dr inż. Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka

PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ I DEGENERACJA OKREŚLONEJ KLASY DYNAMICZNYCH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

W artykule rozpatrzono problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji na przykładzie drugiego modelu typu Fornasiniego-Marchesiniego układu ciągło-dyskretnego (DMF-MCD). Podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dla przypadku gdy model ten jest układem standardowym oraz układem dodatnim. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

POINTWISE COMPLETENESS AND POINTWISE DEGENERACY OF A SPECIFIED CLASS OF CONTINUOUS-DISCRETE TIME DYNAMICAL SYSTEMS

The paper presents a problem of pointwise completeness and pointwise degeneracy of the standard and positive continuous-discrete time (hybrid) linear systems. The second Fornasini-Marchesini model (SF-MCDM) of the hybrid system has been considered. Two cases of SF-MCDM i.e. standard and positive have been analyzed. Definitions as well as necessary and sufficient conditions of pointwise completeness and pointwise degeneracy for this model have been given. Considerations are illustrated by numerical examples.

1. WSTĘP

Dynamiczny układ ciągło-dyskretny (hybrydowy) jest to układ, w którym macierzowe równanie stanu opisujące jego dynamikę składa się z równania różniczkowego (względem ciągłej zmiennej t) oraz równania różnicowego (względem dyskretnej zmiennej i). W układach tego rodzaju część reprezentująca dziedzinę ciągłą może opisywać np. dynamikę obwodu elektrycznego (uzyskaną w rezultacie stosowania podstawowych praw Kirchhoffa i Ohma) lub dynamikę reakcji chemicznej zachodzącej w mieszalniku. Część reprezentująca dziedzinę dyskretną opisuje natomiast zachowanie tego modelu np. przy przełączaniu pojemności w obwodzie elektrycznym lub odpowiednio przy przepływie substratów reakcji chemicznej.
Problematyka punktowej zupełności i punktowej degeneracji układu autonomicznego należy do podstawowych zagadnień teorii sterowania. Ogólnie punktowa zupełność układu oznacza, że możliwe jest osiągnięcie dowolnego zadanego stanu końcowego poprzez odpowiedni dobór warunków początkowych. Zagadnieniem przeciwnym do punktowej zupełności jest punktowa degeneracja. Punktowa zupełność i punktowa degeneracja jest od wielu lat [13] tematem licznych publikacji. Różne podejście do analizy tego problemu w odniesieniu do układów ciągłych jak i dyskretnych można znaleźć np. w pracach [1–3, 7–14] oraz cytowanej tam literaturze.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dla drugiego modelu Fornasiniego-Marchesiniego układu ciągło-dyskretnego. Zostanie rozpatrzony przypadek, gdy model ten jest układem dodatnim oraz układem standardowym (niedodatnim). G łówne definicje oraz kryteria dla rozpatrywanych klas układów zostaną uzyskane w wyniku uogólnienia rezultatów pracy [9].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech $\Re^{n\times m}$ ($\Re_+^{n\times m}$) będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych (nieujemnych) oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$ ($\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$). Zbiór liczb całkowitych oznaczać będziemy przez Z_+, przez I_n m acierz jednostkow ą wym iaru $n\times n$, za ś zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych przez $R_+ = [0,+\infty)$.

Weźmy pod uwag ę liniowy uk ład ci ągło-dyskretny opisany równaniem stanu w poni ższej postaci [5, 6]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t,i+1) &= A_0x(t,i)+A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1)+\\ &+B_0u(t,i)+B_1\dot{u}(t,i)+B_2u(t,i+1), \quad t\in R_+;\ i\in Z_+,\end{aligned} \tag{1}$$

przy czym $\dot{x}(t,i)=\dfrac{\partial x(t,i)}{\partial t}$, $x(t,i)\in\Re^n$, $u(t,i)\in\Re^m$, jest odpowiednio wektorem stanu i wymuszenia oraz $A_k\in\Re^{n\times n}$, $B_k\in\Re^{n\times m}$, $k=0,1,2$. Równanie stanu (1) jest równaniem różniczkowym względem (ciągłej) zmiennej $t\in R_+$ oraz równaniem różnicowym względem (dyskretnej) zmiennej $k\in Z_+$.
Warunki brzegowe dla (1) mają postać

$$\begin{aligned}&x(t,0)=x_{t0},\quad \dot{x}(t,0)=x_{t1},\quad t\in R_+\\ &x(0,i)=x_i,\quad i\in Z_+\end{aligned} \tag{2}$$

Równanie (1) opisuje tzw. *ogólny model układu ciągło-dyskretnego*. Podstawiaj ąc w (1) $B_1=B_2=0$ oraz $B_0=B$ otrzym amy *pierwszy model Fornasiniego-Marchesiniego układu ciągło-dyskretnego* [5, 6]

$$\dot{x}(t,i+1)=A_0x(t,i)+A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1)+Bu(t,i),\quad t\in R_+;\ i\in Z_+, \tag{3}$$

podstawiając natomiast $A_0=0$, $B_0=0$ otrzymamy *drugi model Fornasiniego-Marchesiniego układu ciągło-dyskretnego* [5, 6]

$$\dot{x}(t,i+1)=A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1)+B_1\dot{u}(t,i)+B_2u(t,i+1),\quad t\in R_+;\ i\in Z_+. \tag{4}$$

Do dalszych rozwa żań będziemy przyjm ować, że uk ład ci ągło-dyskretny (1) jest uk ładem autonomicznym (tj. bez dzia łania wym uszeń $u(t,i)=0$). Zauwa żmy, że w tym przypadku równanie stanu m odelu ogólnego (1) i równanie stanu pierwszego m odelu Fornasiniego-Marchesiniego (3) mają taką samą postać, tj.

$$\dot{x}(t,i+1)=A_0x(t,i)+A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1),\quad t\in R_+;\ i\in Z_+, \tag{5}$$

zaś równanie stanu drugiego modelu typu Fornasiniego-Marchesiniego ma formę

$$\dot{x}(t,i+1) = A_1\dot{x}(t,i) + A_2 x(t,i+1), \quad t \in R_+; i \in Z_+, \ (6)$$

przy czym warunki brzegowe mają postać (2). Dla uproszczenia zapisu układ opisany równaniem (6) będziemy oznaczać przez DMF-MCD.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dla drugiego modelu Fornasiniego-Marchesiniego układu ciągło-dyskretnego (6) (DMF-MCD). Zostanie rozpatrzony przypadek gdy model ten jest układem standardowym oraz układem dodatnim. Kryteria dla rozpatrywanej klasy układów ciągło-dyskretnych zostaną podane przy wykorzystaniu rezultatów pracy [9].

3. GŁÓWNY REZULTAT

3.1. Standardowy model DMF-MCD

Definicja 1. Układ standardowy DMF-MCD (6) nazywamy punktowo zupełnym w punkcie (t_f, q), jeżeli dla każdego zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re^n$ można tak dobrać warunki brzegowe (2), że $x(t_f, q) = x_f$.

Równanie (6) przy $i = 0$ możemy napisać w poniższej postaci

$$\dot{x}(t,1) = A_1\dot{x}(t,0) + A_2 x(t,1) = A_1 x_{t1} + A_2 x(t,1), \quad x_{t1} = \dot{x}(t,0), \ t \in R_+. \ (7)$$

Jeżeli $x_{t1} = 0$ wówczas $A_1\dot{x}(t,0) = A_1 x_{t1} = 0$ zaś z (7) otrzymamy

$$x(t,1) = e^{A_2 t} x(0,1). \ (8)$$

Dla $q = 1$ oraz $t = t_f$ (zgodnie z definicją 1) wzór (8) przyjmie postać

$$x_f = e^{A_2 t_f} x(0,1); \qquad x(0,1) = e^{-A_2 t_f} x_f. \ (9)$$

Podstawiając z kolei $i = 1$ do (6) otrzymamy

$$\dot{x}(t,2) = A_1\dot{x}(t,1) + A_2 x(t,2). \ (10)$$

Uwzględniając wzór (8) możemy równanie (10) napisać w poniższej formie

$$\dot{x}(t,2) = A_1 A_2 e^{A_2 t} x(0,1) + A_2 x(t,2). \ (11)$$

Jeżeli $x(0,1) = 0$ to z (11) mamy

$$x(t,2) = e^{A_2 t} x(0,2). \ (12)$$

Dla $q = 2$ oraz $t = t_f$ wzór (12) przyjmie postać

$$x_f = e^{A_2 t_f} x(0,2); \qquad x(0,2) = e^{-A_2 t_f} x_f. \ (13)$$

Powtarzając sukcesywnie powyższe podstawienie dla kolejnych $i = 2,...,q-1$ oraz uwzględniając rezultaty pracy [9] możemy napisać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Układ standardowy DMF-MCD (6) jest zawsze punktowo zupełny w punkcie (t_f, q) dla $t_f > 0$ i $q = 1,2,...$.

Dowód. Dowód twierdzenia jest podobny do dowodu podanego w [9]. ■

Z powyższych rozważań wynika, że standardowy układ DMF-MCD (6) jest punktowo zupełny w punkcie $(t_f, 1)$ dla każdego $t_f > 0$. Ponadto punktowa zupełność tego układu nie zależy od postaci macierzy A_1.

Przykład 1. Dany jest standardowy układ DMF-MCD o równaniu (6) o macierzach

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \ (14)$$

Należy znaleźć warunki brzegowe układu w punkcie $(t_f, q) = (1,1)$ dla $x_f = [2.5 \ \ 4.5]^T$.

Macierz $e^{-A_2 t}$ możemy wyznaczyć korzystając z metody wzoru Sylvestera [9]. Biorąc pod uwagę, że A_2 (14) ma wartości własne $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -0.5$ otrzymamy

$$e^{-A_2 t} = \frac{A_2 - \lambda_2 I_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{A_2 - \lambda_1 I_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 2(e^{0.5t} - e^t) & e^{0.5t} \end{bmatrix} \ (15)$$

Macierz $e^{-A_2 t}$ można również wyznaczyć w środowisku obliczeniowym MATLAB wykorzystując zaimplementowaną tam *m*-funkcję: `expm`.
Obliczając warunki brzegowe ze wzoru (9) przy uwzględnieniu (15) dla $t = t_f = 1$ otrzymamy

$$x(0,1) = e^{-A_2 t_f} x_f = \begin{bmatrix} e^{t_f} & 0 \\ 2(e^{0.5t_f} - e^{t_f}) & e^{0.5t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.79 \\ 2.07 \end{bmatrix}. \ (16)$$

Z powyższych obliczeń wynika, że rozpatrywany standardowy DMF-MCD o macierzach (14) jest punktowo zupełny w punkcie $(t_f, q) = (1,1)$ dla warunków brzegowych (16).

Przeciwieństwem punktowej zupełności jest *punktowa degeneracja*. Wychodząc z tego faktu oraz korzystając z rezultatów pracy [9] możemy sformułować poniższą definicję oraz twierdzenie.

Definicja 2. Uk ład standardowy DMF-MCD (6) nazywam y punktowo zdegenerowanym w punkcie (t_f, q) w kierunku v, je żeli istnieje wektor $v \in \Re^n$, taki że dla wszystkich warunków brzegowych (2) rozwiązanie równania (6) o postaci

$$x(t,1) = e^{A_2 t} x(0,1) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} A_1(\tau,0) d\tau \quad (17)$$

spełnia warunek $v^T x(t_f, q) = 0$ dla $t = t_f$ oraz $i = q$.

Twierdzenie 2. Układ standardowy DMF-MCD (6) nie jest punktowo zdegenerowany w punkcie $(t_f, 1)$ dla dowolnych $t_f > 0$.

Dowód. Dowód twierdzenie przebiega podobnie jak w pracy [9] dla ogólnego m odelu układu ciągło-dyskretnego. Wymnażając obie strony równania (17) przez v^T mamy

$$v^T x(t,1) = v^T e^{A_2 t} x(0,1) + \int_0^t v^T e^{A_2(t-\tau)} A_1(\tau,0) d\tau. \quad (18)$$

Ponieważ m acierz $e^{A_2 t_f}$ jest nieosobliwa dla ka żdej m acierzy A_2 i $t_f > 0$, wi ęc z (18) bezpośrednio wynika, że nie istnieje wektor $v^T \neq 0, (v^T \in \Re^n)$ taki, że $v^T x(t_f, 1) = 0$ dla wszystkich warunków brzegowych (2). ∎

3.2. Dodatni model DMF-MCD

Układ DMF-MCD (6) nazywamy dodatnim jeżeli $x(t,i) \in \Re_+^n$, $t \in \Re_+$, $i \in Z_+$ dla wszystkich nieujemnych warunków brzegowych

$$\begin{aligned} &x(t,0) \in \Re_+^n, \quad \dot{x}(t,0) \in \Re_+^n, \quad t \in \Re_+ \\ &x(0,i) = \Re_+^n, \quad i \in Z_+. \end{aligned} \quad (19)$$

Przypomnijmy, że [5, 6] m acierz $A = [a_{ij}] \in \Re^{n \times n}$ nazywamy macierzą Metzlera (oznaczenie: M_n), jeżeli wszystkie jej elementy leżące poza główną przekątną są nieujemne, czyli $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$ i $j = 1, 2, ..., n$.

Twierdzenie 3 [5, 6] Układ DMF-MCD (6) jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy

$$A_2 \in M_n, \quad A_1 \in \Re_+^{n \times n}, \quad A = A_1 A_2 \in \Re_+^{n \times n}. \ \blacksquare \ (20)$$

Uogólniając rezultaty pracy [9] m ożemy sform ułować poni ższe definicje oraz warunki punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dodatniego układu DMF-MCD (6).

Definicja 3. Dodatni układ DMF-MCD (6) nazywamy punktowo zupełnym w punkcie (t_f, q) jeżeli dla dowolnego nieujemnego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$ istnieją nieujemne warunki brzegowe (19) takie, że $x(t_f, q) = x_f$, $t_f > 0$, $q \in N = \{1, 2, \dots N\}$.

Twierdzenie 4. Dodatni układ DMF-MCD (6) jest punktowo zupełny w punkcie $(t_f, 1)$ lub w punkcie (t_f, q), $t_f > 0$, $q \in N = \{1, 2, \dots\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A_2 jest macierzą diagonalną. ■

Definicja 4. Dodatni układ DMF-MCD (6) nazywamy punktowo zdegenerowanym w punkcie (t_f, q) jeżeli istnieje przynajmniej jeden dowolny nieujemny stan końcowy $x_f \in \Re_+^n$ taki, że $x(t_f, q) \neq x_f$ dla wszystkich nieujemnych warunków brzegowych (19).

Twierdzenie 5. Dodatni układ DMF-MCD (6) jest punktowo zdegenerowany w punkcie (t_f, q), $t_f > 0$, $\{q \in N = 1, 2, \dots\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A_2 nie jest macierzą diagonalną. ■

Zauważmy, że aby dodatni układ DMF-MCD (6) był punktowo zupełny w punkcie $(t_f, 1)$ lub w punkcie (t_f, q), $t_f > 0$, $q \in N = \{1, 2, \dots\}$ macierz A_2 musi być diagonalna, ponieważ wtedy i tylko wtedy istnieje nieujemna macierz $e^{-A_2 t_f} \in \Re_+^{n \times n}$. Z twierdzenie 3 wynika, że przy diagonalnej macierzy Metzlera A_2 jeden z warunków dodatniości, tj. $A = A_1 A_2 \in \Re_+^{n \times n}$ może być trudny do spełnienia. W praktyce może to oznaczać, że dodatni układ DMF-MCD (6) może nie być punktowo zupełny, lecz tylko punktowo zdegenerowany.

Podane wyżej rozważania zostaną zilustrowane poniższymi przykładami.

Przykład 2. Weźmy pod uwagę układ DMF-MCD (6) o macierzach

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sprawdzając warunki twierdzenia 3 mamy

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} = M_2 \in \Re_+^{2\times 2}, \quad A = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -0.75 \end{bmatrix} \notin \Re_+^{2\times 2}. \quad (22)$$

Ponieważ $A \notin \Re_+^{2\times 2}$ zatem układ DMF-MCD o równaniu (6) przy macierzach (21) na mocy twierdzenia 3 nie jest dodatni.
Zauważmy jednak, że macierz A_2 jest diagonalna. Zakładając, że $(t_f, 1)$, $t_f \geq 0$ zgodnie ze wzorem (9) mamy

$$x(0,1) = e^{-A_2 t_f} x_f = \begin{bmatrix} e^{t_f} & 0 \\ 0 & e^{0.5 t_f} \end{bmatrix} x_f. \quad (23)$$

Powyższy rezultat oznacza, że dla dowolnego $x_f \in \Re_+^2,\ t_f \in R_+$ rozpatrywany układ może być punktowo zupełny, lecz nie spełnia on warunku podanego w twierdzeniu 3.

Przykład 3. Weźmy pod uwagę układ DMF-MCD (6) o poniższych macierzach

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Sprawdzając warunki twierdzenia 3 mamy

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2},\quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = M_2 \in \Re_+^{2\times 2},\quad A = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2}. \quad (25)$$

Układ DMF-MCD o równaniu (6) przy macierzach (21) na mocy twierdzenia 3 jest dodatni. Załóżmy, że

$$\textbf{\textit{a)}}\ x_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \textbf{\textit{b)}}\ x_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Korzystając ze wzoru (9) przy zadanych wektorach (26) dla $(t_f, 1),\ t_f \geq 0$ otrzymamy

$$\textbf{\textit{a)}}\quad x(0,1) = e^{-A_2 t_f} x_f = \begin{bmatrix} 5.43 \\ -2.43 \end{bmatrix},\quad \textbf{\textit{b)}}\quad x(0,1) = e^{-A_2 t_f} x_f = \begin{bmatrix} 5.43 \\ 1.56 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Rozpatrywany dodatni DMF-MCD (6) o macierzach (24) jest punktowo zdegenerowany w punkcie $(t_f, 1)$. Zauważmy, że macierz

$$e^{-A_2 t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 1 - e^t & 1 \end{bmatrix} \notin \Re_+^{2\times 2}, \quad (28)$$

nie jest macierzą dodatnią, ponieważ macierz Metzlera A_2 (24) nie jest diagonalna

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji układów ciągło-dyskretnych opisanych drugim modelem Fornasiniego-Marchesiniego (DMF-MCD). Korzystając z wyników pracy [9] podano definicje oraz kryteria punktowej zupełności i degeneracji rozpatrując układ ciągło-dyskretny jako standardowy oraz jako dodatni. W przypadku, gdy DMF-MCD jest układem dodatnim warunek jego punktowej zupełności może być bardzo trudny do spełnienia. W efekcie dodatni DMF-MCD może być układem punktowo zdegenerowanym.

Przedstawione w pracy rozważania mogą być rozszerzone na DMF-MCD z opóźnieniami we współrzędnych stanu. Uogólnienie niniejszych rezultatów na układy ciągło-dyskretne opisane równaniami niecałkowitego rzędu jest także możliwe.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

5. BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M.: *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear discrete-time systems of fractional order*, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, Automatyka, No. 151, 2008, pp. 19–24.
2. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W.: *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of positive discrete-time systems with delays,* Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, Automatyka, No. 145,2006, pp. 55–56.
3. Choundhury A.K.: *Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems,* Int. J. Control, Vol. 16, No. 6, 1972, pp. 1083–1100.
4. Fornasini E., and Marchesini G.: *Double indexed dynamical systems*, Math. Sys. Theory, Vol. 12, 1978, pp. 59–72.
5. Kaczorek T.: *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe,* Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
6. Kaczorek T.: *Positive 1D and 2D systems*, Springer-Verlag, London 2002.
7. Kaczorek T.: *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive linear systems with state-feedbacks*, Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems, Vol. 3, No. 3, 2009.
8. Kaczorek T., Busłowicz M.: *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear continuous-time fractional order systems,* Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems, Vol. 3, No. 1, 2009, pp. 8–11.
9. Kaczorek T.: *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive hybrid linear systems described by the general model*, Archives of Control Sciences, Vol. 20(LVI), 2010, No. 2, pp. 123–131.
10. Kaczorek T.: *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of 2D standard and positive Fornasini-Marchesini models*, COMPEL, Vol. 39, No.3, 2010 (w druku).
11. Olbrot A.: *On degeneracy and related problems for linear constant time-lag systems*. Ricerche di Automatica, Vol. 3, No. 3, 1972, pp. 203–220.
12. Popov V.M.: *Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations,* Journal of Diff. Equation, Vol. 11, 1972, pp. 541–561.
13. Weiss L.: *Controllability for various linear and nonlinear systems models*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer, Berlin 1970, pp. 250–262.
14. Zmood R.B., McClamroch N.H.: *On the pointwise completeness of differential-difference equations*, Journal of Differential Equations, No. 12, 1972, pp. 474–486.