mgr inż. Tomasz Kalinowski
Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB
prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny

ODPORNA STABILNOŚĆ RODZINY WIELOMIANÓW NIECAŁKOWITEGO STOPNIA O WSPÓŁCZYNNIKACH WIELOLINIOWO ZALEŻNYCH OD NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

W pracy rozpatrzono problem odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych niecałkowitego stopnia, których współczynniki zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów. Podano komputerowe metody badania odpornej stabilności. Proponowane metody bazują na warunku wykluczenia zera i na twierdzeniu o odwzorowaniu, znanych z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów całkowitych stopni. Rozważania zilustrowano przykładem.

ROBUST STABILITY OF FAMILLY OF FRACTIONAL DEGREE POLYNOMIALS WITH COEFICIENTS MULTILINARY DEPEDENT ON UNCERTAIN PARAMETERS

The paper considers the problem of robust stability of families of fractional degree characteristic polynomials with coefficients multilinearly dependent on uncertain parameters. Computer methods for checking of robust stability are given. The methods proposed are based on the Zero Exclusion Condition and on the Mapping Theorem known from the theory of robust stability of families of natural degree polynomials. The considerations are illustrated by example.

1. WSTĘP

W ostatnich latach teoria analizy i syntezy liniowych układów niecałkowitego rzędu jest intensywnie rozwijana w literaturze światowej, patrz np. [6] i cytowaną tam literaturę.

Problem badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów niecałkowitego rzędu był rozpatrywany w wielu pracach. Przegląd dotychczasowych metod oraz nowe rezultaty można znaleźć np. w pracach [2–9].

Warunki i metody badania odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych niecałkowitego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów zostały podane w pracach [4, 7–9].

W niniejszej pracy rozpatrzymy problem odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych niecałkowitego stopnia o wieloliniowej strukturze zależności współczynników od niepewnych parametrów i podamy komputerowe metody badania odpornej stabilności. W rozważaniach wykorzystamy rezultaty poprzednich prac autorów [7–9] oraz monografię [1]. Rozpatrywany problem nie był dotychczas analizowany w literaturze.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy liniowy dynamiczny układ ciągły niecałkowitego rzędu o niepewnych parametrach, którego wielomian charakterystyczny niecałkowitego stopnia ma postać

$$w(s,\boldsymbol{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\boldsymbol{q}) s^{\alpha_i}, \quad \boldsymbol{q} \in Q, \ (1)$$

gdzie $\boldsymbol{q}=[q_1,q_2,...,q_m]^{\mathrm{T}}$ jest wektorem niepewnych parametrów, m jest ich liczbą, współczynniki $a_i(\boldsymbol{q})$ ($i=0,1,...,n$) są wieloliniowymi ciągłymi funkcjami swoich argumentów zaś

$$Q=\{\boldsymbol{q}: q_k\in[q_k^-,q_k^+],\ q_k^-<q_k^+,\ k=1,2,...,m\} \quad (2)$$

jest zbiorem wartości niepewnych parametrów.

Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że liczby rzeczywiste α_i spełniają nierówności $\alpha_0=0<\alpha_1<...<\alpha_n$ oraz $a_n(\boldsymbol{q})>0,\ \forall \boldsymbol{q}\in Q$. Oznacza to, że dla każdego ustalonego $\boldsymbol{q}\in Q$ wielomian $w(s,\boldsymbol{q})$ ma stały stopień α_n.

Przypomnijmy (np. [1]), że funkcję $f(\boldsymbol{q})$ nazywamy wieloliniową, jeżeli jest ona liniowa ze względu na każdą zmienną q_i osobno, przy ustalonych wartościach wszystkich pozostałych zmiennych q_k, $k=1,2,...,m$, $k\neq i$. W przypadku dwóch zmiennych funkcję wieloliniową nazywamy funkcją biliniową.

Wielomian charakterystyczny (1) o niepewnych współczynnikach można napisać w postaci rodziny wielomianów

$$W(s,Q)=\{w(s,\boldsymbol{q}):\boldsymbol{q}\in Q\}. \quad (3)$$

Układ dynamiczny o wielomianie charakterystycznym (1) jest odpornie stabilny wtedy i tyko wtedy, gdy rodzina wielomianów (3) jest odpornie stabilna, tj. wielomian (1) ma wszystkie zera o ujemnych częściach rzeczywistych dla każdego ustalonego $\boldsymbol{q}\in Q$.

Problem badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (3) niecałkowitego stopnia o zależności wieloliniowej współczynników od niepewnych parametrów jest ogólniejszy i trudniejszy w porównaniu z problemem badania odpornej stabilności rodziny wielomianów o liniowej strukturze niepewności, rozpatrywanym w poprzednich pracach autorów [7–9]. W przypadku liniowej zależności, w zbiorze wartości niepewnych parametrów (2) istnieje podzbiór Q_t, zwany testującym, składający się ze wszystkich krawędzi tego zbioru. Odporna stabilność wielomianu $w(s,\boldsymbol{q})$ dla wszystkich $\boldsymbol{q}\in Q_t$ jest równoważna z odporną stabilnością badanej rodziny. Oznacza to, że warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności w przypadku liniowej struktury niepewności jest odporna stabilność wszystkich wielomianów krawędziowych, które odpowiadają krawędziom zbioru (2). Do sprawdzania ich odpornej stabilności mogą być wykorzystywane komputerowe metody podane w pracy [7], w której rozpatrywano problem badania odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów niecałkowitych stopni lub metody funkcji testujących podane w [9].

W przypadku rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów w sposób ogólniejszy niż liniowy nie da się określić zbioru testującego. W takim przypadku o odpornej stabilności mogą decydować wartości niepewnych parametrów położone nie tylko na krawędziach zbioru (2), ale również leżące w jego wnętrzu.

Celem pracy jest podanie komputerowych metod badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (3) niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów. Taki problem nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze. Do rozwiązania wykorzystamy rezultaty znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów całkowitego stopnia, podane w monografii [1].

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, \boldsymbol{q}_0)$ rodziny (3) jest wielomianem stabilnym, przy czym $\boldsymbol{q}_0 = [q_{10}, q_{20}, ..., q_{m0}]^{\mathrm{T}}$ jest wektorem nominalnych wartości niepewnych parametrów. Stabilność wielomianu nominalnego jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności rodziny (3).

Zbiór (2) jest m-wymiarowym hiperprostopadłościanem. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków $\boldsymbol{q}_k = [\hat{q}_1, \hat{q}_2, ..., \hat{q}_m]^{\mathrm{T}}$, gdzie $\hat{q}_r = q_r^-$ lub $\hat{q}_r = q_r^+$, $r = 1,2,...,m$.

Każdemu wierzchołkowi ,$\boldsymbol{q}_k$, $k = 1,2,...,K$ zbioru (2) w zbiorze wielomianów (3) odpowiada wielomian wierzchołkowy

$$p_k(s) = w(s, \boldsymbol{q}_k) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\boldsymbol{q}_k) s^i. \quad (4)$$

Dla każdej ustalonej liczby zespolonej z zbiór

$$w(z, Q) = \{w(z, \boldsymbol{q}) : \boldsymbol{q} \in Q\} \quad (5)$$

będziemy nazywać zbiorem wartości rodziny wielomianów (3).

Niech dla ustalonej liczby zespolonej z

$$c(z, Q) = \operatorname{conv}\{p_k(z),\ k = 1,2,...,K\} \quad (6)$$

oznacza wypukły wielobok rozpięty na punktach $p_k(z)$, $k = 1,2,...,K$, będących wartościami dla $s = z$ wielomianów wierzchołkowych (4).

Do badania odpornej stabilności rodziny (3) wielomianów o współczynnikach będących ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, stopnia całkowitego lub niecałkowitego, można stosować poniższe ogólne twierdzenie, np. [1, 7–9].

Twierdzenie 1. Rodzina (3) wielomianów stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, \boldsymbol{q}_0)$ jest stabilny i jest spełniony warunek

$$0 \notin w(j\omega, Q) \quad \forall \omega \geq 0, \quad (7)$$

zwany warunkiem wykluczenia zera.

Spełnienie warunku (7) oznacza, że dla każdego zespolonego $z = j\omega$ $(\omega \geq 0)$ z brzegu obszaru stabilności, początek układu współrzędnych leży na płaszczyźnie zmiennej zespolonej na zewnątrz zbioru wartości (5).

Jeżeli współczynniki wielomianu (1) stopnia całkowitego lub niecałkowitego zależą liniowo od niepewnych parametrów, to dla każdego zespolonego z zbiór wartości (5) jest wypukłym wielobokiem (6), tzn. $w(z, Q) = c(z, Q)$. W takim przypadku do badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (3) służy twierdzenie krawędziowe [1, 8]. Zgodnie z tym twierdzeniem, rodzina wielomianów (3) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne wszystkie wielomiany krawędziowe, odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q. Oznacza to, że w zbiorze Q istnieje podzbiór testujący złożony z krawędzi tego zbioru.

W przypadku, gdy współczynniki wielomianu (1) całkowitego stopnia zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów, w zbiorze Q nie da się określić podzbioru testującego [1]. Można pokazać, że powyższe zachodzi też dla rodziny wielomianów niecałkowitego stopnia. W takim przypadku brzegi zbioru wartości (5) składają się nie tylko z odcinków linii prostych, ale też z odcinków krzywoliniowych, będących odwzorowaniem za pomocą funkcji $w(j\omega,\boldsymbol{q})$ punktów wewnętrznych zbioru Q. Dlatego też bezpośrednie sprawdzenie warunku (7) dla rodziny (3) o wieloliniowej strukturze niepewności nie jest sprawą prostą.

Do sformułowania warunków odpornej stabilności rodziny wielomianów (3) o wieloliniowej strukturze niepewności wykorzystamy tzw. twierdzenie o odwzorowaniu, udowodnione w pracy [10] (patrz też [1]) w przypadku rodziny wielomianów całkowitego stopnia. Twierdzenie to jest też słuszne w przypadku rodziny wielomianów niecałkowitego stopnia.

Twierdzenie 2 (o odwzorowaniu). Jeśli współczynniki wielomianu (1) zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów, to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi zależność

$$w(z,Q) \subset c(z,Q) \quad (8)$$

lub równoważnie

$$\mathrm{conv}(w(z,Q)) = c(z,Q) \quad (9)$$

przy czym $w(z,Q)$ (5) jest zbiorem wartości rodziny wielomianów (3), zaś $c(z,Q)$ jest wypukłą powłoką tego zbioru.

Z twierdzeń 1 i 2 wynika następujący warunek dostateczny odpornej stabilności.

Twierdzenie 3. Rodzina (3) wielomianów stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli wielomian nominalny $w_0(s) = w(s,\boldsymbol{q}_0)$ jest stabilny i jest spełniony warunek

$$0 \notin c(j\omega,Q), \ \ \forall\omega \geq 0. \quad (10)$$

Przy badaniu odpornej stabilności na bazie twierdzeń 1 i 3 mogą wystąpić istotne trudności związane z faktem, że przy $\omega \to \infty$ zbiór wartości $w(j\omega,Q)$ i wypukły wielobok $c(j\omega,Q)$ dążąc do nieskończoności przyjmując coraz większe wymiary. Z tego powodu, podobnie jak w przypadku rodziny wielomianów całkowitego stopnia [1], wygodnie jest sformułować warunki odpornej stabilności w odniesieniu do unormowanego zbioru wartości.

Zgodnie z przyjętym założeniem, wielomian nominalny $w_0(s) = w(s,\boldsymbol{q}_0)$ rodziny (3) jest wielomianem stabilnym. Można go napisać w postaci

$$w_0(s) = w(s,\boldsymbol{q}_0) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\boldsymbol{q}_0)s^{\alpha_i}, \quad (11)$$

gdzie $\boldsymbol{q}_0 = [q_{10}, q_{20}, ..., q_{m0}]^{\mathrm{T}}$ jest wektorem nominalnych wartości niepewnych parametrów.

Stabilność wielomianu (11) można sprawdzić stosując poniższy lemat, udowodniony w [2].

Lemat 1. Wielomian (11) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\psi(j\omega) = \frac{w_0(j\omega)}{w_{odn}(j\omega)} \quad (12)$$

przy ω zmieniającym się od 0 do ∞ nie okrąża początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego, przy czym $w_{odn}(s)$ jest stabilnym wielomianem odniesienia niecałkowitego stopnia równego stopniowi wielomianu (11).

Wielomian ten można wybrać np. w postaci [2]

$$w_{odn}(s) = d(s+c)^{\alpha_n}, \quad (13)$$

gdzie stałe c i d są dodatnie, przy czym można przyjąć $d = a_n(\boldsymbol{q}_0)$

Niech z będzie ustaloną liczbą zespoloną. Unormowanym (względem $w_0(z)$) zbiorem wartości rodziny (3) będziemy nazywać zbiór o postaci

$$\tilde{w}(z,Q) = \{\tilde{w}(z,\boldsymbol{q}) : \boldsymbol{q} \in Q\}, \quad (14)$$

gdzie

$$\tilde{w}(z,\boldsymbol{q}) = w(z,\boldsymbol{q}) / w_0(z), \quad (15)$$

przy czym $w_0(z) \neq 0$ dla $z = j\omega$, $\omega \geq 0$, bowiem $w_0(s) = w(s,\boldsymbol{q}_0)$ jest z założenia stabilnym wielomianem nominalnym.

Dla ustalonej liczby zespolonej z unormowany wypukły wielobok (6) można zdefiniować następująco

$$\tilde{c}(z,Q) = \mathrm{conv}\{\tilde{p}_k(z),\ k = 1,2,\ldots,K\}. \quad (16)$$

Jest on rozpięty na punktach będących wartościami dla $s = z$ unormowanych wielomianów wierzchołkowych

$$\tilde{p}_k(s) = p_k(s) / w_0(s). \quad (17)$$

Z powyższego i twierdzenia o odwzorowaniu 2 wynika, że

$$\tilde{w}(z,Q) \subset \tilde{c}(z,Q). \quad (18)$$

Uwzględniając powyższe rozważania i uogólniając twierdzenia 1 i 3 otrzymamy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 4. Rodzina (3) wielomianów stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian nominalny $w_0(s) = w(s,\boldsymbol{q}_0)$ jest stabilny i jest spełniony warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości, o postaci

$$0 \notin \tilde{w}(j\omega,Q), \quad \forall\omega \geq 0. \quad (19)$$

Twierdzenie 5. Rodzina (3) wielomianów stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli wielomian nominalny $w_0(s) = w(s,\boldsymbol{q}_0)$ jest stabilny i jest spełniony warunek

$$0 \notin \tilde{c}(j\omega,Q), \quad \forall\omega \geq 0. \quad (20)$$

Niech

$$\tilde{p}_{rk}(s,\lambda) = (1-\lambda)\tilde{p}_r(s) + \lambda\tilde{p}_k(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0,1], \quad (21)$$

będzie wypukłą kombinacja dwóch unormowanych wielomianów wierzchołkowych (17).

Zbiór wszystkich takich kombinacji można zdefiniować jako

$$P(s,\Lambda)=\{p_{rk}(s,\lambda):\lambda\in[0,1];\, r,k=1,2,\ldots,K=2^m,\, r<k\}. \quad (22)$$

Ze wzoru (16) wynika, że dla $s=z$ krawędzie wypukłego wieloboku $\widetilde{c}(z,Q)$ są odcinkami linii prostych $\widetilde{p}_{rk}(z,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$, przy czym w przypadku ogólnym nie każdy taki odcinek jest krawędzią wieloboku $\widetilde{c}(z,Q)$. Zbiór krawędzi wieloboku $\widetilde{c}(z,Q)$ jest więc podzbiorem zbioru złożonego ze wszystkich odcinków $\widetilde{p}_{rk}(z,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$, $r,k=1,2,\ldots,K=2^m, r<k$.

Z powyższego wynika, że krawędzie zbioru $\widetilde{c}(z,Q)$ są odwzorowaniami dla $s=z$ nie tylko krawędzi zbioru Q (2), ale też jego przekątnych. Słuszny jest więc poniższy lemat.

Lemat 2. Rodzina wielomianów stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli wszystkie kombinacje (21) wielomianów należących do zbioru (22) są odpornie stabilne.

Do badania odpornej stabilności poszczególnych wielomianów (21) należących do zbioru (22) można stosować podane w pracach [4, 7] metody badania odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów niecałkowitego stopnia. Można też stosować metody funkcji testujących podane w pracy [9], które umożliwiają jednoczesne badanie odpornej stabilności wszystkich wielomianów (21) należących do zbioru (22).

Uwzględniając [9], odpowiednie warunki odpornej stabilności można sformułować w postaci poniższych lematów.

Lemat 3. Rodzina wielomianów (3) stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli wielomian nominalny $w_0(s)$ jest stabilny i jest spełniony warunek

$$d(\omega)>0,\ \forall\omega\in\Omega=[0,\infty), \quad (23)$$

gdzie funkcję testującą $d(\omega)$ wyznacza się ze wzoru

$$d(\omega)=\max\{U^-(\omega),\,-U^+(\omega),\,V^-(\omega),\,-V^+(\omega)\}, \quad (24)$$

przy czym

$$U^-(\omega)=\min\{\mathrm{Re}\,\widetilde{p}_k(j\omega),\, k=1,2,\ldots,K\},\quad U^+(\omega)=\max\{\mathrm{Re}\,\widetilde{p}_k(j\omega),\, k=1,2,\ldots,K\}, \quad (25a)$$

$$V^-(\omega)=\min\{\mathrm{Im}\,\widetilde{p}_k(j\omega),\, k=1,2,\ldots,K\},\quad V^+(\omega)=\max\{\mathrm{Im}\,\widetilde{p}_k(j\omega),\, k=1,2,\ldots,K\}, \quad (25b)$$

przy czym $\widetilde{p}_k(j\omega)$ oblicza się ze wzoru (17) dla $s=j\omega$.

Lemat 4. Rodzina wielomianów (3) stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli wielomian nominalny $w_0(s)$ jest stabilny i jest spełniony warunek

$$B(\omega)>0,\ \forall\omega\in\Omega, \quad (26)$$

gdzie

$$B(\omega)=\min\{\mathrm{Re}\,\widetilde{p}_k(j\omega),\, k=1,2,\ldots,K\}. \quad (27)$$

Lemat 5. Rodzina wielomianów (3) stałego niecałkowitego stopnia o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli wielomian nominalny $w_0(s)$ jest stabilny i jest spełniony warunek

$$F(\omega) > 0, \ \forall \omega \in \Omega, \quad (28)$$

gdzie dla ustalonego $\omega \in \Omega$ funkcję $F(\omega)$ oblicza się ze wzoru

$$F(\omega) = \pi - \max_{r,k}\{|\arg \tilde{p}_r(j\omega) - \arg \tilde{p}_k(j\omega)| : r,k = 1,2,...,K, \ r < k\}, \quad (29)$$

przy czym $\arg z \in [-\pi, \pi)$ jest argumentem liczby zespolonej z.

Podsumowując powyższe rozważania można stwierdzić, że:

- wypukły wielobok (16) w przypadku ogólnym jest nadmiarowy w stosunku do zbioru wartości (14), tj. zachodzi warunek (18). Zatem spełnienie warunku wykluczenia zera (20) jest tylko wystarczające do spełnienia warunku wykluczenia zera (19),
- metody funkcji testujących bazują głównie na warunkach dostatecznych spełnienia warunku (20), a więc warunki podane w lematach 3, 4 i 5 są najczęściej mocnymi warunkami dostatecznymi odpornej stabilności rozpatrywanej rodziny wielomianów.

Celem osłabienia tych warunków można zastosować podejście znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów całkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, opisane w [1]. W tym podejściu konstruuje się inny wielobok, nie koniecznie wypukły, który dla wszystkich zespolonych z dokładniej aproksymuje zbiór wartości (14) rodziny (3). Taki wielobok można otrzymać dzieląc zbiór Q na podzbiory Q_i i dokonując aproksymacji każdego z podzbiorów $\tilde{w}(z, Q_i)$ za pomocą wypukłego wieloboku $\tilde{c}(z, Q_i)$.

4. PRZYKŁAD

Należy zbadać odporną stabilność wielomianu niecałkowitego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, o postaci

$$w(s,q) = 2q_1q_2s^3 + (q_1 + 3q_2)s^{9/7} + (1.25 + q_1 + q_2)s^{7/6} + s + 5, \quad \boldsymbol{q} \in Q, \quad (30)$$

przy czym zbiór wartości niepewnych parametrów

$$Q = \{\boldsymbol{q} = [q_1, q_2]^{\mathrm{T}} : q_1 \in [0.5, 5], \ q_2 \in [0.5, 3]\} \quad (31)$$

jest na płaszczyźnie (q_1, q_2) jest prostokątem o wierzchołkach

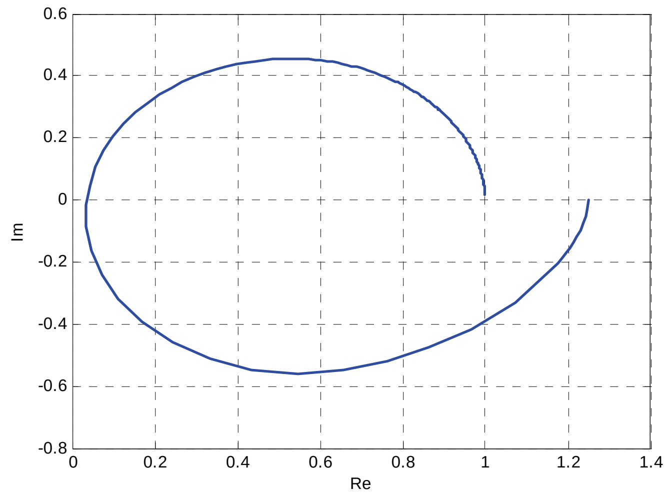
$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \ q_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{q}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Za nominalne wartości niepewnych parametrów przyjmijmy $q_{10} = 2$, $q_{20} = 1$. Wielomian nominalny ma zatem postać

$$w_0(s) = 4s^3 + 5s^{9/7} + 4.25s^{7/6} + s + 5. \quad (33)$$

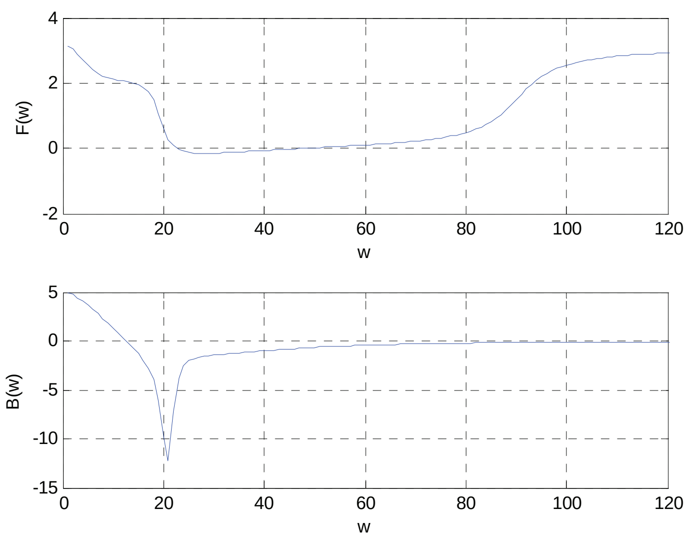
Do badania stabilności wielomianu nominalnego (38) zastosujemy lemat 1 przyjmując wielomian odniesienia o postaci $w_{odn}(s) = 4(s+1)^3$.

Wykres funkcji (12), wyznaczony dla wartości parametru ω zmieniających się w przedziale $[0,200]$ ze zmiennym krokiem, jest pokazany na rys.1. Dąży on do punktu $(1, j0)$ przy $\omega \to \infty$. Wykres nie obejmuje początku układu współrzędnych, co oznacza, że wielomian nominalny (33) jest stabilny, zgodnie z lematem 1.



Rys. 1. Wykres funkcji (12)

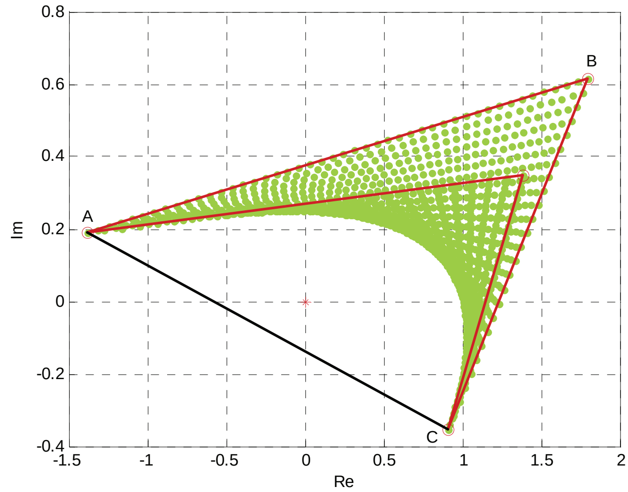
Do badania odpornej stabilności rozpatrywanej rodziny wielomianów zastosujemy metody funkcji testujących. Wyznaczając wykresy funkcji $F(\omega)$ (29) i $B(\omega)$ (27) otrzymamy przebiegi pokazane na rys.unku 2.



Rys. 2. Wykresy funkcji testujących $F(\omega)$ i $B(\omega)$

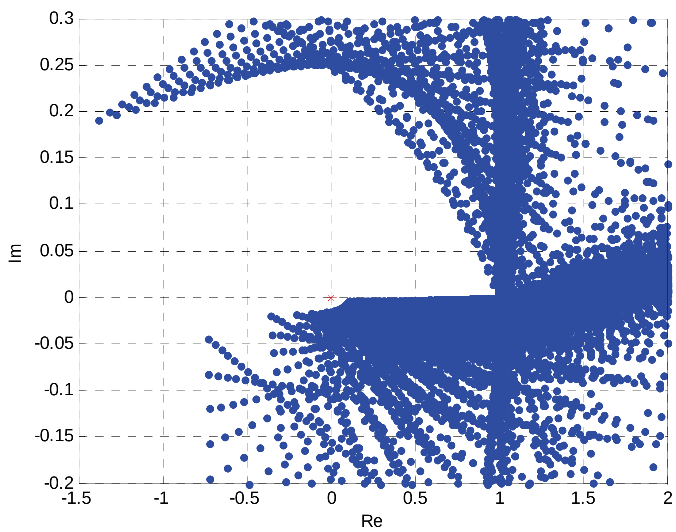
Z rysunku 2 wynika, że warunki lematów 4 i 5 nie są spełnione i o odpornej stabilności rozpatrywanej rodziny wielomianów nic nie można powiedzieć.

Unormowany zbiór wartości (14) oraz wypukły wielobok (16) dla $s = z = j1$ są pokazane na rysunku 3. Zbiór $\tilde{w}(j1, Q)$ został wyznaczony metodą siatki przy dyskretyzacji wartości parametru $q_1 \in [0.5, 5]$ z krokiem $\Delta q_1 = 0.1$ oraz wartości parametru $q_2 \in [0.5, 3]$ z krokiem $\Delta q_2 = 0.1$. Brzegi prostokąta (31) zostały odwzorowane w odcinki linii prostych zaznaczone kolorem czerwonym. Natomiast odcinek zaznaczony czarną linią przerywana jest odwzorowaniem jednej z przekątnych prostokąta (31). Zauważmy, że dla $s = j1$ warunek (19) jest spełniony, natomiast nie jest spełniony warunek (20), bowiem wielobok $\tilde{c}(j1,Q)$ jest mocno nadmiarowy w stosunku do zbioru $\tilde{w}(j1,Q)$.



Rys. 3. Unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(j1,Q)$ (obszar zakropkowany) i zbiór $\tilde{c}(j1,Q)$ (wielobok o wierzchołkach A, B i C)

Przeanalizujemy teraz problem odpornej stabilności wielomianu (30) sprawdzając graficznie, z zastosowaniem metody siatki, spełnienie warunku wykluczenia zera (19). Wyznaczając zbiór $\tilde{w}(j\omega,Q)$ dla wartości parametru ω zmieniających się w przedziale $[0,10]$ z krokiem $\Delta\omega = 0.25$ (przy dyskretyzacji wartości niepewnych parametrów jak w przypadku zbioru $\tilde{w}(j1,Q)$) i analizując jego położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w pobliżu początku układu współrzędnych, otrzymamy wykresy pokazane na rysunku 4. Z rysunku 4 wynika, że początek układu współrzędnych leży na zewnątrz unormowanego zbioru wartości przy $\omega \in [0,10]$. Można sprawdzić, że powyższe zachodzi też dla dowolnego $\omega > 10$. Oznacza to, ze warunek wykluczenia zera (19) jest spełniony i rozpatrywana rodzina wielomianów jest odpornie stabilna, zgodnie z twierdzeniem 4.



Rys. 4. Położenia zbioru $\tilde{w}(j\omega,Q)$, $\omega \in [0,10]$ w pobliżu początku układu współrzędnych

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych (3) niecałkowitego stopnia o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. Podano komputerowe metody badania odpornej stabilności. Wykorzystano przy tym rezultaty znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów całkowitych stopni oraz poprzednie prace autorów [3, 6–9]. Rozpatrywano w nich układy, których wielomiany charakterystyczne miały niecałkowity stopień współmierny. Natomiast w niniejszej pracy rozpatrzono rodziny wielomianów stopni niecałkowitych niewspółmiernych. Rezultaty z zakresu stabilności wielomianów stopni niecałkowitych współmiernych pozostają bowiem słuszne (z pewnymi oczywistymi modyfikacjami) w przypadku wielomianów stopni niecałkowitych niewspółmiernych, np. [4].

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007–2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
2. Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems. W: Malinowski K., Rutkowski L. (Eds): Recent Advances in Control and Automation, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, pp. 83–92.
3. Busłowicz M.: Stabilność liniowych ciągłych układów ułamkowych rzędu współmiernego. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2008, str. 475–484 (CD-ROM).
4. Busłowicz M.: Robust stability of convex combination of two fractional degree characteristic polynomials. Acta Mechanica et Automatica, 2008, vol. 2, No. 2, pp. 5–10.
5. Busłowicz M.: Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, 2009, vol. 3, No. 1, pp. 16–21.
6. Busłowicz M.: Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2010, str. 93–114 (CD-ROM).
7. Busłowicz M.: Kalinowski T.: Odporna stabilność liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru. Pomiary Automatyka Robotyka, 2 (2008), str. 465–474 (CD-ROM).
8. Busłowicz M., Kalinowski T.: Odporna stabilność ciągłych układów ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od niepewnych parametrów. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2009, str. 388–397 (CD-ROM).
9. Busłowicz M., Kalinowski T.: Badanie metodami funkcji testujących odpornej stabilności ciągłych układów ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od niepewnych parametrów. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2010, str. 406–415 (CD-ROM).
10. Zadeh L. A., Desoer C. A.: Linear Systems Theory – A State Space Approach. McGraw-Hill, New York 1963.