \vdots \\ x_q(i) \end{bmatrix} \in \Re^n, \tag{1b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{q1} & \dots & A_{qq} \end{bmatrix} \in \Re^{nxn}, \tag{1c}$$

przy czym

$$0 < \alpha_j < 1 \quad \text{dla} \quad j = 1,\dots,q\,, \quad q \le n, \tag{2}$$

jest niecałkowitym niewspółmiernym rzędem, zaś $x_j(i) \in \Re^{n_j}$ ($j = 1,\dots,q$) są składowymi wektora stanu $x(i)$ oraz $A_{kj} \in \Re^{n_k\times n_j}$, $n = n_1 + \cdots n_q$.

Natomiast [5, 9]

$$\Delta^{\alpha_j} x_j(i) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{\alpha_j}{k} x_j(i-k), \quad 0 < \alpha_j < 1, \tag{3}$$

jest różnicą wsteczną niecałkowitego rzędu α_j, przy czym

$$\binom{\alpha_j}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{\alpha_j(\alpha_j-1)\cdots(\alpha_j-k+1)}{k!} & k = 1,2,\dots \end{cases} \tag{4}$$

W przypadku szczególnym, dla układu niecałkowitego współmiernego rzędu, mamy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = \alpha, \tag{5}$$

przy czym $0 < \alpha < 1$. Wtedy równanie (1) upraszcza się do postaci [1, 9]

$$\Delta^{\alpha} x(i+1) = Ax(i), \tag{6}$$

która jest łatwiejsza do analizy, i dlatego najczęściej w literaturze jest rozpatrywany tego typu model, np. [1, 9, 11, 12, 14, 18].

Zauważmy, że dla przypadku $\alpha_j = 1$ mamy różnicę wsteczną pierwszego rzędu i otrzymamy klasyczne równanie stanu układu dyskretnego całkowitego rzędu

$$x_j(i+1) = [A_{j1} \quad \cdots \quad A_{jq}]x(i) + x_j(i), \tag{7}$$

Taki przypadek będziemy określać mianem układu dyskretnego rzeczywistego rzędu.

Niech

$$c_k(\alpha_j) = (-1)^{k+1}\binom{\alpha_j}{k}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{8}$$

gdzie dwumian wyznaczamy z (4).

Uwzględniając definicję różnicy wstecznej (3), równanie (1) możemy napisać w postaci

$$x(i+1) = A_{\bar{\alpha}} x(i) + \sum_{k=2}^{i+1} A_k x(i-k+1), \quad i \in Z_+, \tag{9}$$

gdzie

$$A_{\bar{\alpha}} = A + \bar{\alpha}, \tag{9a}$$

$$\bar{\alpha} = diag[\alpha_1 I_{n_1} \quad \cdots \quad \alpha_q I_{n_q}] \in \Re^{nxn} \tag{9b}$$

$$A_k = diag[c_k(\alpha_1) I_{n_1} \quad \cdots \quad c_k(\alpha_q) I_{n_q}] \in \Re^{nxn}, \quad k = 2,3,\ldots \tag{9c}$$

W przypadkach szczególnych,

– dla układu niecałkowitego współmiernego rzędu zależności (9a) – (9c) przyjmują postać:

$$A_{\bar{\alpha}} = A + \alpha I_n, \tag{10a}$$

$$A_k = c_k I_n \quad k = 2,3,\ldots \tag{10b}$$

przy czym współczynniki c_k wyznacza się z zależności (8) dla $0 < \alpha < 1$,

– dla układu rzeczywistego rzędu w zależnościach (9b) i (9c) dla $\alpha_j = 1$ podstawiamy, odpowiednio

$$\alpha_j I_{n_j} = I_{n_j} \tag{11a}$$

$$c_k(\alpha_j) = 0, \quad k = 2,3,\ldots \tag{11b}$$

Z równania (9) wynika, że układ niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest równoważny układowi standardowemu z rosnącą liczbą opóźnień, przy czym współczynniki $c_k(\alpha_j)$, $k = 2,3,\ldots$, maleją szybko do zera, gdy k rośnie do nieskończoności oraz dla dowolnych niecałkowitych rzędów $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1,\ldots,q$.

Twierdzenie 1. Rozwiązanie równania stanu (1) z warunkiem początkowym $x(0) = [x_1(0) \quad \cdots \quad x_q(0)]^T \neq 0$ ma postać

$$x(i) = \Phi_i x(0). \tag{12}$$

Macierze podstawowe (tranzycyjne) Φ_i wyznacza się z zależności rekurencyjnej

$$\Phi_{i+1} = (A + \bar{\alpha})\Phi_i + \sum_{k=2}^{i+1} A_k \Phi_{i-k+1} \tag{13}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi_0 = I, \quad \Phi_i = 0 \quad dla \quad i < 0, \tag{14}$$

przy czym macierze współczynników $\bar{\alpha}$ i A_k wyznacza się ze wzorów (9b) i (9c).

Dowód. Dowód przeprowadzimy, podobnie jak w pracy [9], korzystając z przekształcenia (transformaty) Z funkcji dyskretnych.

Dokonując obustronnej transformaty Z równania (9) przy niezerowych warunkach początkowych, otrzymamy

$$zX(z) - zx_0 = A_{\bar{\alpha}} X(z) + \sum_{k=2}^{i+1} A_k z^{-(k-1)} X(z). \tag{15}$$

Po przekształceniach dostaniemy

$$X(z) = \left[I_n - A_{\bar{\alpha}} z^{-1} - \sum_{k=2}^{i+1} A_k z^{-k} \right]^{-1} x_0 \tag{16}$$

Niech

$$\left[I_n - A_{\bar{\alpha}} z^{-1} - \sum_{k=2}^{i+1} A_k z^{-k} \right]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i z^{-i}, \tag{17}$$

wówczas równanie (16) możemy napisać w postaci

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(i) z^{-i} x_0. \tag{18}$$

Dokonując odwrotnego przekształcenia Z otrzymamy rozwiązanie równania różnicowego niecałkowitego rzędu (1) w postaci (12).

Z definicji macierzy odwrotnej mamy

$$\left[I_n - A_{\bar{\alpha}} z^{-1} - \sum_{k=2}^{i+1} A_k z^{-k} \right]\left(\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i z^{-i} \right) = I_n. \tag{19}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z^{-k}, $k = 0,1,\ldots$, w (19) otrzymamy

$$\Phi_0 = I_n, \quad \Phi_1 = A_{\bar{\alpha}}, \quad \Phi_2 = A_{\bar{\alpha}}\Phi_1 + A_2\Phi_0 \tag{20}$$

i w ogólnym przypadku zależność (13). ■

Rozwiązanie (12) równania stanu układu (1) można także wyprowadzić z zależności (9), wyznaczając bezpośrednio kolejne wartości $x(i)$, $i = 0,1,2,\ldots$

Definicja 1. [9] Układ niecałkowitego niewspółmiernego rzędu nazywamy dodatnim (wewnętrznie), jeżeli dla dowolnego nieujemnego wektora warunków początkowych $x(0) \in \Re_+^n$, zachodzi $x(i) \in \Re_+^n$ dla wszystkich $i \in Z_+$.

W monografii [9] wykazano, że jeśli niecałkowity rząd α_j jest z przedziału $0 < \alpha_j < 1$, to współczynniki $c_k(\alpha_j)$ (8), $k = 1,2,\dots$, są dodatnie.

Lemat 1. Jeżeli niecałkowity rząd α_j spełnia zależność $0 < \alpha_j < 1$ dla każdego $j = 1,\dots,q$ oraz

$$[A + \overline{\alpha}] \in \Re_+^{n\times n}, \tag{21}$$

to macierze Φ_i mają wszystkie elementy nieujemne, tzn.

$$\Phi_i \in \Re_+^{n\times n}, \quad i \in Z_+. \tag{22}$$

Dowód. Dowód wynika wprost z zależności (13) i (9a-9c).

Z powyższych właściwości oraz rozwiązania równania stanu (12) wynika warunek dodatniości układu (1).

Twierdzenie 2. Układ (1) niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0 < \alpha_j < 1, \quad j = 1,\dots,q\,, \quad q \le n, \tag{23}$$

$$A + \overline{\alpha} \in \Re_+^{n\times n}, \tag{24}$$

gdzie macierz współczynników $\overline{\alpha}$ ma postać (9b).

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe dla opisanych wcześniej przypadków szczególnych, przy czym w macierzy współczynników $\overline{\alpha}$ należy uwzględnić modyfikacje opisane zależnościami (10a) i (11a), odpowiednio.

3. Punktowa zupełność i punktowa degeneracja

Przy formułowaniu definicji punktowej zupełności i punktowej degeneracji oraz podaniu odpowiednich warunków wykorzystamy rezultaty prac [1, 9] poświęconych dyskretnym układom ułamkowego rzędu (lub inaczej niecałkowitego współmiernego rzędu).

Standardowy układ dyskretny

Definicja 2. [9] Układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \ge 1$, gdy dla każdego wektora $x_f \in \Re^n$ można dobrać wektor warunków początkowych $x(0) \in \Re^n$ taki, że $x(N) = [x_1(N),\dots,x_q(N)]^T = x_f$.

Definicja 3. [9] Układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \ge 1$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \Re^n$ taki, że dla każdego niezerowego wektora warunków początkowych $x(0) \in \Re^n$ rozwiązanie równania (9) spełnia warunek $v^T x(N) = v^T [x_1(N),\dots,x_q(N)]^T = 0$.

Z zależności (12) dla $i = N \ge 1$ mamy, że $x_f = \Phi_N x(0)$. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że dla dowolnego wektora $x_f \in \Re^n$ równanie to ma rozwiązanie $x(0) = [\Phi_N]^{-1} x_f$, jeżeli $rank\,\Phi_N = n$ (tzn. $\det \Phi_N \ne 0$).

Twierdzenie 3. Układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \ge 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rank\,\Phi_N = n. \tag{25}$$

Z powyższego wynika, że układ (1) jest punktowo zdegenerowany w chwili $i = N \ge 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (25) nie jest spełniony. W takim przypadku istnieje wektor $v \in \Re^n$ taki, że $v^T x(N) = v^T \Phi_N x(0) = 0$. Zatem kierunek degeneracji wyznacza się ze wzoru $v^T \Phi_N = 0$.

Z powyższego wynika warunek konieczny i wystarczający punktowej degeneracji.

Twierdzenie 4. Układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \ge 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rank\,\Phi_N < n. \tag{26}$$

Biorąc pod uwagę sposób wyznaczania macierzy Φ_i można łatwo wykazać, że prawdziwe są poniższe wnioski.

Wniosek 1. Punktowa zupełność lub punktowa degeneracja układu standardowego (1) niecałkowitego niewspółmiernego rzędu nie jest własnością niezmienniczą ze względu na chwile dyskretne $i = N \ge 1$, w przeciwieństwie do układów dyskretnych całkowitego rzędu.

Wniosek 2. *Twierdzenia 3 i 4 są* prawdziwe dla układu (6) niecałkowitego współmiernego rzędu oraz w przypadku układu rzędu rzeczywistego (tzn. dla $\alpha_j = 1$ mamy (7)).

3.1.1. Przykład

Zbadać punktową zupełność układu (1) niecałkowitego niewspółmiernego rzędu: $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}6$, o macierzy stanu

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad a \in \Re^1. \tag{27}$$

Obliczając $A_{\overline{\alpha}}$, macierze współczynników A_k ze wzorów (9a-9c) oraz macierze Φ_i ze wzoru (13), otrzymamy odpowiednio

$$A_{\overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} a+0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0 \\ 0 & 0{,}12 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & 0 \\ 0 & 0{,}0560 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\Phi_1 = A_{\overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} a+0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2 = A_{\overline{\alpha}}\Phi_1 + A_2 = \begin{bmatrix} (a+0{,}5)^2 + 0{,}125 & 0 \\ 0 & 0{,}13 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3 = A_{\overline{\alpha}}\Phi_2 + A_2\Phi_1 + A_3 = \begin{bmatrix} a^3 + 1{,}5a^2 + a + 0{,}3125 & 0 \\ 0 & 0{,}0081 \end{bmatrix}, \dots$$

Z powyższego oraz twierdzeń 3 i 4 wynika, że rozpatrywany układ niecałkowitego niewspółmiernego rzędu:

- jest punktowo zupełny w chwili $i = N = 1$ dla $a \neq -0,5$, bowiem $rank\,\Phi_1 = 2$. Dla $a = -0,5$ układ jest punktowo zdegenerowany w kierunku $v = [1, 0]^T$,
- jest zawsze punktowo zupełny w chwili $i = 2$ dla dowolnej wartości współczynnika $a \in \Re^1$,
- jest punktowo zupełny w chwili $i = 3$ dla $a \neq -0,7119$, bowiem $rank\,\Phi_3 = 2$. Dla $a = -0,7119$ mamy $a^3 + 1,5a^2 + a + 0,3125 = 0$ i $rank\,\Phi_3 = 1$, zatem układ jest punktowo zdegenerowany.

Oznacza to, że w rozpatrywanym układzie możliwość wyznaczenia wektora warunków początkowych $x(0) \in \Re^n$ dla dowolnego zadanego stanu końcowego $x(N) = x_f$ ściśle zależy od wartości współczynnika a oraz chwili dyskretnej $i = N \geq 1$.

Dodatni układ dyskretny

Uogólniając definicje 2 i 3 na układy dodatnie niecałkowitego niewspółmiernego rzędu otrzymamy.

Definicja 4. [9] Dodatni układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, gdy dla każdego wektora $x_f \in \Re^n_+$ można dobrać wektor warunków początkowych $x(0) \in \Re^n_+$ taki, że $x(N) = [x_1(N), \ldots, x_q(N)]^T = x_f$.

Definicja 5. [1] Dodatni układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, jeżeli istnieje przynajmniej jeden stan końcowy $x_f \in \Re^n_+$, który nie jest osiągalny w N krokach z dowolnego stanu początkowego $x(0) \in \Re^n_+$, tzn. nie istnieje liczba naturalna N i niezerowy wektor warunków początkowych $x(0) \in \Re^n_+$ takie, że $x(N) = [x_1(N), \ldots, x_q(N)]^T = x_f$.

Ze wzoru (12) i definicji (4) wynika, że (25) jest tylko warunkiem koniecznym punktowej zupełności w chwili $i = N \geq 1$ dodatniego układu (1).

Twierdzenie 5. Dodatni układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zupełny

a) dla każdej zadanej dyskretnej chwili $i = N \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A_{\overline{\alpha}} \in \Re^{n\times n}_+$ jest nieosobliwą macierzą diagonalną,

b) dla każdej zadanej dyskretnej chwili $i = N \geq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A_{\overline{\alpha}} \in \Re^{n\times n}_+$ jest osobliwą macierzą diagonalną.

Dowód. Z zależności (12) dla $i = N \geq 1$ mamy, że $x_f = \Phi_N x(0)$. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że dla dowolnego wektora $x_f \in \Re^n$ równanie to ma rozwiązanie $x(0) = [\Phi_N]^{-1} x_f$, jeżeli $rank\,\Phi_N = n$ lub równoważnie $\det\Phi_N \neq 0$. Aby uzyskać warunek dodatniości wektora stanu początkowego $x(0) \in \Re^n_+$ musi być spełniony warunek $[\Phi_N]^{-1} \in \Re^{n\times n}_+$ przy dowolnym $x_f \in \Re^n_+$. Ogólnie wiadomo, że macierz $[\Phi_N]^{-1} \in \Re^{n\times n}_+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_N \in \Re^{n\times n}_+$ jest macierzą monomialną. Ze sposobu wyznaczania macierzy Φ_i (patrz wzór (13)) oraz struktury macierzy dodatnich współczynników $\overline{\alpha}$ i A_k (wzory (9b) i (9c)) wynika, że aby Φ_i była macierzą monomialną dla $i = N \geq 1$, macierz $A_{\overline{\alpha}} \in \Re^{n\times n}_+$ musi być nieosobliwą macierzą diagonalną. Zatem ze wzoru (9a) wynika, że macierz stanu A musi być diagonalna, aby układ (1) był punktowo zupełny. Jeżeli macierz $A_{\overline{\alpha}} \in \Re^{n\times n}_+$ jest osobliwą macierzą diagonalną, to dla $i = N = 1$ nie jest spełniony warunek konieczny (25), tzn. $rank\,\Phi_1 < n$ lub równoważnie $\det\Phi_1 = 0$. Natomiast ze wzoru (13) wynika, że w tym przypadku Φ_i będzie nieosobliwą macierzą diagonalną dla każdego $i = N \geq 2$ i rozpatrywany układ jest punktowo zupełny dla każdej chwili $i = N \geq 2$. ■

Z twierdzenia 4 wynika, że (26) jest warunkiem dostatecznym punktowej degeneracji dodatniego układu (1). Z powyższych rozważań i twierdzenia 5 wynika następujący warunek konieczny i wystarczający punktowej degeneracji.

Twierdzenie 6. Dodatni układ dyskretny niecałkowitego niewspółmiernego rzędu jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_N \in \Re^{n\times n}_+$ nie jest macierzą monomialną.

Biorąc pod uwagę sposób wyznaczania macierzy Φ_i można łatwo wykazać, że prawdziwe są poniższe wnioski.

Wniosek 3. *Twierdzenie 5 jest* prawdziwe dla układu (6) niecałkowitego współmiernego rzędu. W przypadku układu rzędu rzeczywistego (7) Twierdzenie 5 jest prawdziwe tylko dla punktu a), przy czym $A_{\overline{\alpha}} \in \Re^{n\times n}_+$ (9a) może być macierzą quasi-diagonalną, tzn. dla całkowitego rzędu $\alpha_j = 1$ podmacierz $A_{jj} + I_{n_j}$ może być macierzą monomialną.

Można łatwo wykazać, że dla całkowitego rzędu $\alpha_j = 1$ w macierzy blokowej Φ_i (13) mamy podmacierz $\Phi_{jj}(i) = (A_{jj} + I_{n_j})^i$. Jest ona monomialną dla $i = 1,2,\ldots$ wtedy i tylko wtedy, gdy podmacierz $A_{jj} + I_{n_j} \in \Re^{n_j\times n_j}_+$ jest monomialna.

Zauważmy, że jeżeli osobliwość macierzy diagonalnej $A_{\overline{\alpha}} \in \Re^{n\times n}_+$ wynika z osobliwości podmacierzy $A_{jj} + I_{n_j} \in \Re^{n_j\times n_j}_+$ dla całkowitego rzędu $\alpha_j = 1$, to w tym przypadku Φ_i nie będzie nieosobliwą macierzą quasi-diagonalną dla $i = N \geq 2$, ponieważ z (11a - 11b) wynika, że w macierzach A_k (9c) mamy $c_k(\alpha_j) = 0$ dla $k = 2,3,\ldots$

3.1.2. Przykład

Zbadać punktową zupełność układu (1) niecałkowitego niewspółmiernego rzędu: $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0,6$, o macierzy stanu

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Obliczając $A_{\overline{\alpha}}$, macierz współczynników A_k ze wzorów (9a - 9c) oraz macierze Φ_i ze wzoru (13), otrzymamy

$$A_{\overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = diag[\alpha_1(1-\alpha_1)/2 \quad \alpha_2(1-\alpha_2)/2 \quad \alpha_2(1-\alpha_2)/2] = \\ = diag[0,125 \quad 0,12 \quad 0,12]$$

$$A_3 = diag[0,0625 \quad 0,056 \quad 0,056], \ldots$$

$$\Phi_1 = A_{\overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}6 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = A_{\overline{\alpha}}\Phi_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}68 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}68 \end{bmatrix}, \ldots$$

Rozpatrywany układ jest dodatni, gdyż $A_{\overline{\alpha}} \in \Re_+^{3\times 3}$. Macierze podstawowe Φ_i są nieosobliwymi macierzami diagonalnymi o nieujemnych elementach dla $i \geq 2$.

Z powyższego oraz z twierdzeń 5 i 6 wynika, że badany układ niecałkowitego niewspółmiernego rzędu:

– nie jest punktowo zupełny w chwili $i = N = 1$, bowiem $rank\,\Phi_1 = 2$, czyli macierz Φ_1 jest osobliwa. W takim przypadku układ jest punktowo zdegenerowany w kierunku $v = [1, 0, 0]^T$,
– jest zawsze punktowo zupełny dla każdej chwili dyskretnej $i = N \geq 2$.

Oznacza to, że w rozpatrywanym układzie istnieje możliwość wyznaczenia nieujemnego wektora warunków początkowych $x(0) = [\Phi_N]^{-1} x_f \in \Re_+^n$ dla dowolnego zadanego stanu końcowego $x(N) = x_f \in \Re_+^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = N \geq 2$.

Dowolny nieujemny stan końcowy

$$x(2) = [x_1(2), x_2(2)]^T = [x_{1f}, x_{2f}, x_{3f}]^T \in \Re_+^3 \qquad (29)$$

można najwcześniej osiągnąć w drugiej dyskretnej chwili, wychodząc z nieujemnego warunku początkowego

$$x(0) = [\Phi_2]^{-1} x(2) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3731 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2717 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \\ x_{3f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_{1f} \\ 0{,}3731 x_{2f} \\ 0{,}2717 x_{3f} \end{bmatrix} \in \Re_+^3.$$

4. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności i punktowej degeneracji liniowych stacjonarnych układów dyskretnych niecałkowitego niewspółmiernego rzędu, opisanych jednorodnym równaniem stanu (1), które może być zapisane w postaci (9).

Sformułowano podstawowe definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności i punktowej degeneracji układu niecałkowitego niewspółmiernego rzędu: standardowego oraz dodatniego. Podano też wnioski dla przypadków szczególnych: układu niecałkowitego współmiernego rzędu oraz rzeczywistego rzędu.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na dwuwymiarowe układy dyskretne niecałkowitego niewspółmiernego rzędu oraz układy z opóźnieniami.

Praca finansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki w ramach projektu badawczego G/WE/1/2011

Bibliografia

1. Busłowicz M., *Punktowa zupełność i punktowa degeneracja liniowych układów dyskretnych ułamkowego rzędu.* „Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej", ser. Automatyka, nr 151, 2008, 17-29.
2. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W., *Punktowa degeneracja i punktowa zupełność liniowych dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami.* „Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej", ser. Automatyka, vol. 145, 2006, 51-56.
3. Choundhury A. K., *Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems*, „Int. J. Control", vol. 16, no. 6, 1972, 1083-1100.
4. Dzieliński A., Sierociuk D., *Observer for discrete fractional order systems.* [w] *Proc. of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation Applications*, 2006, Portugalia, 524-529.
5. Guerman S., Djennoune S., Bettayeb M., *Controllability and observability of linear discrete-time fractional-order systems.* „Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.", vol. 18, no. 2, 2008, 213-222.
6. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive hybrid systems described by the general model.* "Archives of Control Sciences", vol. 20, nr 2, 2010, 121-131.
7. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive Roesser models.* „PAK", vol. 56, nr 2, 2010, 163-165.
8. Kaczorek T., Busłowicz M., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear continuous-time fractional order systems.* „JAMRIS", vol. 3, nr 1, 2009, 8-11.
9. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, 2009.
10. Kaczorek T., *Positive 1D and 2D Systems.* Springer-Verlag, London, 2002.
11. Miller K. S., Ross B., *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* Willey, New York, 1993.
12. Podlubny I., *Matrix approach to discrete fractional calculus.* „An International Journal for Theory and Applications", vol. 3, no 4, 2000, 359-386.
13. Popov V. M., *Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations.* „J. Diff. Equation", vol. 11, 1972, 541-561.
14. Trzasko W., *Względna punktowa zupełność dodatnich układów ciągło-dyskretnych niecałkowitego rzędu.* Automation 2011, „Pomiary – Automatyka –Robotyka", nr 2, 2011, 528-537.
15. Trzasko W., *Względna punktowa zupełność dodatnich układów ciągło-dyskretnych.* Automation 2009, „Pomiary – Automatyka –Robotyka", nr 2, 2009, 455-464.
16. Trzasko W., Busłowicz M., Kaczorek T., *Pointwise completeness of discrete-time cone systems with delays.* [w] *Proc. of EUROCON 2007*, IEEE Xplore, 606-611.

17. Weiss L., *Controllability for various linear and nonlinear systems models*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System, Springer Verlag, 1970, 250-262.
18. Vinagre B. M., *Fractional Calculus Fundamentals. Tutorial Workshop #2*. [w] *Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, 2002. ■

Pointwise completeness and pointwise degeneracy of fractional discrete-time systems

Abstract: In the paper the linear discrete-time non-commensurate fractional-order systems is considered. Definitions and necessary and sufficient conditions for the pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive systems are given. The considerations are illustrated by examples.

Keywords: pointwise completeness, pointwise degeneracy, non-commensurate fractional-order, standard, positive, discrete-time system

dr inż. Wojciech Trzasko

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej. Obecnie zatrudniony jako adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki WE PB. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów dodatnich: z opóźnieniami, dwuwymiarowych ciągło-dyskretnych oraz układów niecałkowitego rzędu.

e-mail: wtrzasko@pb.edu.pl