

Analiza układu Lorenza niecałkowitego rzędu

Mikołaj Busłowicz

Wydział Elektryczny, Politechnika Białostocka,

Streszczenie: Uogólniono klasyczne równania stanu układu Lorenza na przypadek układu niecałkowitego rzędu o tym samym niecałkowitym rzędzie pochodnej dla wszystkich zmiennych stanu. Pokazano, że układ Lorenza niecałkowitego rzędu ma niestabilne wszystkie punkty równowagi dla $\alpha > 0,9941$. Na postawie badań symulacyjnych stwierdzono, że układ Lorenza niecałkowitego rzędu $\alpha = 1,1$ jest układem chaotycznym.

Słowa kluczowe: układ niecałkowitego rzędu, układ Lorenza, stabilność, chaos.

1. Wstęp

W XX wieku nastąpił intensywny rozwój badań naukowych w zakresie teorii chaosu deterministycznego, który należy rozumieć jako przypadkowe zachowanie się przebiegów czasowych zmiennych charakteryzujących procesy o deterministycznych modelach matematycznych.

Dla pewnych wartości parametrów procesy te stają się niezwykle wrażliwe na warunki początkowe i nawet niewielka ich zmiana może prowadzić po pewnym czasie do wielkich odchyłeń.

Prekursorem teorii chaosu był E. N. Lorenz, amerykański matematyk i meteorolog, który zbudował model przemian zachodzących w atmosferze pod wpływem promieniowania słonecznego, które nagrzewało powierzchnię Ziemi [8]. Model ten, zwany modelem (układem) Lorenza był szczegółowo analizowany w bardzo wielu pracach i stał się inspiracją do poszukiwania innych układów o podobnych cechach przebiegów czasowych zmiennych stanu [10].

Przebiegi przejściowe w układzie Lorenza charakteryzują się występowaniem tzw. dziwnego atraktora, zwanego też atraktorem Lorenza.

Atraktor jest to zbiór w przestrzeni fazowej, do którego w miarę upływu czasu zmierzają trajektorie rozpoczynające się w różnych obszarach przestrzeni fazowej. Atraktorem może być punkt, zamknięta krzywa (cykl graniczny) lub fraktal (dziwny atraktor). Jeśli w danym układzie dynamicznym występuje dziwny atraktor, to jest to równoważne stwierdzeniu, że układ jest układem chaotycznym.

Blizsze informacje dotyczące chaosu i układów chaotycznych, w tym też układu Lorenza, można znaleźć np. w pracach [1, 2, 5-8, 10, 11].

W niniejszej pracy uogólnimy równania stanu układu Lorenza na przypadek niecałkowitego rzędu pochodnych zmiennych stanu i rozpatrzemy wpływ wartości niecałko-

witego rzędu pochodnych na stabilności układu oraz na możliwość wystąpienia w nim drgań chaotycznych.

2. Wprowadzenie

E. N. Lorenz w 1963 roku w pracy [8] przedstawił nieliniowy model zjawiska konwekcji termicznej w atmosferze

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (1)$$

gdzie

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad F(x(t)) = \begin{bmatrix} \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ rx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) - qx_3(t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

przy czym σ jest liczbą Prandtla charakteryzującą lepkość ośrodka, r jest liczbą Rayleigha charakteryzującą przewodnictwo cieplne ośrodka, zaś stała q charakteryzuje rozmiary obszaru, w którym zachodzi przepływ konwekcyjny. Liczby te są dodatnie, przy czym $\sigma = 10$, $q = 8/3$, r jest zmienne.

Zmienne stanu występujące w (2) opisują zjawiska zachodzące w atmosferze, przy czym $x_1(t)$ odnosi się do ruchu konwekcyjnego, $x_2(t)$ reprezentuje występujące różnice temperatur zaś $x_3(t)$ określa rozkład pionowy temperatury w atmosferze.

Lorenz w pracy [8] rozpatrywał następujące wartości parametrów:

$$\sigma = 10, \quad q = 8/3, \quad r = 28 \quad (3)$$

i pokazał, że dla tych wartości układ (1) jest układem chaotycznym, a wykres trajektorii fazowej przedstawia dziwny atraktor, nazwany później atraktorem Lorenza.

Układ (1) w literaturze nosi nazwę układu Lorenza lub chaotycznego układu Lorenza.

Inne wartości parametrów, dla których układ (1) jest układem chaotycznym są podane np. w pracy [10] i wynoszą: $\sigma = 4$, $q = 1$, $r = 16$.

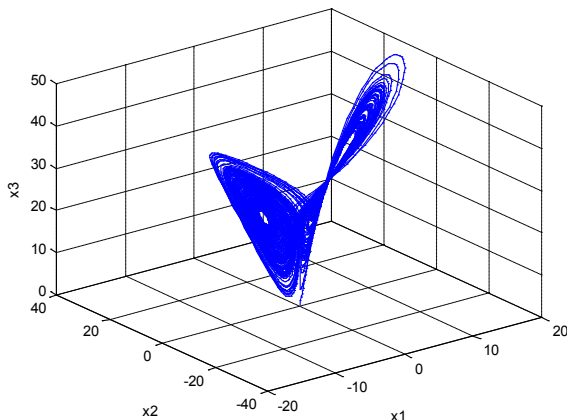
Nieliniowy układ (1) ma trzy punkty równowagi:

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e2} = \begin{bmatrix} \sqrt{q(r-1)} \\ \sqrt{q(r-1)} \\ r-1 \end{bmatrix}, \quad x_{e3} = \begin{bmatrix} -\sqrt{q(r-1)} \\ -\sqrt{q(r-1)} \\ r-1 \end{bmatrix}. \quad (4a)$$

Podstawiając w (4a) wartości liczbowe (3) otrzymamy

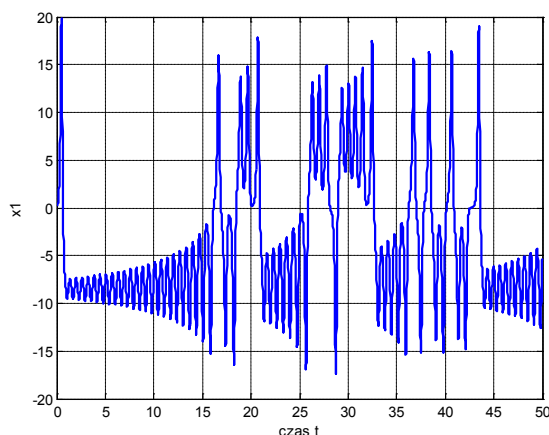
$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e2} = \begin{bmatrix} \sqrt{72} \\ \sqrt{72} \\ 27 \end{bmatrix}, \quad x_{e3} = \begin{bmatrix} -\sqrt{72} \\ -\sqrt{72} \\ 27 \end{bmatrix}. \quad (4b)$$

Trajektoria fazowa układu (1), wyznaczona dla $t \in [0, 100]$ za pomocą programu opracowanego w środowisku systemu Simulink przy warunkach początkowych $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,2$, jest pokazana na rys. 1. Jest to tzw. atraktor Lorenza. Natomiast wykres zmiennej stanu $x_1(t)$ dla $t \in [0, 50]$ jest pokazany na rys. 2.



Rys. 1. Atraktor Lorenza

Fig. 1. Lorenz Attractor



Rys. 2. Wykres $x_1(t)$

Fig. 2. Plot of $x_1(t)$

3. Główny rezultat

Weźmy pod uwagę układ Lorenza niecałkowitego rzędu, którego opis w przestrzeni stanów ma postać:

$${}_0D_t^\alpha x(t) = F(x(t)), \quad \alpha \in (1, 2), \quad (5)$$

przy czym $F(x(t))$ ma postać podaną w (2), zaś

$${}_0D_t^\alpha x(t) = \begin{bmatrix} {}_0D_t^\alpha x_1(t) \\ {}_0D_t^\alpha x_2(t) \\ {}_0D_t^\alpha x_3(t) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdzie ${}_0D_t^\alpha x(t)$ jest pochodną Caputo niecałkowitego rzędu zmiennej $x(t)$, zdefiniowaną następująco:

$${}_0D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^t \frac{x^{(p)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-p}}, \quad p-1 \leq \alpha \leq p, \quad (7)$$

przy czym $x^{(p)}(t) = d^p x(t) / dt^p$, p jest liczbą naturalną, zaś

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (8)$$

jest funkcją gamma Eulera.

Zauważmy, że w przypadku szczególnym $\alpha=1$, równanie (5) przyjmuje postać (1).

Układ opisany równaniem (5) będziemy nazywać układem Lorenza niecałkowitego rzędu. Nie był on dotychczas rozpatrywany w literaturze.

Przy badaniu stabilności układu (5), w którym $F(x(t))$ ma postać (2) będziemy korzystać z poniższego twierdzenia, np. [3, 4].

Twierdzenie 1. Liniowy układ:

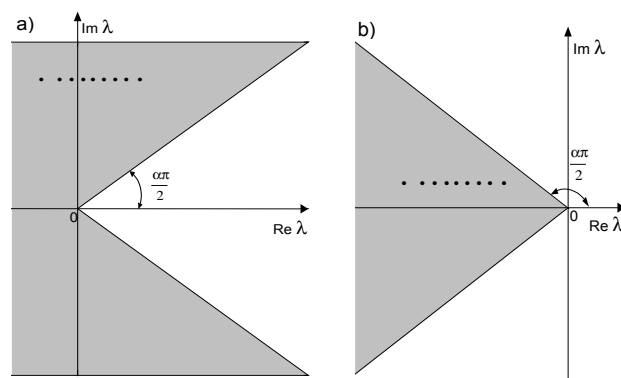
$${}_0D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (9)$$

jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\arg \lambda_i(A)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

gdzie $\lambda_i(A)$ oznacza i -tą wartość własną macierzy A .

Spełnienie warunku (10) oznacza, że wartości własne macierzy A leżą w obszarze stabilności pokazanym na rys. 3a) dla $\alpha \in (0, 1)$ i na rys. 3b) dla $\alpha \in (1, 2)$.



Rys. 3. Obszar stabilności: a) $\alpha \in (0, 1)$; b) $\alpha \in (1, 2)$

Fig. 3. Stability region: a) $\alpha \in (0, 1)$; b) $\alpha \in (1, 2)$

W pracy [9] wykazano, że układy (9) niecałkowitego rzędu są niestabilne dla $\alpha > 2$.

Z twierdzenia 1 wynikają poniższe lematy [3].

Lemat 1. Układ niecałkowitego rzędu (9) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\gamma > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (11)$$

gdzie

$$\gamma = \min_i |\arg \lambda_i(A)|. \quad (12)$$

Lemat 2. Jeżeli macierz A nie ma rzeczywistych dodatnich wartości własnych, to układ (9) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha < \alpha_0 = \frac{2\gamma}{\pi}, \quad (13)$$

gdzie γ oblicza się ze wzoru (12).

Układ nieliniowy (5) niecałkowitego rzędu ma te same punkty równowagi, co układ (1), tj. (4). Analizując jego stabilność będziemy rozpatrywać stabilność punktów równowagi. Wyznaczymy w tym celu liniowe przybliżenia

równania (5) w punktach równowagi. Mają one postać (9) dla $A \equiv A_{ei}$, przy czym macierze A_{ei} oblicza się ze wzoru:

$$A_{ei} = \left. \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_{ei}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Uwzględniając (2) z powyższego wzoru otrzymamy:

$$A_{ei} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - x_{ei,3} & -1 & -x_{ei,1} \\ x_{ei,2} & x_{ei,1} & -q \end{bmatrix}_{x_{ei}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

przy czym $x_{ei,j}$ oznacza j -ty element w wektorze x_{ei} ($i=1,2,3$) o postaci podanej w (4b).

Podstawiając współrzędne (4b) punktów równowagi otrzymamy

$$A_{e1} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$A_{e2} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{72} \\ \sqrt{72} & \sqrt{72} & -8/3 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$A_{e3} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{72} \\ -\sqrt{72} & -\sqrt{72} & -8/3 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Obliczając wartości powyższych macierzy otrzymamy:

$$\lambda_i(A_{e1}): -22,8277; 11,8277; -2,6667$$

$$\lambda_i(A_{e2}) = \lambda_i(A_{e3}): -13,8546; 0,0940 \pm j10,1945.$$

Wartości własne macierzy (16) są rzeczywiste, przy czym jedna z nich jest dodatnia. Zatem z twierdzenia 1 wynika, że punkt równowagi x_{e1} jest niestabilny dla dowolnego $\alpha \in (0, 2)$.

Macierz (17), podobnie jak macierz (18), ma jedną wartość własną rzeczywistą ujemną i parę wartości własnych zespolonych sprzężonych, o dodatniej części rzeczywistej. Z twierdzenia 1 (patrz też rys. 3) wynika zatem, że punkty równowagi x_{e2} i x_{e3} są niestabilne dla $\alpha \in (1, 2)$. Mogą być one stabilne tylko dla określonych wartości $\alpha \in (0, 1)$. Aby je określić, zastosujemy lemat 2.

Ze wzorów (12) i (13) odpowiednio mamy:

$$\gamma = \min_i |\arg \lambda_i(A_{e2})| = 1,5616, \quad (19)$$

$$\alpha < \alpha_0 = 0,9941. \quad (20)$$

Oznacza to, zgodnie z lematem 2, że punkty równowagi x_{e2} i x_{e3} są asymptotycznie stabilne dla dowolnych wartości $\alpha \in (0, \alpha_0 = 0,9941)$.

W układzie (5), podobnie jak i w układzie (1), drgania chaotyczne mogą (ale nie muszą) wystąpić tylko wtedy, gdy wszystkie punkty równowagi są niestabilne.

Z powyższych rozważań wynika poniższy lemat.

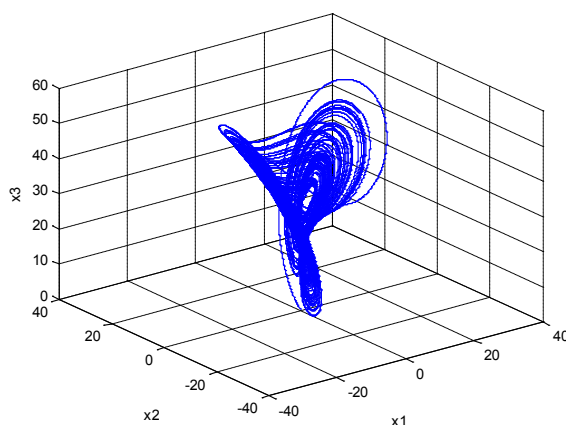
Lemat 3. W układzie Lorenza (5) niecałkowitego rzędu o wartościach parametrów (3) mogą wystąpić drgania chaotyczne tylko w przypadku niecałkowitego rzędu $\alpha > 0,9941$.

Zauważmy, że warunek lematu 3 jest spełniony dla $\alpha = 1$, a więc w przypadku klasycznego układu Lorenza.

Aby sprawdzić możliwość wystąpienia drgań chaotycznych w układzie Lorenza (5), (2), (3), zostały przeprowadzone badania symulacyjne w środowisku systemu Simulink z wykorzystaniem programów Fractional Control Toolbox for MatLab [12]. Polegały one na wyznaczeniu trajektorii fazowych układu Lorenza dla różnych $\alpha > \alpha_0 = 0,9941$.

Na podstawie tych badań stwierdzono, że trajektoria fazowa ma przebieg podobny do trajektorii fazowej układu Lorenza (1), (2) w przypadku, gdy niecałkowity rząd α ma wartość równą 1,1. Powyższe zachodzi też dla wartości α bliskich 1,1.

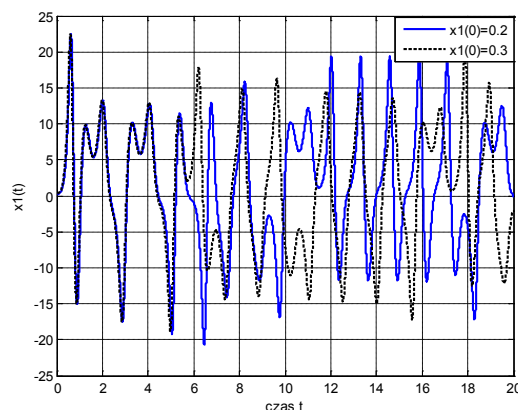
Trajektoria fazowa układu (5), (2) przy $\alpha = 1,1$, wyznaczona dla $t \in [0, 100]$ przy warunkach początkowych $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,2$, jest pokazana na rys. 4. Z porównania rys. 1 i 4 wynika, że jest to atraktor bardzo podobny do klasycznego atraktora Lorenza.



Rys. 4. Atraktor układu Lorenza niecałkowitego rzędu $\alpha = 1,1$

Fig. 4. Attractor of the fractional Lorenz system with $\alpha = 1,1$

Na rys. 5 jest pokazany wykres zmiennej stanu $x_1(t)$ dla $t \in [0, 20]$ wyznaczony dla warunków początkowych $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,2$ (linia ciągła, kolor niebieski) oraz dla $x_1(0) = 0,3$; $x_2(0) = x_3(0) = 0,2$ (linia przerywana, kolor czarny). Z rys. 5 wyraźnie wynika, że oba przebiegi oddalają się od siebie wraz ze wzrostem czasu, pomimo że warunki początkowe są bardzo bliskie. Ponadto, oba przebiegi mają ograniczoną amplitudę (patrz też rys. 4). Taką cechą mają układy chaotyczne.



Rys. 5. Wykres $x_1(t)$ układu (5) przy $\alpha = 1,1$

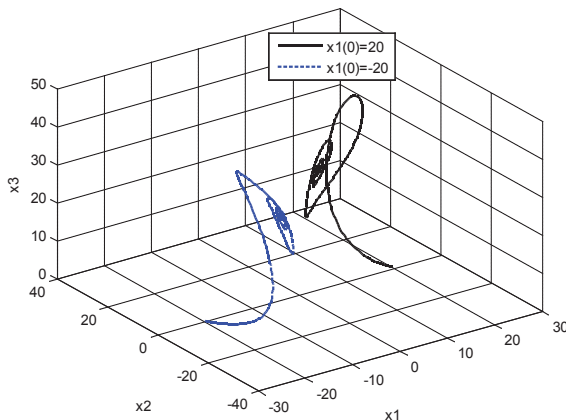
Fig. 5. Plot of $x_1(t)$ for system (5) with $\alpha = 1,1$

W ramach badań symulacyjnych rozpatrzono też przypadek, w którym $\alpha \in (0; 0,9941)$. W takim przypadku układ Lorenza (5), (2) niecałkowitego rzędu ma dwa stabilne punkty równowagi: x_{e2} i x_{e3} .

Przyjmując $\alpha = 0,9$, wyznaczono trajektorie fazowe dla dwóch różnych warunków początkowych. Są one pokazane na rys. 6, przy czym linią ciągłą i czarnym kolorem oznaczono trajektorię wychodzącą z warunku początkowego $x_1(0) = 20$; $x_2(0) = x_3(0) = 0,2$ (kończy się ona w punkcie równowagi x_{e2} (4)), zaś kolorem niebieskim i linią przerywaną oznaczono trajektorię wychodzącą z warunku początkowego $x_1(0) = -20$; $x_2(0) = x_3(0) = 0,2$. Kończy się ona w punkcie równowagi x_{e3} .

Otrzymane wykresy potwierdzają wcześniejszy rezultat, że dla $\alpha < 0,9941$ układ Lorenza niecałkowitego rzędu ma stabilne punkty równowagi x_{e2} i x_{e3} .

Na bazie przeprowadzonych badań symulacyjnych stwierdzono ponadto, że układ Lorenza (5), (2) niecałkowitego rzędu $\alpha > 1,15$ nie tylko jest niestabilny, ale też nie występują w nim drgania chaotyczne.



Rys. 6. Trajektorie fazowe układu (5) dla $\alpha = 0,9$
Fig. 6. Phase trajectories of system (5) for $\alpha = 0,9$

4. Uwagi końcowe

W pracy uogólniono klasyczne równania stanu układu Lorenza (1) na przypadek układu niecałkowitego rzędu (5). Pokazano, że układ (5) ma jeden niestabilny i dwa stabilne punkty równowagi dla $\alpha < 0,9941$. Natomiast dla $\alpha > 0,9941$ wszystkie jego punkty równowagi są niestabilne.

Na podstawie badań symulacyjnych stwierdzono, że układ Lorenza niecałkowitego rzędu $\alpha = 1,1$ jest układem chaotycznym. Wtedy występuje atraktor podobny do klasycznego atraktora Lorenza.

Praca naukowa finansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki jako projekt badawczy N N514 638940.

Bibliografia

1. Arecchi F. T., Boccaletti S., Ciofini M, Meucci R.: *The control of chaos: theoretical schemes and experimental realizations*, „International Journal of Bifurcation and Chaos”, vol. 8, no. 8, 1998, 1643-1655.

2. Awrejcewicz J.: *Chaos i synchronizacja w układach fizycznych*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź 1995.
3. Busłowicz M.: *Stability of state-space models of linear continuous-time fractional order systems*. „Acta Mechanica et Automatica”, vol. 5, no. 2, 2011, 15-22.
4. Chen Y.-Q., Ahn H.-S., Podlubny I.: *Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties*, „Signal Processing”, vol. 86, 2006, 2611-2618.
5. Ekeland I.: *Chaos*. Książnica, Katowice 1999.
6. Gleick J.: *Chaos. Narodziny nowej nauki*. Zysk i S-ka, Poznań 1995.
7. Kudrewicz J.: *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1996.
8. Lorenz E.N., *Deterministic nonperiodic flow*, „Journal of the Atmospheric Sciences”. vol. 20, 1963, 130-141.
9. Radwan A.G., Soliman A.M., Elwakil A.S., Seidek A.: *On the stability of linear systems with fractional-order elements*, „Chaos, Solitons and Fractals”, vol. 40, 2009, 2317-2328.
10. Sprott J.C., *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford 2003.
11. Tempczyk M.: *Świat harmonii i chaosu*, PIW, Warszawa 1995.
12. Valério D.: *Ninteger v. 2.3 - Fractional Control Toolbox for MatLab, User and programmer manual*, Technical University of Lisbona, 2005 (<http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>)

Analysis of the Lorenz system of fractional order

Abstract: Generalization of the state equations of the classical Lorenz chaotic system to case of the system with the same fractional order of all state variables is given. It has been proved that the fractional Lorenz system has unstable all equilibrium points for $\alpha > 0,9941$. On the basis of simulations it has been shown that the fractional Lorenz system for $\alpha = 1,1$ is a chaotic system with the attractor similar to the classical Lorenz Attractor.

Keywords: fractional system, Lorenz system, stability, chaos.

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Profesor zwyczajny Politechniki Białostockiej, kierownik Katedry Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym. Od 2004 r. członek Komitetu Automatyki i Robotyki PAN. Badania naukowe koncentrują się głównie wokół zagadnień analizy i syntezy układów regulacji z opóźnieniami, układów dodatnich, niecałkowitego rzędu, układów 2D oraz układów ciągle-dyskretnych. Jest autorem 3 monografii i ok. 170 publikacji naukowych.



e-mail: busmiko@pb.edu.pl