

Historyczne źródła teorii błędu i niepewności pomiaru

Paweł Fotowicz

Główny Urząd Miar

Streszczenie: W artykule przedstawiono historyczne podstawy kształtowania się myśli metrologicznej związanej z opracowaniem danych pomiarowych. Omówiono zasadnicze osiągnięcia tych rozważań w postaci metody najmniejszych kwadratów, prawa propagacji błędów i centralnego twierdzenia granicznego. Uzupełniono je o wnioskowanie dotyczące przedstawiania błędów pomiaru w postaci histogramu i wyrażania go przez niepewność. Rozważania takie publikowano już w XIX wieku. Uzasadniają one współczesne podejście opisujące wyniki pomiaru wielkości mierzonej (mezurandu) rozkładem prawdopodobieństwa.

Słowa kluczowe: teoria błędów, niepewność pomiaru

1. Wprowadzenie

Problematykę niepewności pomiaru można tradycyjnie wiązać z opublikowaniem w latach 1993 i 1995 *Przewodnika GUM* jako podstawowego dokumentu dotyczącego jej wyrażania [1]. Oba wydania, poza kosmetycznymi zmianami redakcyjnymi, praktycznie są identyczne. Dodatkowo, tekst edycji z 1995 r. upubliczniono w 2008 r. na stronach internetowych Międzynarodowego Biura Miar [2]. Obecnie trwają intensywne prace nad wypracowaniem uniwersalnej metodyki przetwarzania danych pomiarowych, zgodnie z założeniami teorii niepewności gotowej do stosowania w dowolnej dziedzinie nauk przyrodniczych i technicznych. Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (Joint Committee for Guides in Metrology) pod przewodnictwem Międzynarodowego Biura Miar opracowuje pakiet dokumentów o ogólnym tytule *Evaluation of Measurement Data*.

Można postawić pytanie: gdzie należy szukać początków kształtowania się współczesnej myśli w dziedzinie opracowania danych pomiarowych? Z historycznego punktu widzenia początki te można wiązać z trzema intelektualnymi osiągnięciami myśli matematycznej. Wszystkie pojawiły się niemal w tym samym czasie, za sprawą trzech wybitnych intelektualistów z przełomu XVIII i XIX wieku.

2. Trzy kluczowe publikacje

Adrien Marie Legendre (1752–1833), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) i Pierre Simon Laplace (1749–1827) w swoich publikacjach stworzyli podstawy współczesnej metodyki opracowania danych pomiarowych. Kolejno w latach 1805, 1809 i 1810, niejako na marginesie zasadniczych swoich publikacji, przedstawili oni trzy podstawowe rozwiązania, współcześnie znane pod nazwami: metoda najmniejszych kwadratów, prawo propagacji błędów oraz centralne twier-

dzenie graniczne. Prace te nie tworzą oddzielnych dzieł, lecz raczej są uzupełnieniami szerszych opracowań [3].

Legendre w dziele pt. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, które ukazało się w 1805 r., zamieszcza kilkustronicowy dodatek *Sur la méthode des moindres quarrés*. Przedstawia w nim metodę minimalizacji sumy kwadratów błędów. Jeżeli równanie wielkości mierzonej zostanie przedstawione w postaci liniowej, to można zapisać szereg równań dla błędów E_i tej wielkości

$$E_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z + \quad (1)$$

gdzie a_i, b_i, c_i, \dots są znanymi współczynnikami, a x, y, z, \dots nieznanymi wielkościami wejściowymi. Zmienne tych równań wyznacza się, podnosząc do kwadratu błędy i sumując je tak, aby otrzymać najmniejszą z możliwych wartości. Współcześnie metoda ta stosowana jest w analizie regresji.

Kolejne rozwiązanie przyniosła praca Gaussa z 1809 r. pt. *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium*. Autor przedstawia podobny liniowy układ równań

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \quad (2)$$

i formułuje błąd jako różnicę między obliczoną wartością V_i a zaobserwowaną M_i

$$\Delta_i = V_i - M_i \quad (3)$$

Prawdopodobieństwo błędów charakteryzuje krzywa $\varphi(\Delta)$, która jest symetryczna i osiąga maksimum dla $\Delta = 0$.

Gauss przyjmuje aksjomat, że najbardziej prawdopodobną wartością pojedynczej, nieznannej obserwacji jest średnia arytmetyczna zbioru danych, uzyskanego w tych samych warunkach pomiarowych podczas wielokrotnego powtarzania obserwacji. Postuluje, by do opisu rozkładu błędów przyjąć funkcję

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \quad (4)$$

gdzie h jest stałą związaną z precyzją pomiaru.

Jako ciekawostkę można dodać, że w oryginalnym zapisie dzieła znajduje się wzór (bez nawiasów i znaku potęgowego)

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} \quad (5)$$

Powyższy zapis to postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (krzywej dzwonowej).

W omawianym dziele znajdujemy również zapis równań błędów podobny do zapisu różniczki zupełnej, w postaci sumy składowych poprzedzonych pochodnymi cząstkowymi. Jest to pierwotny zapis prawa propagacji błędów.

W 1810 r. Laplace w swoim *Supplement au memoire* formułuje tezę, że jeżeli błąd każdej obserwacji jest taki sam, to prawdopodobieństwo, iż błąd średniej n obserwacji będzie zawarty w granicach: $\pm rh/n$, jest równe

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int \exp\left[-\frac{k}{2k'} r^2\right] dr \quad (6)$$

gdzie h jest długością przedziału, wewnątrz którego zawarty jest błąd pojedynczej obserwacji. Prawdopodobieństwo błędów zawartego w granicach od $x = -h/2$ do $x = h/2$ autor oznacza $\phi(x/h)$ oraz definiuje, że

$$k = \int \phi\left(\frac{x}{h}\right) dx, \quad k' = \int \frac{x^2}{h^2} \phi\left(\frac{x}{h}\right) dx \quad (7)$$

Jako ciekawostkę można dodać, że w oryginale znajduje się inna postać zapisu powyższego wzoru całkowego (odwrócenie zapisu funkcji podcałkowej i użycie litery c do oznaczenia liczby e), tj.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int dr \cdot c^{-\frac{k}{2k'} r^2} \quad (8)$$

W ten sposób pojawiła się teza jednego z podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, a mianowicie centralnego twierdzenia granicznego.

Należy też dodać, że Laplace jeszcze w latach siedemdziesiątych XVIII stulecia sformułował trzy warunki dotyczące krzywej rozkładu błędów: ma być symetryczna względem wartości prawdziwej, gdyż obserwacje jednakowo odchylają się od niej w kierunku wartości większych, jak i mniejszych; przy oddalaniu się od wartości prawdziwej musi zdążać do zera, gdyż prawdopodobieństwo, że wartość obserwacji może być nieskończenie różna od wartości prawdziwej jest równe zero; pole powierzchni pod krzywą błędów musi liczbowo być równe jeden, gdyż pewne jest zdarzenie, że każda obserwacja zawarta jest pod tą krzywą. Takie kryteria spełnia oczywiście krzywa rozkładu normalnego, ale propozycję jej zastosowania do opisu rozkładu błędów pomiaru przedstawił dopiero Gauss (Laplace uważał początkowo, że takie kryteria może spełnić wiele funkcji, m.in. logarytmiczne, np. $e(x) = (1/2a) \cdot \log(a/|x|)$, gdzie $|x| \leq a$ – wnioskowanie z 1777 roku).

Historycznie zagadnienie wartości prawdziwej związanej z wynikiem pomiaru pojawia się w pracach prekursorów współczesnej metrologii. Już w XVIII wieku uświadamiano sobie, że żaden wynik pomiaru nie będzie zgodny z domniemaną wartością prawdziwą. Przy każdym pojedynczym pomiarze popełnia się pewien błąd wynikający z losowości odczytu wartości obserwacji. Pozostaje zatem zawsze pewna nieznaną różnicą między wartością obserwacji i jej wartością prawdziwą. Jednym z pierwszych myślicieli, który zastanawiał się nad kwestią rozkładu dla tej przypadkowej różnicy, czyli błędów pomiaru, był Thomas

Simpson (1710–1761). W 1757 roku, zastanawiając się nad kształtem krzywej błędów pomiaru, wywnioskował, że jeżeli błąd pomiaru zawiera się w granicach określonego odcinka, to wyniki pomiaru powinny się powtarzać proporcjonalnie do ciągu liczbowego: 1, 2, ..., n , ..., 2, 1, przyjmując wartości w obrębie tego przedziału. Było to pierwsze w historii wyobrażenie przebiegu funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędów pomiaru w postaci dyskretnej. Jak można się łatwo domyślić, miała ona postać trójkąta równoramiennego, dlatego rozkład trójkątny często nazywany jest rozkładem Simpsona.

Jednakże nie rozkład trójkątny, lecz rozkład normalny jest jednym z podstawowych rozkładów rachunku prawdopodobieństwa, służących do opisu krzywej błędów. Ze względu na powyższe okoliczności nosi on również nazwę rozkładu Laplace'a-Gaussa oraz stał się podstawą oceny wyniku pomiaru i jednym z założeń wykorzystywanych w teorii niepewności. Teoria ta bowiem zakłada, że każda obserwacja wywodzi się z populacji o rozkładzie normalnym. To oczywiście nie oznacza, że rozkład związany z wielkością mierzoną jest normalny. Należy go dopiero wyznaczyć, stosując metodę propagacji rozkładów wielkości wejściowych na podstawie modelu matematycznego wielkości wyjściowej [4].

Słuszność przyjęcia rozkładu normalnego dla danych doświadczalnych potwierdza również George Biddell Airy (1801–1892) w dziele pt. *On the algebraical and numerical theory of errors of observations and the combination of observations*, wydanym w 1875 roku.

3. Dzieło Airy

Kim był Sir George Airy? Na pewno osobą zasłużoną dla korony brytyjskiej: przewodniczący Royal Society, dyrektor Królewskiego Obserwatorium Astronomicznego w Greenwich, profesor Uniwersytetu Cambridge o niebagatelnych zasługach dla nauki, szczególnie optyki (jako odkrywca zjawiska astygmatyzmu i dyfrakcji). Podał opis matematyczny (funkcja Airy) zjawiska dyfrakcji na małym otworze, zwanego plamką Airy.

Airy, choć to nie wynika bezpośrednio z przytoczonego w pełnym brzmieniu tytułu jego pracy, był również prekursorem pojęcia niepewność (ang. *uncertainty*). Postuluje on rozumienie błędów pomiaru (ang. *error*) w kontekście niepewności pomiaru, używając pojęć *uncertain error* lub *uncertainty*. Przez niepewność błędów uważa każdą jego wartość, łącznie z przypadkiem, gdy może on być równy zero. Innymi słowy, błąd pomiaru dla Airy to zbiór jego wartości powtarzających się w danym pomiarze z określoną częstością. Z dzisiejszego punktu widzenia można powiedzieć, że błąd tworzy rozkład prawdopodobieństwa.

Na kartach swojej pracy autor stwierdza, że prawdopodobieństwo, iż błąd może znaleźć się w przedziale między określonym x a $x + \delta x$ wynosi

$$\frac{1}{c\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{c^2}} \cdot \delta x \quad (9)$$

Jak nietrudno się domyślić, powyższy wzór zawiera równanie krzywej dzwonek. W powyższym wzorze wystę-

puje parametr c , który autor nazywa *modulus* i definiuje go jako

$$c = \text{Error of Mean Square} \times 1,414214 \quad (10)$$

I tu nietrudno się domyślić, że *modulus* Airy jest równy iloczynowi błędu średniego kwadratowego i pierwiastka z dwóch. Dodatkowo, w konkluzji, autor nazywa wzór (9) prawem częstości błędu (ang. *Law of Frequency of Error*), które wyraża prawdopodobieństwo określonej wartości błędu zawartej w przedziale między x i $x + \delta x$. Jednocześnie stwierdza, że *modulus* jest stały dla określonego pomiaru, lecz inny dla różnych pomiarów. Z dzisiejszego punktu widzenia jest to oczywiste, gdyż dla każdej serii pomiarowej uzyskujemy określoną wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego, lecz możliwe są różne jego wartości dla każdej innej serii obserwacji.

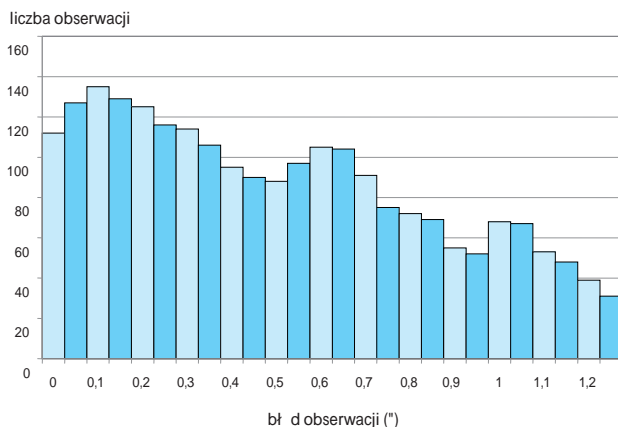
Istotnym wnioskowaniem Airy jest również twierdzenie, że w przypadku łączenia błędów pomiaru X i Y ich wspólny *modulus* podlega prawu

$$\text{square of modulus for } Z = \text{square of modulus for } X + \text{square of modulus for } Y \quad (11)$$

co jest równoznaczne z zapisem współczesnego równania niepewności pomiaru (sumowania wariancji) w postaci

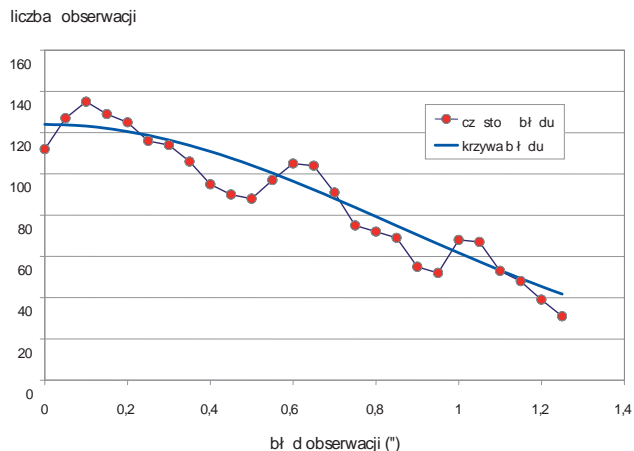
$$u^2(Z) = u^2(X) + u^2(Y) \quad (12)$$

Dodatkowym aspektem dzieła Airy jest również próba doświadczalnego zweryfikowania krzywej błędu. Opiera się tu na wynikach obserwacji położenia Gwiazdy Polarnej wykonywanych w Królewskim Obserwatorium Astronomicznym (Greenwich) w latach 1869–1873. Na podstawie zebranych wyników pomiaru autor oblicza średni błąd obserwacji. Wyznacza błędy wszystkich obserwacji i grupuje je w określonych przez siebie przedziałach wartości, a następnie oblicza, ile z tych wartości znajduje się w poszczególnych grupach. Tworzy w ten sposób histogram błędu pomiaru położenia kąтового Polaris, zmierzonego w tym obserwatorium. Na podstawie danych Airy można wyznaczyć histogram jak na rys. 1.



Rys. 1. Histogram błędu pomiaru położenia gwiazdy polarnej w Królewskim Obserwatorium Astronomicznym

Fig. 1. Histogram of measurement error of the position of the Polaris in the Royal Astronomical Observatory



Rys. 2. Eksperymentalny i teoretyczny rozkład błędu pomiaru położenia gwiazdy polarnej

Fig. 2. Experimental and theoretic measurement error distribution of the Polaris position

Dodatkowo autor pracy oblicza *modulus* i na podstawie tej wartości wyznacza dla każdego przedziału teoretyczną wartość częstości błędu. Uzyskane wyniki obliczeniowe zobrazowano na rys. 2.

Pewną ciekawostką językową, związaną z tą pracą Airy, jest to, że podobne obliczenia autor zaleca wykonywać osobie, którą nazywa *the computer*. Dziś trudno byłoby sobie wyobrazić wykonywanie obliczeń histogramu błędu pomiaru bez udziału komputera, szczególnie metodą Monte Carlo, zalecaną przy opracowaniu wyniku pomiaru przez najnowsze dokumenty tworzone przy udziale Międzynarodowego Biura Miar [4].

4. Podsumowanie

Trzy wymienione historyczne koncepcje procedur matematycznych tworzą podstawy współczesnej metrologii teoretycznej w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru. Powstały na wiele lat przed ich praktycznym zastosowaniem, i choć zostały przyjęte bez naukowego dowodzenia, świadczą o trafności wnioskowania. Powstały niemal w tym samym czasie, niezależnie w umysłach ich twórców, gdyż obieg informacji naukowej w początkach XIX wieku był bardzo ograniczony. Można sądzić, że autorzy rozwiązań, choć stworzyli nierozzerwalny łańcuch wnioskowań (centralne twierdzenie graniczne wymaga przyjęcia założenia o rozkładzie normalnym, a ten umożliwia rozwiązanie problemu propagacji błędów, które nie może się obejść bez metody najmniejszych kwadratów), to prawdopodobnie nie znali swoich prac. W tym krótkim czasie między rokiem 1805 i 1810 zbudowano podstawy niepewności pomiaru. Miało to miejsce w dobie romantyzmu, która aksjologicznie w nauce kojarzy się, nie bez przyczyny, z genialną intuicją.

Nie sposób w tym miejscu pominąć dzieła Airy, wydanego w 1875 roku, w którym autor postuluje używanie pojęcia *niepewność* przy wyrażaniu błędów obserwacji. Jest to o tyle znamienne, iż w roku tym społeczność międzynarodowa na mocy traktatu dyplomatycznego, zwanego Konwencją Metryczną, powołała do życia Międzynarodowe Biuro Miar, które dzisiaj patronuje metodyce opraco-

wania danych pomiarowych wyrażanej właśnie przez niepewność pomiaru.

Tak oto w roku 1875 rozpoczęto budowanie nowoczesnej metrologii, z jednej strony powołując do życia stabilną strukturę metrologiczną o zasięgu międzynarodowym na mocy Konwencji Metrycznej, a z drugiej wydając dzieło tworzące podstawy współczesnego sposobu wyrażania niepewności pomiaru, łącznie z użytym terminem. Współcześnie wydawane dokumenty pod egidą Międzynarodowego Biura Miar, dotyczące opracowania danych pomiarowych (*Evaluation of measurement data*) czerpią ideę z pracy Airy, rozwijając koncepcję opisu wielkości mierzonej (czyli menzurandu) w postaci zbioru możliwych dla niej wartości, przedstawianych w postaci numerycznie obliczanych rozkładów prawdopodobieństwa.

Bibliografia

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, International Organization for Standardization 1993, 1995 (corrected and reprinted).
2. *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*, BIPM JCGM 100:2008.
3. Stigler S.M.: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, The Belknap Press of Harvard University Press, 2003.
4. *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, BIPM JCGM 101:2008. ■

Historical sources of error theory and measurement uncertainty

Abstract: Historical basics of metrological conceptions concerning the evaluation of measurement data are presented. The method of least squares, law of error propagation and central limit theorem as a historical achievement are discussed. The inference treating measurement error as a histogram and expressing it as a uncertainty are completed. This approach was published in XIX century, and nowadays justifies expressing the measurement result as a measurand described by the probability distribution.

Keywords: error theory, measurement uncertainty

dr inż. Paweł Fotowicz

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 r. Do 1999 r. pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Warszawskiej, gdzie specjalizował się w problematyce laserowych technik pomiarowych, uzyskując sześć patentów. Od 1999 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się zagadnieniami teoretycznymi metrologii, głównie niepewnością pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji – referatów i artykułów w czasopismach krajowych i zagranicznych.

e-mail: uncert@gum.gov.pl



automatyka.pl

Cała branża
w zasięgu ręki



www.automatyka.pl

www.automatyka.pl to portal branżowy zbudowany na bazie informacji wprowadzanych przez zarejestrowane w nim firmy.

Dostarcza narzędzi pomocnych w odnalezieniu produktów i usług dla automatyki przemysłowej.