

mgr inż. Maciej Szumski  
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej PW

## PORÓWNANIE ALGORYTMÓW LINIOWEJ REGULACJI PREDYKCYJNEJ

*Referat zawiera porównanie algorytmów predykcyjnych stosowanych w układach regulacji temperatury systemu ogrzewania budynku. Badania wykonano na modelu fizycznym umieszczonym w komorze klimatycznej. Porównanie dotyczy algorytmu DMC z modelem w postaci odpowiedzi skokowej, algorytmu GPC z modelem transmitancyjnym oraz algorytmu MPC w dwóch wersjach: z obserwatorem stanu zbudowanym w oparciu o regułę Ackermanna oraz z filtrem Kalmana z zastosowaniem funkcji ortonormalnych.*

### COMPARISON OF LINEAR PREDICTION CONTROL ALGORITHMS

*This paper contains a comparison of several prediction algorithms used in temperature controllers within heating systems. Tests were conducted using a scale house model placed in an environmental chamber. The comparison includes a DMC algorithm with a unit step function model, a GPC algorithm with transmittance model and two MPC algorithm variations: one with state observer based on Ackermann's rule and one using Kalman filter utilizing orthonormal functions.*

## 1. OBIEKT REGULACJI

### 1.1. Obiekt fizyczny

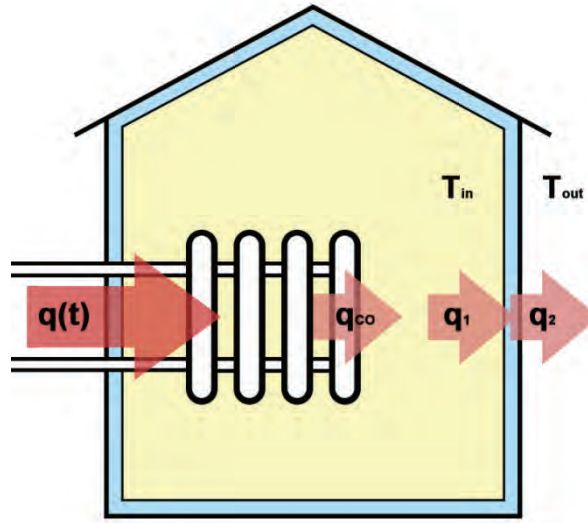
Obiektem wykorzystywanym w pracy jest model budynku ogrzewanego żarówkami (rys. 1). Moc żarówek jest sterowana w zakresie od zera do 100 %, czyli od 0 do 1 (łącznie trzy żarówki po 50 W). Do komputera sterującego są podłączone dwa precyzyjne termometry oporowe Pt 100 mierzące temperaturę wewnątrz modelu i na zewnątrz (pogoda). Ponadto mierzona jest wilgotność powietrza wewnątrz. Założyłem istnienie stałego opóźnienia w obiekcie, równego 20 s. Opóźnienie jest symulowane przez umieszczenie sterowań w kolejce FIFO o długości 20, przy czasie cyklu 1 s.



Rys. 1. Obiekt regulacji – model budynku ogrzewanego żarówkami

### 1.2. Liniowy model procesów wymiany ciepła

Przyjęto model o stałych skupionych (rys. 2). Jest to budynek do którego wpływa strumień energii w postaci ciepła  $q(t)$  przez instalację grzewczą. Budynek oddaje ciepło do otoczenia poprzez ściany.



Rys. 2. Model procesów wymiany ciepła

Strumień energii cieplnej przepływającej od czynnika grzewczego o temperaturze  $T_{CO}$  do wnętrza budynku

$$q_{CO}(t) = \frac{T_{CO}(t) - T_{in}(t)}{R_{CO}}$$

gdzie  $R_{CO}$  to rezystancja cieplna. Bilans energetyczny instalacji CO (centralnego ogrzewania)

$$C_{CO} \frac{dT_{CO}(t)}{dt} = q(t) - \frac{T_{CO}(t) - T_{in}(t)}{R_{CO}}$$

gdzie  $C_{CO}$  oznacza pojemność cieplną instalacji CO. Podobny bilans można napisać dla pojemności cieplnej wnętrza budynku  $C_{in}$  oraz pojemności cieplnej ścian zewnętrznych  $C_w$  :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{T_{in}(t) - T_w(t)}{R_1} & C_{in} \frac{dT_{in}(t)}{dt} &= \frac{T_{CO}(t) - T_{in}(t)}{R_{CO}} - \frac{T_{in}(t) - T_w(t)}{R_1} \\ q_2(t) &= \frac{T_w(t) - T_{out}(t)}{R_2} & C_w \frac{dT_w(t)}{dt} &= \frac{T_{in}(t) - T_w(t)}{R_1} - \frac{T_w(t) - T_{out}(t)}{R_2} \end{aligned}$$

Zakładając stałe wartości parametrów  $R_{CO}, R_1, R_2$  oraz  $C_{CO}, C_{in}, C_w$  wyznaczmy transmitancje operatorowe:

$$\begin{aligned} R_{CO}C_{CO}T_{CO}(s)s &= R_{CO}q(s) - T_{CO}(s) + T_{in}(s) \\ R_{CO}R_1C_{in}T_{in}(s)s &= R_1T_{CO}(s) - R_1T_{in}(s) - R_{CO}T_{in}(s) + R_{CO}T_w(s) \\ R_{CO}R_1C_wT_w(s)s &= R_1T_{in}(s) - R_1T_w(s) - R_{CO}T_w(s) + R_{CO}T_{out}(s) \end{aligned}$$

Proste przekształcenia prowadzą do równania postaci

$$T_{in}(1 + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_2s^2 + \tilde{a}_3s^3) = q(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1s) + T_{out}(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1s)$$

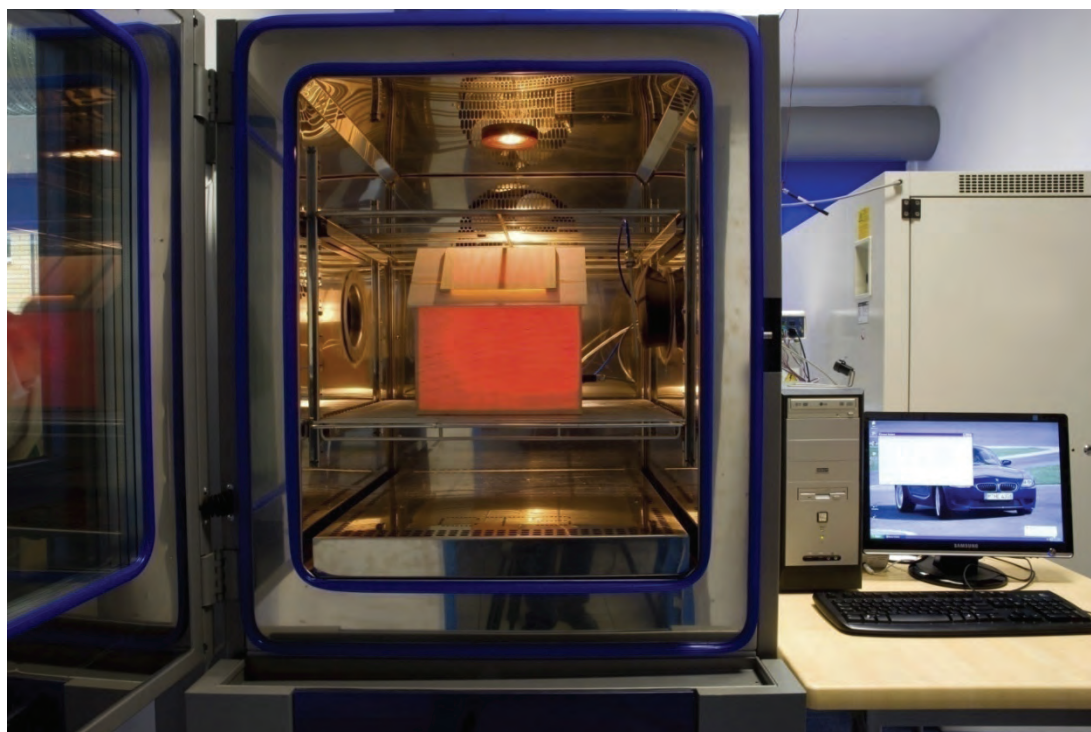
W dziedzinie czasu dyskretnego

$$T_{in}(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}) = q(b_0 + b_1z^{-1}) + T_{out}(c_0 + c_1z^{-1})$$

Równanie różnicowe

$$T_{in}(k) = -a_1 T_{in}(k-1) - a_2 T_{in}(k-2) - a_3 T_{in}(k-3) + b_0 q(k) + b_1 q(k-1) + c_0 T_{out}(k) + c_1 T_{out}(k-1)$$

Identyfikacja obiektu została wykonana metodą najmniejszych kwadratów na podstawie wyników uzyskanych w wyniku eksperymentu przeprowadzonego w komorze klimatycznej.



Rys. 3. Identyfikacja obiektu w komorze klimatycznej

## 2. FILTR KALMANA JAKO OBSERWATOR STANU

Obserwator stanu odtwarza stan obiektu na podstawie pomiarów wyjścia. Zaprojektujemy teraz filtr Kalmana, który będzie pełnił rolę obserwatora stanu. Jest to bardzo proste, gdyż nie wymaga rozwiązywania równań różniczkowych: macierze  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  uzyskane w wyniku identyfikacji są już rozwiązaniem, czyli:  $A_k = A_m$ ,  $B_k = B_m$ ,  $C = C_m$ . Macierz  $R_n = \sigma^2$  jest skalarem (mierzona jest tylko jedna wielkość). Należy wyznaczyć jedynie macierz

$$Q_k = \Phi_s \int_0^{T_s} A_k(\tau) Q A_k^T(\tau) d\tau$$

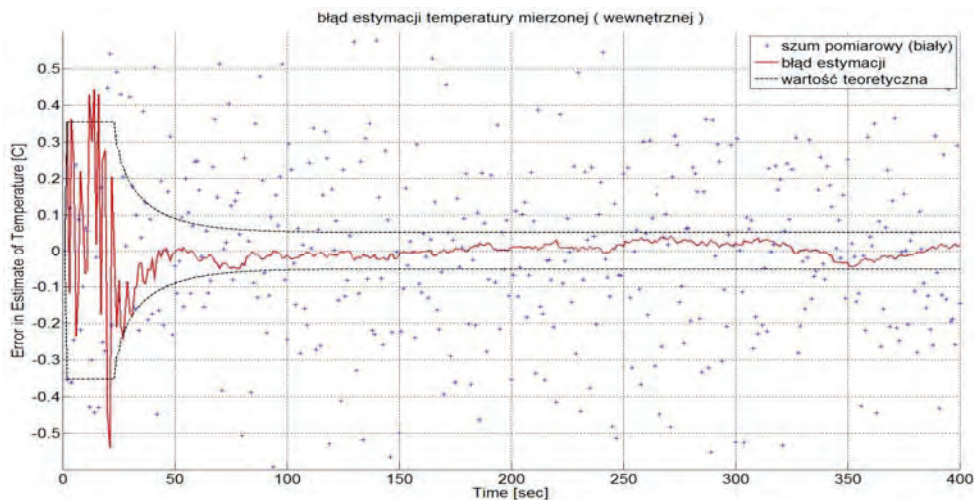
W tym celu musimy określić postać macierzy  $Q(t)$ . Zauważmy, że nasz obiekt jest trzeciego rzędu z opóźnieniem 20 s. To oznacza, że pierwsze trzy stany opisują stan obiektu, natomiast pozostałych 20 stanów opisuje opóźnienie. Dlatego niepewność wyznaczania stanów występuje tylko w stosunku do pierwszych trzech. W związku z powyższym przyjąłem, że macierz  $Q(t)$  jest zerowa z wyjątkiem trzech pierwszych elementów głównej przekątnej na których są jedynki. Wyznaczenie macierzy  $Q_k$  przebiega następująco:

$$A_k(\tau)QA_k^T(\tau) = \begin{bmatrix} a_1\tau & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2\tau & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3\tau & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1\tau & a_2\tau & a_3\tau & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_k(\tau)QA_k^T(\tau) = \begin{bmatrix} a_1^2\tau^2 + 1 & a_1a_2\tau^2 & a_1a_3\tau^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1a_2\tau^2 & a_2^2\tau^2 + 1 & a_2a_3\tau^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1a_3\tau^2 & a_2a_3\tau^2 & a_3^2\tau^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_k = \int_0^{T_s} A_k(\tau)QA_k^T(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{a_1^2T_s^3}{3} + T_s & \frac{a_1a_2T_s^3}{3} & \frac{a_1a_3T_s^3}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_1a_2T_s^3}{3} & \frac{a_2^2T_s^3}{3} + T_s & \frac{a_2a_3T_s^3}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_1a_3T_s^3}{3} & \frac{a_2a_3T_s^3}{3} & \frac{a_3^2T_s^3}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Na rys. 4 pokazano działanie filtru Kalmana: odchyłka estymaty mierzonej temperatury wewnętrznej w stosunku do wartości bez szumu. Linie przerywane oznaczają wartość teoretyczną odchyłki obliczoną jako pierwiastek elementu  $P_k(1,1)$  macierzy kowariancji. Pamiętając, że  $\sigma = 0,25 \text{ }^\circ\text{C}$  widać bardzo dobre działanie filtru Kalmana. Szerokość "korytarza" wyznaczonego przez linie przerywane zależy od dwóch parametrów: zwiększanie  $R_n = \sigma^2$  powoduje zawężenie: pomiar jest zaszumiony, filtr mniejszą wagę przywiązuje do pojedynczego wyniku pomiaru. Zwiększanie wartości parametru  $\Phi_s$  powoduje rozszerzenie korytarza: model jest mniej pewny dlatego pojedynczy pomiar jest brany z większą wagą. Oba parametry należy dobrać tak, aby nie dopuścić od stopniowego zawężania korytarza aż do wartości zerowej, gdyż wtedy filtr "zaśnie" i przestanie reagować na pomiary.



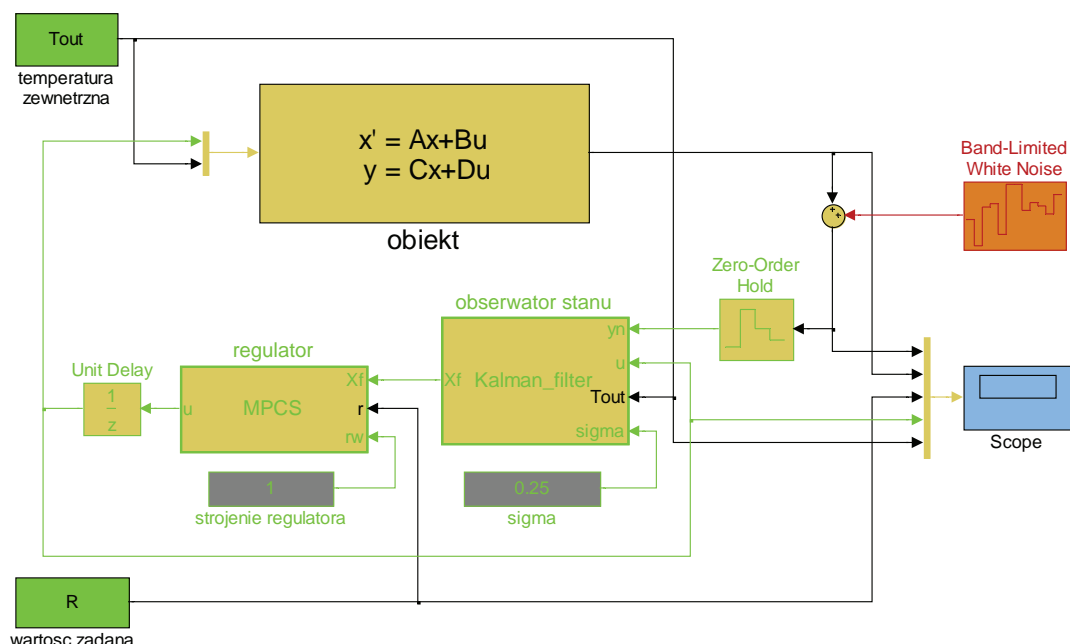
Rys. 4. Działanie filtru Kalmana: odchyłka estymaty mierzonej temperatury wewnętrznej w stosunku do wartości bez szumu



### 3. PORÓWNANIE ALGORYTMÓW PREDYKCYJNYCH

Porównanie dotyczy właściwości algorytmów predykcyjnych stosowanych do regulacji temperatury wewnętrznej budynku. Rozpatrywane algorytmy to: **MPCS** (ang. *Model Predictive Control with State equations*), **GPC** (ang. *Generalized Predictive Control*) oraz **DMC** (ang. *Dynamic Matrix Control*). Cechą charakterystyczną obiektów ogrzewanych są bardzo duże stałe czasowe: dynamika obiektu opisanego wcześniej, czyli czas ustalenia się odpowiedzi na skok jednostkowy to 3000 s (50 min). Konieczność rejestracji i późniejszej wizualizacji temperatur mierzonych zmusza do stosowania okresu próbkowania nie dłuższego niż jedna sekunda. W układach grzewczych stosowane są termometry przemysłowe o niepewności pomiaru od 0,1 °C do 0,5 °C wykonane z technicznie czystej platyny, a nie laboratoryjne o niepewności pomiaru 0,001 °C (platyna spektralnie czysta). Często są to termometry oporowe klasy B w postaci platyny napylonej na płytkę ceramiczną, które charakteryzują się bardzo dużym szumem pomiarowym. Termometry klasy A wykonane jako drut oporowy nawinięty na ceramicznym rdzeniu są dokładniejsze, ale znacznie droższe. Kolejne zagadnienie to złożoność obliczeniowa algorytmu. W rynku ciepłowniczym istnieje silna presja niskiej ceny, poszukujemy więc algorytmu który będzie mógł być wykonywany przez procesor o akceptowalnej cenie, czyli o umiarkowanej złożoności obliczeniowej.

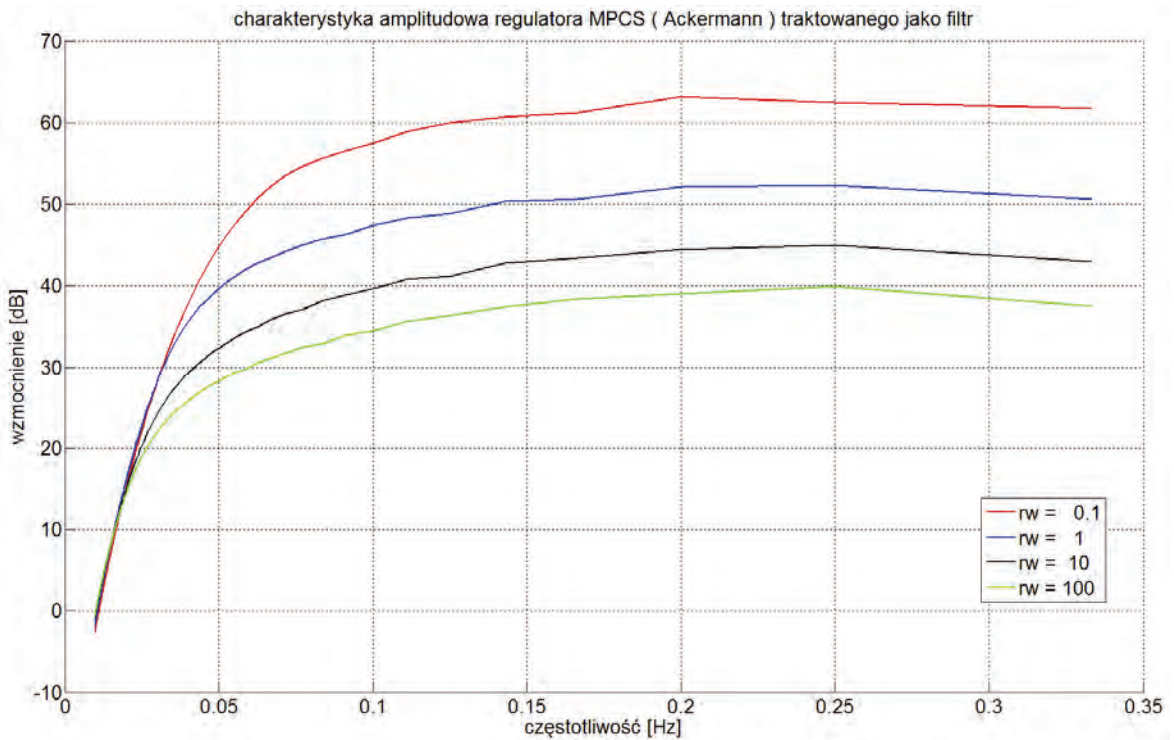
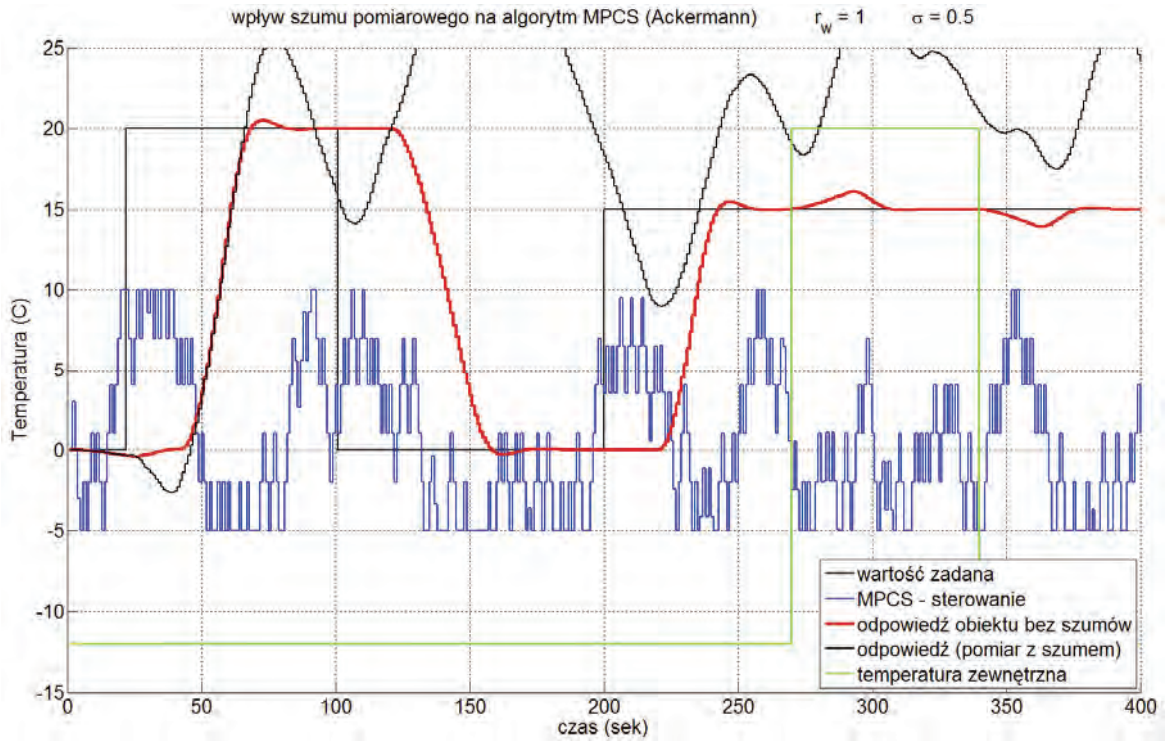
**Algorytm MPCS z modelem w postaci równań stanu.** Algorytm ten wymaga stosowania obserwatora stanu. Obiekt z jednym wyjściem pozwala na zastosowanie obserwatora uzyskanego zgodnie z regułą Ackermanna. Bardziej uniwersalnym rozwiązaniem jest zastosowanie filtra Kalmana. Układ regulacji pokazany jest na rys. 5.

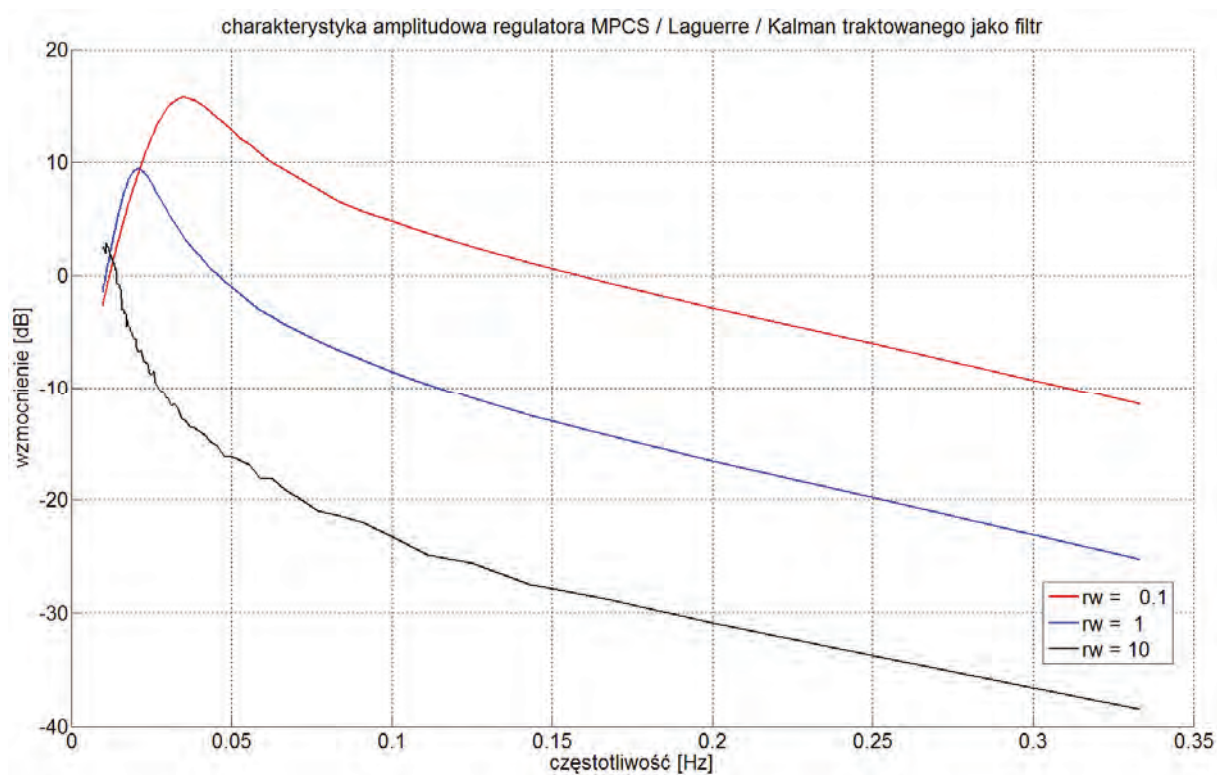
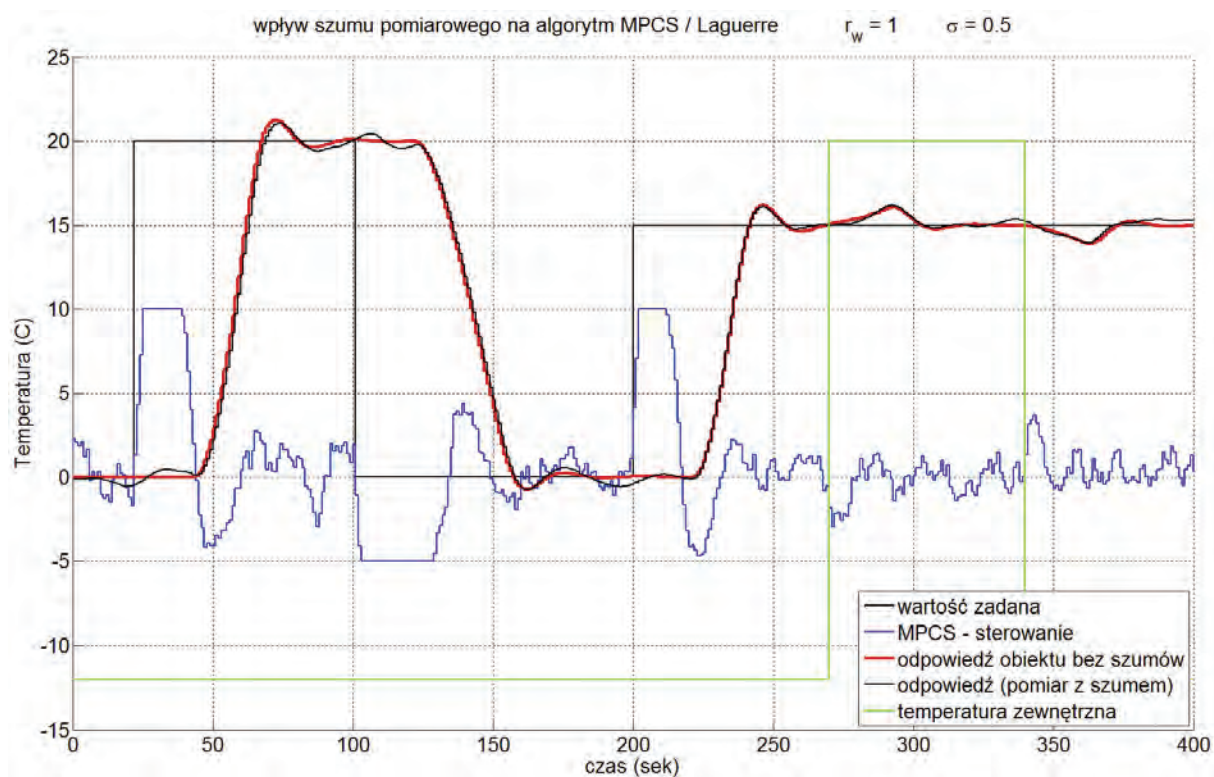


Rys. 5. Układ regulacji

Obiekt regulacji jest ciągły (linie czarne), okres próbkowania/interwencji regulatora to jedna sekunda (linie zielone). W układzie występuje zakłócenie mierzone, czyli temperatura zewnętrzna  $T_{out}$ . Regulator wraz z obserwatorem stanu może być traktowany jak filtr, którego wejściem jest zaszumiony sygnał mierzony, a wyjściem sterowanie, czyli wymuszenie obiektu. Porównamy dwa układy: regulator MPCS z obserwatorem stanu zbudowanym w oparciu o regułę Ackermanna oraz regulator MPCS z ortonormalnymi funkcjami Laguerre'a i filtrem Kalmana jako obserwatorem

stanu. Charakterystyka amplitudowa regulatora (z obserwatorem stanu) traktowanego jako filtr została wykonana metodą symulacji komputerowej: w miejsce generatora szumu został wstawiony generator sygnału  $\sin(\omega t)$ . Zakres częstotliwości tego sygnału jest ograniczony okresem próbkowania, zgodnie z twierdzeniem o próbkowaniu (Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon). Wyniki przedstawione są na rysunkach poniżej.





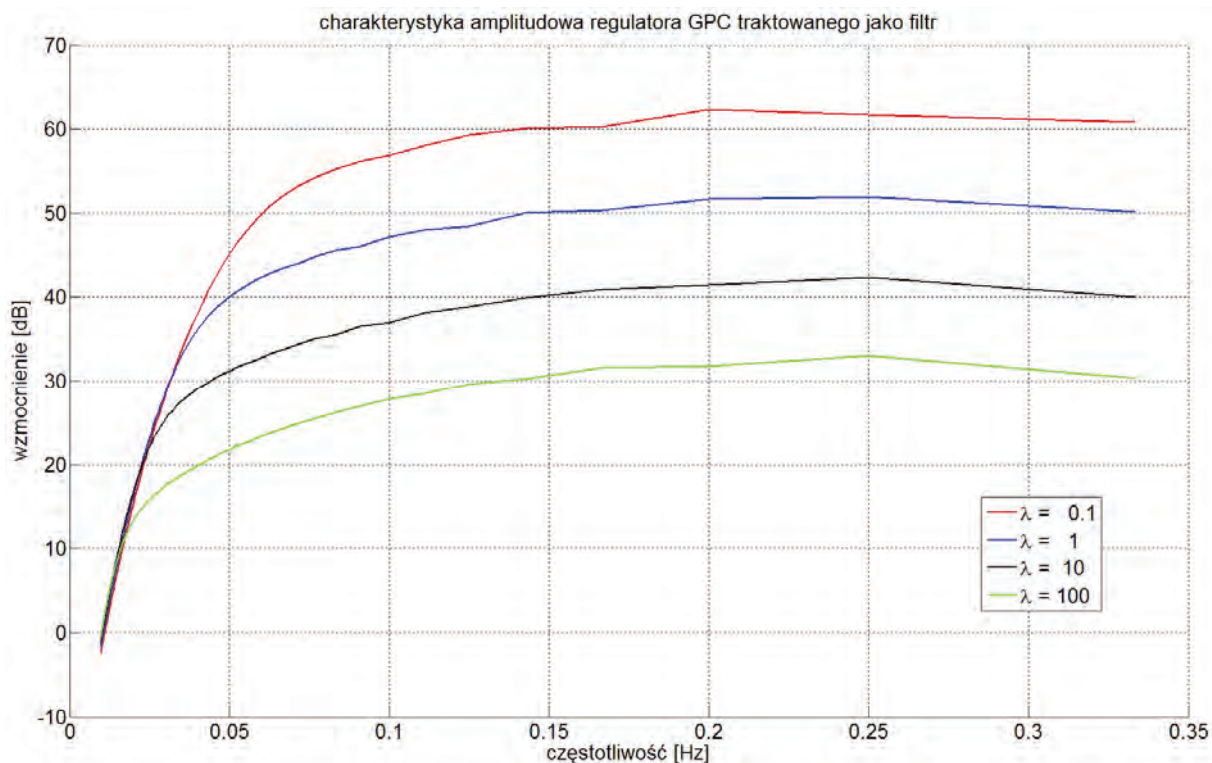
Rys. 6. Charakterystyki dla algorytmu MPC

Wykresy pokazują złe właściwości algorytmu MPC/Ackermann: szumy pomiarowe są silnie wzmacniane. Algorytm MPC/Kalman bardzo dobrze tłumy szumy pomiarowe, a szczególnie wyższe częstotliwości. Stopień tłumienia zależy od współczynnika kary za zmienność sterowania  $r_w$ , jednak nawet dla małych wartości  $r_w = 0,1$  to tłumienie jest dobre. Wynika to z właściwości filtru Kalmana, który jest adaptacyjnym filtrem Butterwortha i estymuje stan obiektu bez



wprowadzania dodatkowego opóźnienia, które jest charakterystyczne dla klasycznych filtrów dolnoprzepustowych.

**Algorytm GPC.** Charakterystyka regulatora GPC traktowanego jako filtr pokazana jest na rys. 7.



Rys. 7. Charakterystyka regulatora GPC traktowanego jako filtr

Regulator silnie wzmacnia szумы pomiarowe. Wymaga zastosowania dodatkowego filtra dolnoprzepustowego w torze pomiaru temperatury, jednak taki filtr wprowadza dodatkowe opóźnienie, co zawsze pogarsza jakość regulacji.

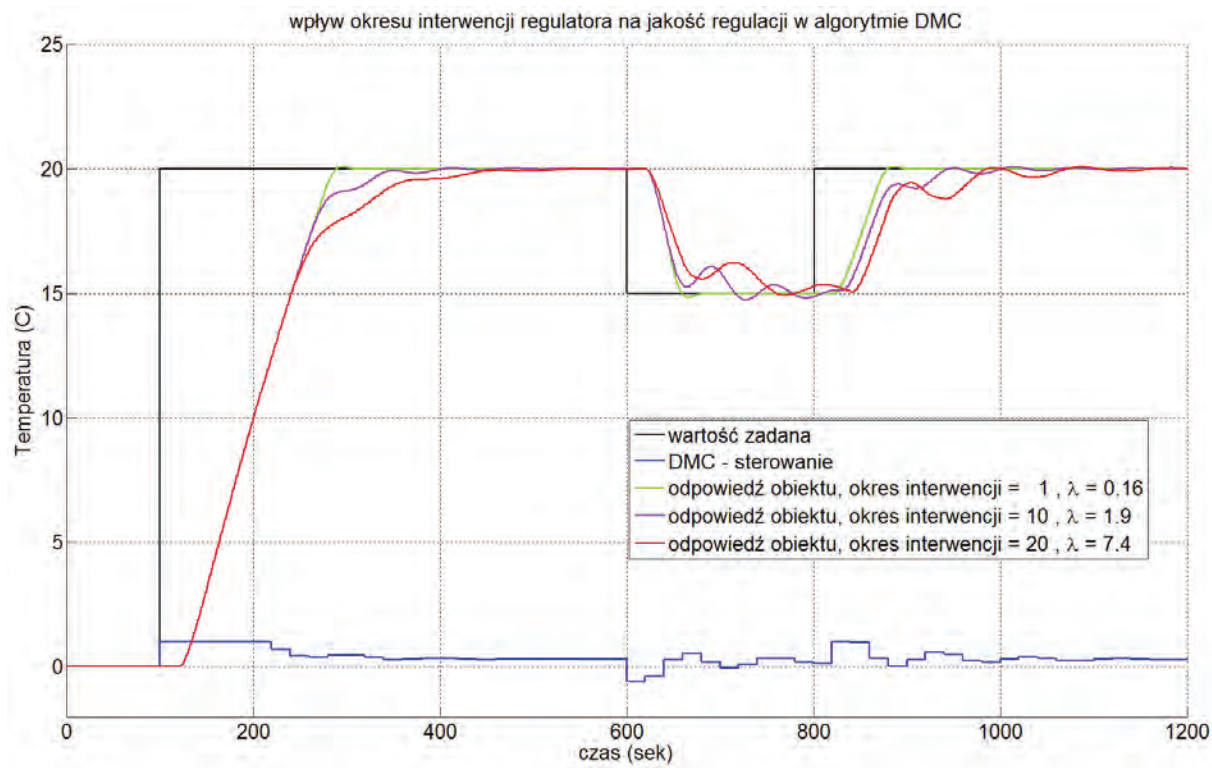
**Algorytm DMC.** Zastosowanie algorytmu DMC jest związane z utworzeniem macierzy dynamicznej, której wielkość jest równa liczbie próbek zebranych w okresie równym dynamiczności obiektu. W naszym przypadku jest to 3000 próbek, gdy okres interwencji regulatora przyjmiemy jako równy okresowi próbkowania i rejestracji temperatur mierzonych. Macierze dynamiczne  $M$  oraz  $M^P$  mają więc wielkość  $3000 \times 3000$  czyli każda zawiera dziewięć milionów elementów. W czasie tworzenia macierzy współczynników  $K = [M^T M + \lambda I]^{-1} M^T$  wykonywane jest odwracanie macierzy o wielkości  $3000 \times 3000$ . W celu określenia wydajności popularnych procesorów wykonano pomiar czasu odwracania macierzy o wielkości  $100 \times 100$  zawierającej liczby rzeczywiste zmiennoprzecinkowe typu *double* (8 bajtów).

procesor	konfiguracja	zegar [MHz]	czas [ms]
MOTOROLA ColdFire MCF5485	bez koprocatora VFP	200	54 731
	z koprocotorem VFP	200	3 292
NXP LPC3250 ARM9	z koprocotorem VFP	208	332
		266	259
		280	247
		300	231

VFP = Vector Floating Point



W celu zmniejszenia nakładu obliczeń możemy założyć, że interwencja regulatora będzie wykonywana co określoną liczbę okresów próbkowania, np. co 10 s (macierze dynamiczne  $M$  oraz  $M^P$  będą wtedy miały wielkość  $300 \times 300$ ) lub co 20 s (wielkość  $150 \times 150$ ). Niestety jakość regulacji ulega znacznemu pogorszeniu, co przedstawiono na rys. 8 (współczynniki  $\lambda$  zostały dobrane indywidualnie).



Rys. 8. Jakość regulacji dla algorytmu DMC

#### 4. PODSUMOWANIE

Podsumowanie cech algorytmów predykcyjnych stosowanych do liniowych obiektów grzewczych zawarte jest w tabeli:

	MPCS Ackermann	MPCS Laguerre Filtr Kalmana	GPC	DMC
odporność na szumy pomiarowe	bardzo zła	bardzo dobra	bardzo zła	zła
złożoność obliczeniowa na etapie tworzenia prawa regulacji	dobra	dobra	zła	bardzo zła
złożoność obliczeniowa w cyklu interwencji regulatora	dobra	dobra	bardzo dobra	zła

Inne zalety algorytmów:

**DMC** – bardzo proste tworzenie modelu liniowego.

**MPCS/Laguerre Kalman** – bardzo łatwe rozszerzenie do obiektów MIMO, bez istotnego wzrostu złożoności obliczeniowej.

Inne wady algorytmów:

**MPCS/Ackerman** – praktycznie do układów SISO, rozszerzenie do MISO związane ze znacznym wzrostem złożoności obliczeniowej. Nie może być stosowany w przypadku układów MIMO.

**MPCS/Laguerre Kalman** – wrażliwy na błędy numeryczne. Można to poprawić stosując metodę opisaną w [AndMo71].

**BIBLIOGRAFIA**

[AndMo71] Brian D.O. Anderson, John Barratt Moore *Linear Optimal Control* Prentice Hall, Hemel Hempstead, 1971

[CB99] E.F. Camacho, C. Bordons *Model Predictive Control* Springer 2003

[Mac02] J.M. Maciejowski *Predictive Control with Constraints* Prentice Hall 2002

[Ross03] J.A. Rossiter *Model-Based Predictive Control* CRC PRESS 2003

[Tat02] Piotr Tatjewski *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy* EXIT 2002

[Tat07] Piotr Tatjewski *Advanced Control of Industrial Processes. Structures and Algorithms* Springer 2007

[Wang08] Hugues Garnier, Liuping Wang *Identification of Continuous - time Models from Sampled Data* Springer 2008

[Wang09] Liuping Wang *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB* Springer 2009