Kryteria obserwowalności układów dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu

Rafał Kociszewski

Wydział Elektryczny, Politechnika Białostocka

Streszczenie: W pracy rozpatrzono zagadnienie obserwowalności dyskretnych układów singularnych, opisanych w przestrzeni stanu równaniem rzędu niecałkowitego. Pokazano, że przy pewnych warunkach oceny obserwowalności tego układu można dokonać, stosując kryteria znane dla standardowych układów rzędu całkowitego. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładem liczbowym.

Słowa kluczowe: obserwowalność, singularny, układ dyskretny, rząd niecałkowity

Obserwowalność jest jednym z podstawowych zagadnień dotyczących właściwości obiektu sterowania. Studium problematyki obserwowalności rozpoczęło się w latach 60. ubiegłego wieku. Warunki obserwowalności, w odniesieniu do liniowego układu dynamicznego całkowitego rzędu, zostały po raz pierwszy sformułowane w pracy [6]. Obecnie literatura związana z zagadnieniem obserwowalności liniowych układów ciągłych, dyskretnych z opóźnieniami lub bez opóźnień jest bardzo obszerna.

Do modelowania pewnych procesów występujących nie tylko w naukach technicznych wykorzystuje się opis za pomocą równań, które reprezentują tzw. układy singularne. Umożliwiają one dokładniejsze przedstawienie istniejących tam zjawisk [9]. Analiza problemu obserwowalności układów singularnych była rozpatrywana np. w pracach [1, 2, 3, 8, 10]. W ostatnich kilku latach można zaobserwować intensywny rozwój teorii układów niecałkowitego rzędu. Problem stabilności, punktowej zupełności czy degeneracji, a także wiele innych rezultatów z zakresu analizy tej klasy układów dynamicznych można znaleźć w monografii [4].

W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem obserwowalności układów dyskretnych singularnych standardowych niecałkowitego rzędu α.

1. Sformułowanie problemu

Oznaczenia: $\Re^{n\times m}$ – zbiór macierzy rozmiaru $n\times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$, Z_+ – zbiór liczb całkowitych dodatnich, I_n – macierz jednostkowa $n\times n$.

Weźmy pod uwagę dyskretny układ singularny opisany poniższymi równaniami [5]

$$E\Delta^\alpha x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i\in Z_+, \tag{1}$$

$$y_i = Cx_i \tag{2}$$

gdzie $0<\alpha<1$ jest rzędem niecałkowitym (ułamkowym), $x_i\in\Re^n$, $u_i\in\Re^m$, $y_i\in\Re^p$ są wektorami stanu, wejścia (wymuszenia) i wyjścia (odpowiedzi), zaś $A\in\Re^{n\times n}$, $B\in\Re^{n\times m}$, $C\in\Re^{p\times n}$. Różnica niecałkowitego rzędu zdefiniowana jest następująca zależnością

$$\Delta^\alpha x_i = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{i-k} \tag{3}$$

przy czym

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{dla } k=1,2,\ldots \end{cases} \tag{4}$$

Zakładamy, że rząd α w równaniu (1) jest jednakowy dla wszystkich zmiennych stanu oraz że pęk (E, A) jest regularny, tj.

$$\det[Ez-A]\neq 0 \tag{5}$$

dla pewnego $z\in\mathcal{C}$ (ciało liczb zespolonych). Przy spełnieniu warunku o regularności pęku zawsze istnieje para nieosobliwych macierzy $P,Q\in\Re^{n\times n}$ taka, że

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},\ PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

gdzie n_1 jest równe rzędowi wielomianu $\det[Ez-A]$, $A_1\in\Re^{n_1\times n_1}$ natomiast N jest macierzą nilpotentną (o zerowych wartościach własnych) z indeksem nilpotentności μ $(N^\mu=0;\ N^{\mu-1}\neq 0)$ oraz $n_1+n_2=n$.

Mnożąc lewostronnie (1) przez macierz $P\in\Re^{n\times n}$ oraz definiując nowy wektor stanu

$$\overline{x}_i = \begin{bmatrix} \overline{x}^{(1)} \\ \overline{x}^{(2)} \end{bmatrix} = Q^{-1}x_i,\ \overline{x}_i^{(1)}\in\Re^{n_1}, \overline{x}_i^{(2)}\in\Re^{n_2} \tag{7}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} PEQQ^{-1}\Delta^\alpha x_{i+1} &= PEQ\Delta^\alpha Q^{-1}x_{i+1} = \\ &= PAQQ^{-1}x_i + PBu_i \end{aligned} \tag{8}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \Delta^{\alpha} \begin{bmatrix} \overline{x}_{i+1}^{(1)} \\ \overline{x}_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_{i}^{(1)} \\ \overline{x}_{i}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_i \tag{9}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB, \ B_1 \in \Re^{n_1 \times m}, \ B_2 \in \Re^{n_2 \times m} \tag{10}$$

zaś w przypadku równania wyjścia (2) możemy napisać

$$y_i = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_{i}^{(1)} \\ \overline{x}_{i}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = CQ, \ C_1 \in \Re^{p \times n_1}, \ C_2 \in \Re^{p \times n_2} \tag{12}$$

Równanie (9) oraz (11) można napisać w poniższych postaciach

a)

$$\Delta^{\alpha} \overline{x}_{i+1}^{(1)} = A_1 \overline{x}_{i}^{(1)} + B_1 u_i \tag{13}$$

$$y_i^{(1)} = C_1 \overline{x}_{i}^{(1)} \tag{14}$$

b)

$$N \Delta^{\alpha} \overline{x}_{i+1}^{(2)} = \overline{x}_{i}^{(2)} + B_2 u_i \tag{15}$$

$$y_i^{(2)} = C_2 \overline{x}_{i}^{(2)} \tag{16}$$

przy czym

$$y_i = y_i^{(1)} + y_i^{(2)} = C_1 \overline{x}_{i}^{(1)} + C_2 \overline{x}_{i}^{(2)} \tag{17}$$

Układ singularny (1), (2) został zdekomponowany na dwa niezależne podukłady: *a*) – układ regularny (standardowy) niecałkowitego rzędu, *b*) – układ ściśle singularny z nilpotentną macierzą N.

Zauważmy, że powstałe po dekompozycji układy są niezależne pod względem dynamiki, ale sygnał wyjściowy układu (1), (2) jest sumą sygnałów poszczególnych pod układów.

Bez starty ogólności dalszych rozważań, podobnie jak w układach rzędu całkowitego przyjmiemy, że wymuszenie $u_i = 0$.

Definicja 1. Układ singularny niecałkowitego rzędu (1), (2) nazywamy obserwowalnym, jeżeli istnieje taka chwila t_k, że znając odpowiedź układu y_i dla $t \in [0, t_k]$, możemy jednoznacznie wyznaczyć dowolny stan początkowy x_0 tego układu.

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest podanie kryteriów obserwowalności dyskretnego układu singularnego niecałkowitego rzędu (1), (2).

2. Główny rezultat

Weźmy pod uwagę układ standardowy niecałkowitego rzędu (13), (14). Rozwiązanie równania (13) ma postać [5]

$$\overline{x}_{i}^{(1)} = \Phi_i \overline{x}_{0}^{(1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \Phi_{i-k-1} B_1 u_k \tag{18}$$

gdzie macierz tranzycji Φ_i jest określona zależnością

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i A_{1\alpha} + \sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k-1} \binom{\alpha}{k} \Phi_{i-k+1} \tag{19}$$

przy warunku początkowym $\Phi_0 = I_{n_1}$, zaś

$$A_{1\alpha} = A_1 + I_{n_1} \alpha \tag{20}$$

Natomiast rozwiązanie równania (15) układu ściśle singularnego przy $N = 0$ ma postać [5]

$$x_i^{(2)} = -B_2 u_i, \quad i \in Z_+ \tag{21}$$

Podstawiając (18) do równania wyjścia (14) oraz podstawiając (21) do (16) otrzymamy odpowiednio

$$y_i^{(1)} = C_1 \Phi_i \overline{x}_{0}^{(1)} + C_1 \sum_{k=0}^{i-1} \Phi_{i-k-1} B_1 u_k \overline{x}_{i}^{(1)} \tag{22}$$

$$y_i^{(2)} = -C_2 B_2 u_i \tag{23}$$

Ponieważ zgodnie z wcześniejszym założeniem $u_i = 0$, więc z powyższych równań mamy

$$y_i^{(1)} = C_1 \Phi_i \overline{x}_{0}^{(1)} \tag{24}$$

$$y_i^{(2)} = 0 \tag{25}$$

Uwzględniając (24), (25) oraz biorąc pod uwagę zależność (17), można stwierdzić, że przy $u_i = 0$ na odpowiedź układu singularnego niecałkowitego rzędu (1), (2) składają się wartości odpowiedzi tylko układu regularnego niecałkowitego rzędu, tj $y_i = y_i^{(1)} = C_1 x_i^{(1)}$ Biorąc z kolei pod uwagę definicję 1, można stwierdzić, że o obserwowalności układu singularnego niecałkowitego rzędu (1), (2) należy wnioskować na podstawie obserwowalności układu regularnego (13), (14), bowiem do odtworzenia stanu początkowego x_0 potrzebna jest znajomość $y_i = y_i^{(1)}$.

Wyznaczając kolejne wartości odpowiedzi (24) otrzymamy układ równań z niewiadomą $\overline{x}_{0}^{(1)}$, tj.

$$\begin{aligned} y_0^{(1)} &= C_1 \overline{x}_{0}^{(1)} \\ y_1^{(1)} &= C_1 \Phi_1 \overline{x}_{0}^{(1)} \\ y_2^{(1)} &= C_1 \Phi_2 \overline{x}_{0}^{(1)} \\ &\vdots \\ y_{n_1-1}^{(1)} &= C_1 \Phi_{n_1-1} \overline{x}_{0}^{(1)} \end{aligned} \tag{26}$$

który można zapisać w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_1-1} \end{bmatrix} = S\,\overline{x}_0^{(1)}, \quad S = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1\Phi_1 \\ C_1\Phi_2 \\ \vdots \\ C_1\Phi_{n_1-1} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Kryteria obserwowalności układu singularnego (1), (2) można sformułować w podany niżej sposób.

Twierdzenie 1. Układ singularny niecałkowitego rzędu (1)(2) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rank\, S = n_1 \tag{28}$$

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w pracy [11].

Twierdzenie 2. Układ singularny niecałkowitego rzędu (1)(2) jest obserwowalny wtedy, gdy

$$rank\, \tilde{S} = n_1, \tag{29}$$

gdzie

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_{1\alpha} \\ C_1 (A_{1\alpha})^2 \\ \vdots \\ C_1 (A_{1\alpha})^{n_1-1} \end{bmatrix}, \quad A_{1\alpha} = (A_1 + I_{n_1}\alpha) \tag{30}$$

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w pracy [11].

Z podanych wcześniej przekształceń układu singularnego (1), (2) wynika, że stan początkowy jest określony następująca zależnością

$$\overline{x}_0 = Q\begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{bmatrix} \in \Re^n \tag{31}$$

Ponieważ odpowiedź (25) jest równa zero, więc stan $x_0^{(2)} = 0$ (nie generuje on odpowiedzi układu przy tym założeniu). Oznacza to, że do odtworzenia wektora (31) potrzebna jest informacja o wartościach odpowiedzi (24), która wywoływana jest warunkiem początkowym $x_0^{(1)}$ standardowego układu niecałkowitego rzędu (13), (14). Przy zarejestrowanym ciągu odpowiedzi tego układu, jego stan początkowy możemy wyznaczyć w oparciu o podany niżej warunek.

Twierdzenie 3. Jeżeli układ singularny niecałkowitego rzędu (1), (2) jest obserwowalny, to stan początkowy tego układu można wyznaczyć korzystając ze wzoru

$$\overline{x}_0^{(1)} = [\tilde{S}^T \tilde{S}]^{-1} \tilde{S}^T y_i^{(1)} \tag{32}$$

(indeks ^{T} oznacza transpozycję macierzy), a następnie korzystając z zależności (31).

Dowód. Dowód w przypadku (32) przebiega podobnie, jak w pracy [7].

2.1. Przykład

Należy sprawdzić obserwowalność układu singularnego niecałkowitego rzędu opisanego równaniami stanu (1), (2) przy $u_i = 0$ o macierzach [5]

$$E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.7 & 2.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1.4 \\ 2.2 & 4.6 & 2.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

W powyższym układzie $n = 3,\ p = 1$. Niech rząd $\alpha = 0.7$.

Macierze P, Q dla rozważanego układu mają postać [5]

$$P = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Po zastosowaniu macierzy (34) do układu (1), (2) opisanego macierzami (33) otrzymamy

$$\begin{gathered} PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad n_1 = 2 \\ PAQ = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, n_2 = 1 \\ CQ = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{35}$$

Sprawdzimy obserwowalność układu (13), (14), który jest opisany za pomocą poniższych równań

$$\begin{gathered} \Delta^{0.7}\overline{x}_{i+1}^{(1)} = A_1 x_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} = C_1 \overline{x}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} x_i^{(1)} \end{gathered} \tag{36}$$

Obliczając macierz S (obserwowalności) (27) otrzymamy

$$\begin{gathered} S = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1\Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3.2 & -2.2 \end{bmatrix} \\ \Phi_1 = A_{1\alpha} = (A_1 + I_2 0.7) = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{37}$$

Ponieważ $rank\, S = n_1 = 2$, więc rozpatrywany układ jest obserwowalny na mocy twierdzenia 1. Łatwo sprawdzić, że w rozważanym przypadku warunek podany w twierdzeniu 2 również będzie spełniony, gdyż struktura macierzy $\tilde{S}$ ze względu na $\Phi_1 = A_{1\alpha}$ jest taka sama, jak macierzy S (37).

Załóżmy, że odpowiedź układu (36) jest następująca

$$y_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \in \Re^2 \tag{38}$$

Wyznaczymy warunek początkowy $\overline{x}_0^{(1)}$ tego układu, a następnie stan początkowy (31) układu singularnego o macierzach (33). Po dokonaniu niezbędnych podstawień do wzoru (32) mamy

$$\overline{x}_0^{(1)} = [\tilde{S}^T \tilde{S}]^{-1} \tilde{S}^T y_i^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1 \end{bmatrix} \in \Re^2 \tag{39}$$

Stan początkowy rozpatrywanego układu singularnego (1)(2) przy rzędzie $\alpha = 0,7$ o macierzach (33) odtworzony na podstawie wartości odpowiedzi układu regularnego (38) ma postać

$$\overline{x}_0 = Q \begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re^3 \tag{40}$$

3. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem obserwowalności układów singularnych dyskretnych, opisanych w przestrzeni stanu równaniami niecałkowitego rzędu. Rozważono pewien przypadek szczególny, w którym jeżeli dokonamy dekompozycji układu singularnego i uzyskamy układ o równaniach (15), (16) z macierzą $N = 0$, wówczas o obserwowalności układu (1), (2) można wnioskować na podstawie obserwowalności układu regularnego niecałkowitego rzędu opisanego równaniami (13), (14).

Przedstawione rozważania można uogólnić na przypadek układu singularnego opisanego za pomocą równań o różnych wartościach α dla każdej zmiennej stanu. Możliwe jest także uogólnienie podanych rozważań na klasę dodatnich singularnych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu.

Pracę wykonano w ramach grantu NN 514 6389 40 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

Bibliografia

1. Cobb J. D.: *Controllability, observability and duality in singular systems.* IEEE Trans. Autom. Contr. AC-29, no. 12, 1981, 811-831.
2. Dai L.: *Singular control systems.* Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin 1989.
3. Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów.* PWN, Warszawa 1996.
4. Kaczorek T.: *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu.* Politechnika Białostocka, Białystok 2009.
5. Kaczorek T.: *Singular fractional discrete-time systems.* Praca zgłoszona, 2011.
6. Kalman R.E.: *On the general theory of control system.*. Proc. Of the 1st IFAC Congr., London: Butterworth 1960.
7. Kociszewski R.: *Sterowalność i obserwowalność liniowych stacjonarnych układów dodatnich dyskretnych z opóźnieniami.* Rozprawa doktorska. Politechnika Białostocka, Białystok 2008.
8. Lewis F.L.: *Fundamental, reachability, and observability matrices for discrete descriptor systems.* IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-30, 1985, pp. 502-505.
9. Luenberger D.G.: *Dynamic equations in descriptor form.* IEEE Trans. Automat. Control, vol. 22, 1977, pp. 312-321.
10. Nikoukhah R., Willsky A.S., Levy B.: *Boundary-value descriptor systems: well-posedness, reachability, and observability.* Int. J. Contr., vol. 46, no. 5, 1987, pp. 1715-1737.
11. Sierociuk D.: *Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu.* Rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska, Warszawa 2007. ■

Observability conditions of discrete-time singular fractional systems

Abstract: The paper presents a problem of observability of discrete-time singular fractional systems. It has been shown that after decomposition of considered system into two independent systems: regular (standard) fractional system and singular system (with a nilpotent matrix *N*) observability conditions can be formulated in reference to standard fractional discrete-time system. Proposed approach is possible to use if the matrix $N = 0$. The considerations are illustrated by a numerical example.

Keywords: observability, singular, discrete-time, fractional order

dr inż. Rafał Kociszewski

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej (2001 r.). Obecnie adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Zainteresowania naukowe autora są skoncentrowane na zagadnieniach analizie i syntezie liniowych układów dodatnich, układów niecałkowitego rzędu oraz na optymalizacyjnych metodach sterowania.

e-mail: rafko@pb.edu.pl