dr inż. Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka

OBSERWOWALNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNYCH NIECAŁKOWITEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM W WEKTORZE STANU

W artykule rozpatrzono problem obserwowalności liniowych układów dyskretnych dodatnich oraz standardowych niecałkowitego rzędu z jednym opóźnieniem we współrzędnych stanu. Sformułowano definicje i kryteria obserwowalności oraz zaproponowano metodę obliczania stanu początkowego rozpatrywanej klasy układów. Główne kryteria sformułowano dla $\Re_+^n$ *– obserwowalności, będącej przypadkiem szczególnym obserwowalności.*

OBSERVABILITY OF DISCRETE-TIME FRACTIONAL ORDER SYSTEMS WITH STATE DELAY

In the paper the observability problem for the positive and the standard linear discrete-time fractional order system with one state delay is presented. Necessary and sufficient conditions for $\Re_+^n$ *– observability are formulated and proved. A simple method for computing the initial condition is proposed. Considerations are illustrated by numerical examples.*

1. WSTĘP

Obserwowalność, podobnie jak stabilność czy sterowalność, należy do fundamentalnych pojęć i problemów teorii sterowania. Studium problematyki obserwowalności datuje się od roku 1960 [2]. Ogólnie obserwowalność jest właściwością układu sterowania, która polega na tym, że na podstawie zarejestrowanego sygnału wyjściowego w określonym przedziale czasu można wyznaczyć (odtworzyć) stan początkowy tego układu. Znajomość stanu jest istotna przy stosowaniu algorytmu estymacji minimalnokwadratowej.

W ramach szeroko rozumianej teorii układów dynamicznych można wyróżnić kilka klas układów. Są to układy standardowe, układy dodatnie czy intensywnie analizowane w ostatnich latach – układy niecałkowitego rzędu. Układy standardowe są najogólniejszą klasą układów dynamicznych. Podklasę układów standardowych stanowią układy dodatnie, w których składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Układy niecałkowitego rzędu są to natomiast układy, do opisu których wykorzystuje się aparat rachunku różniczkowo-całkowego, zapoczątkowany w XVII wieku [6].

W niniejszym artykule rozpatrywany będzie problem obserwowalności układów dyskretnych dodatnich i standardowych niecałkowitego rzędu z opóźnieniem w wektorze stanu.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W artykule b ędą stosowane nast ępujące oznaczenia: $\Re^{n\times m}$ $(\Re_{+}^{n\times m})$ - zbiór m acierzy wymiaru $n\times m$ o elem entach rzeczywistych (nieujem nych) oraz $\Re^{n}=\Re^{n\times 1}$ $(\Re_{+}^{n}=\Re_{+}^{n\times 1})$; Z_{+} - zbiór liczb całkowitych dodatnich; I_n - macierz jednostkowa wymiaru $n\times n$.

W r ozważaniach przyjm iemy definicj ę ró żniczko-całki u łamkowego rz ędu podan ą przez Grünwalda-Letnikova w postaci (np. [3, 5])

$$\Delta^{\alpha}x_i=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}x_{i-j}=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{i}\omega_j^{(\alpha)}x_{i-j},\ (1)$$

gdzie $\alpha\in\Re$ jest rzędem (niecałkowitym), h jest okresem próbkowania, $i\in Z_{+}$ jest numerem próbki, dla której jest obliczana ró żniczko-całka. Współczynniki $\omega_j^{(n)}$ w (1) s ą zdefiniowane następująco [3]

$$\omega_j^{(\alpha)}=\begin{cases}1 & \text{dla}\quad j=0\\ (-1)^{j}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!} & \text{dla}\quad j=1,2,\ldots\end{cases}\qquad(2)$$

lub

$$\omega_0^{(\alpha)}=1;\qquad \omega_j^{(\alpha)}=\left(1-\frac{1+\alpha}{j}\right)\omega_{j-1}^{(\alpha)},\ j=1,2,\ldots\ (3)$$

Weźmy pod uwag ę liniowy uk ład dyskretny z opó źnieniem zm iennych stanu, opisany poniższymi równaniami

$$\Delta^{\alpha}x_{i+1}=A_0x_i+A_1x_{i-1}+Bu_i,\qquad i\in Z_{+},\ (4)$$

$$y_i=Cx_i+Du_i,\ (5)$$

gdzie , $x_i\in\Re^{n}$ $u_i\in\Re^{m}$, $y_i\in\Re^{p}$ są wektoram i stanu, wym uszenia i odpowiedzi oraz $A_0\in\Re^{n\times n}$, $A_1\in\Re^{n\times n}$, $B\in\Re^{n\times m}$, $C\in\Re^{p\times n}$, $D\in\Re^{p\times m}$.

Warunki początkowe dla równania (4) są następujące

$$,\quad 0\qquad x_{-i}\in\Re^{n}\quad i=\ ,1.\ (6)$$

Uwzględniając definicj ę Grünwalda-Letnikova (przy $h=1$) oraz przyjm ując bez straty ogólności rozwa żań, że 0 $u_i=$ ($B=0,\ D=0$) otrzym amy uk ład dyskretny opisany poniższymi równaniami

$$x_{i+1} + \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j+1} = A_0 x_0 + A_1 x_{-1}, \quad i \in Z_+ \ (7)$$

$$y_i = Cx_i. \ (8)$$

Rozwiązanie równania stanu (7) przy warunkach początkowych (6) ma postać [4]

$$x_i = \Phi_i x_0 + \Phi_{i-1}\left(A_1 + \omega_2 I_n\right) x_{-1} + \sum_{j=0}^{i-1} \Phi_{i-1-j} \ (9)$$

gdzie macierz Φ_i (podstawowa) spełnia równanie

$$\Phi_{i+1} = \left(A_0 + \alpha I_n\right)\Phi_i + \left(A_1 + \omega_2 I_n\right) + \sum_{j=3}^{i+1} \omega_j \Phi_{i-j+1}, \ (10)$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi_0 = I_n; \quad \Phi_i = 0 \ \text{dla} \ i < 0. \ (11)$$

Definicja 1. Układ (7), (8) nazywamy obserwowalnym w q krokach, jeżeli na podstawie znajomości wartości odpowiedzi $y_0, y_1, ..., y_{q-1}$ w kolejnych q krokach, możemy jednoznacznie wyznaczyć stan $x_0 \in \Re^n$ oraz $x_{-1} \in \Re^n$ tego układu.

Definicja 2. Układ (7), (8) nazywamy obserwowalnym, jeżeli istnieje liczba naturalna $q \in Z_+$ $(q \geq 1)$ taka, że układ ten jest obserwowalny w q krokach.

Celem niniejszej pracy jest podanie kryteriów obserwowalności układu dyskretnego niecałkowitego rzędu (7), (8) oraz zależności na wyznaczenie stanu początkowego (6) rozpatrywanego układu dynamicznego.

3. GŁÓWNY REZULTAT

3.1. Obserwowalność dodatniego układu niecałkowitego rzędu

Definicja 4. [1, 3, 4] Układ (7), (8) nazywamy dodatnim jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych, $x_{-i} \in \Re^n_+$ $i = 0,1$ i każdego nieujemnego ciągu sterującego $u_i \in \Re^m_+$, $i \in Z_+$, zachodzi $x_i \in \Re^n_+$, $y_i \in \Re^p_+$ dla wszystkich $i \in Z_+$.

Jeżeli

$$0 < \alpha < 1 \ (12)$$

to współczynniki (3) są nieujemne, tj. [4]

$$\omega_j = -\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^{j+1}\binom{\alpha}{j} > 0, \quad j = 1,2,... \ (13)$$

Jeżeli $0 < \alpha < 1$ oraz

$$(A_0 + \alpha I) \in \Re_+^{n\times n}, \quad (A_1 + \omega_2 I) \in \Re_+^{n\times n}, \ (14)$$

to macierze (10) mają wszystkie elementy nieujemne, tj. [4]

, .
$$\Phi_i \in \Re_+^{n\times n} \quad i \in Z_+ \ (15)$$

Twierdzenie 1. [4] Układ (7), (8) dla $0 < \alpha < 1$ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A_0 + \alpha I) \in \Re_+^{n\times n}, \quad (A_1 + \omega_2 I) \in \Re_+^{n\times n}, \quad C \in \Re_+^{p\times n}. \ \blacksquare \ (16)$$

Podstawiając (9) do równania wyjścia (8) otrzymamy

$$y_i = C\Phi_i x_0 + C\Phi_{i-1}\left(A_1 + \omega_2 I\right)x_{-1}. \ (17)$$

Dokonując następnie podstawień dla $i = 0,1,...,q-1$ w (17) otrzymamy

$$y_0^q = S_q \tilde{x}_0, \ (18)$$

gdzie

$$y_0^q = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{qp}, \quad S_q = \begin{bmatrix} C & 0 \\ C\Phi_1 & C\Phi_0(A_1 + \omega_2 I) \\ C\Phi_2 & C\Phi_1(A_1 + \omega_2 I) \\ \vdots & \vdots \\ C\Phi_{q-1} & C\Phi_{q-2}(A_1 + \omega_2 I) \end{bmatrix} \in \Re_+^{qp\times 2n}, \quad \tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n}. \ (19)$$

Niech e_k ($k = 1,2,...,n$) będzie k-tym wierszem macierzy jednostkowej I_n oraz $a > 0$. Wiersz ae_k nazywam y wierszem m onomialnym (tylko jeden elem ent jest dodatni, pozosta łe s ą równe zero).

Twierdzenie 2. Uk ład dodatni (7), (8) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy z macierzy S_q o postaci (19) można wybrać $2n$ liniowo niezależnych wierszy monomialnych.

Dowód. Dowód wynika bezpo średnio ze wzoru (18) oraz definicji 1. Znaj ąc ciąg odpowiedzi układu $y_0^q \in \Re_+^{qp}$ (19) możemy wyznaczyć stan $x_0 \in \Re_+^n$ oraz $x_{-1} \in \Re_+^n$ układu dodatniego (7),

(8) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz S_q (19) zawiera $2n$ liniowo niezależnych wierszy monomialnych. ■

Przykład 1. Zbadać obserwowalność dodatniego układu niecałkowitego rzędu z opóźnieniem (7), (8) o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.8 \\ 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.125 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.17 & 0 & -0.125 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.142 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

W rozpatrywanym układzie $n = 3,\ p = 2$.
Na podstawie twierdzenia 1 dla rzędu $\alpha = 0.5$ mamy

$$A_0 + I\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.80 \\ 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{3\times 3}, \quad A_1 + \omega_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.225 & 0 \\ 0.17 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{3\times 3}. \quad (21)$$

przy czym $\omega_2 = -\omega_2^{(0.5)} = \dfrac{(1-0.5)0.5}{1} \geq 0.125.$

Rozpatrywany układ o macierzach (20) jest dodatni dla rzędu $\alpha = 0.5$. Łatwo można sprawdzić, że dla $0 < \alpha < 0.5$ lub $0.5 < \alpha < 1$ warunki twierdzenia 1 nie będą spełnione. Sprawdzimy czy rozpatrywany układ dodatni jest obserwowalny w $q = 3$ krokach. Obliczając macierz (19) otrzymamy

$$S_q = S_3 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ C\Phi_1 & C\Phi_0(A_1 + \omega_2 I_3) \\ C\Phi_2 & C\Phi_1(A_1 + \omega_2 I_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.113 & 0 & 0 & 0.035 \\ 0 & 0.056 & 0 & 0 & 0.075 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & 0.019 & 0 & 0 \\ 0 & 0.084 & 0 & 0 & 0.012 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

przy czym

$$\Phi_0 = I_3, \quad \Phi_1 = A_0 + \alpha I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.80 \\ 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \Phi_1^2 + (A_1 + \omega_2 I_3)\Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0.17 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

Macierz (22) nie zawiera $2n = 6$ liniowo niezależnych wierszy monomialnych. Zawiera ona tylko 2 takie wiersze. Rozpatrywany układ nie jest obserwowalny. Łatwo można sprawdzić, że w większej liczbie kroków q układ tak że nie będzie spełniał warunków twierdzenia 2. Zauważmy, że do spełnienia warunku twierdzenia 2 potrzeba, aby macierz $S_3 \in \Re_+^{6\times 6}$ (22) była monomialna, co w ogólnym przypadku jest bardzo trudne do spełnienia. W układach dyskretnych niecałkowitego rzędu z opóźnieniem istnieje wobec tego podobny problem jak w przypadku układów całkowitego rzędu [2]. Wynika on z faktu, że występujący w równaniu (18) wektor $\tilde{x}_0$ jest tzw. wektorem zupełnego stanu początkowego, który składa się z chwilowych stanów początkowych (6). W celu jednoznacznego odtworzenia składowych wektora (19) będziemy rozpatrywać tzw. $\Re^n_+$ – obserwowalność, czyli obserwowalność względem poszczególnych składowych $\tilde{x}_0$ (19).

Definicja. 4. Układ dodatni (7), (8) nazywamy $\Re^n_+$ – obserwowalnym w q krokach, jeżeli na podstawie znajomości wartości odpowiedzi $y_0, y_1, ..., y_{q-1}$ tego układu w kolejnych q krokach, możemy jednoznacznie wyznaczyć:

a) stan $x_0 \in \Re^n_+$ przy założeniu $x_{-1} = 0$,

b) stan $x_{-1} \in \Re^n_+$ przy założeniu $x_0 = 0$.

Definicja 5. Układ dodatni (7), (8) nazywamy $\Re^n_+$ – obserwowalnym, jeżeli istnieje liczba naturalna $q \in Z_+$ $(q \geq 1)$, taka że układ ten jest obserwowalny w q krokach (zgodnie z definicją 4).

Uwzględniając wzory (17) - (19) oraz założenia wynikające z definicji 4, otrzymamy:

$$\bar{y}_0^q = \bar{S}_q x_0, \quad (24)$$

$$\tilde{y}_0^q = \tilde{S}_q x_{-1}, \quad (25)$$

gdzie

$$\begin{gathered}\bar{y}_0^q = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{bmatrix} \in \Re^{qp}_+, \quad \bar{S}_q = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi_1 \\ C\Phi_2 \\ \vdots \\ C\Phi_{q-1} \end{bmatrix} \in \Re^{qp\times n}_+, \quad x_0 \in \Re^n_+, \\ \tilde{y}_0^q = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{bmatrix} \in \Re^{qp}_+, \quad \tilde{S}_q = \begin{bmatrix} 0 \\ C\Phi_0(A_1 + \omega_2 I) \\ C\Phi_1(A_1 + \omega_2 I) \\ \vdots \\ C\Phi_{q-2}(A_1 + \omega_2 I) \end{bmatrix} \in \Re^{qp\times n}_+, \quad x_{-1} \in \Re^n_+,\end{gathered} \quad (26)$$

przy czym odpowiedź $\bar{y}_0^q$ jest wywołana warunkiem początkowym x_0, natomiast odpowiedź $\tilde{y}_0^q$ jest wywołana warunkiem początkowym x_{-1}.

Twierdzenie 3. Układ dodatni (7), (8) jest $\Re_+^n$ – obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy z macierzy $\bar{S}_q$ oraz $\tilde{S}_q$ o postaci (26) można wybrać n liniowo niezależnych wierszy monomialnych.

Dowód. Dowód jest podobny jak w twierdzeniu 2. ■

Lemat 1. Jeżeli układ (7), (8) jest $\Re_+^n$ – obserwowalny, to jest on obserwowalny w q krokach, gdzie $q \geq E[n/v]$, przy czym $E[n/v]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą n/v, gdzie v jest liczbą liniowo niezależnych wierszy macierzy C tego układu.

Dowód. Każda macierz $C\Phi_k$, $k = 0,1,\ldots,q-1$ w macierzy $\bar{S}_q$ (26) oraz każda macierz $C\Phi_l(A_1+\omega_2 I)$, $l = 0,1,\ldots,q-2$ w macierzy $\tilde{S}_q$ (26) może mieć co najwyżej v liniowo niezależnych wierszy monomialnych. Jeżeli więc układ dodatni (7), (8) jest obserwowalny to $Nl = v$. ■

Twierdzenie 4. Jeżeli układ dodatni (7), (8) jest $\Re_+^n$ – obserwowalny to znając ciąg odpowiedzi $\bar{y}_0^q \in \Re_+^{qp}$ oraz $\tilde{y}_0^q \in \Re_+^{qp}$ możemy nieujemny stan początkowy $x_0 \in \Re_+^n$ oraz $x_{-1} \in \Re_+^n$ tego układu wyznaczać odpowiednio ze wzorów

$$x_0 = \left[\bar{S}_q^T \bar{S}_q\right]^{-1} \bar{S}_q^T \bar{y}_0^q, \quad (27)$$

$$x_{-1} = \left[\tilde{S}_q^T \tilde{S}_q\right]^{-1} \tilde{S}_q^T \tilde{y}_0^q. \quad (28)$$

Dowód. Jeżeli istnieje takie q, że $rząd\,\bar{S}_q = n$ oraz $rząd\,\tilde{S}_q = n$ to wtedy macierz $\bar{S}_q^T \bar{S}_q$ oraz $\tilde{S}_q^T \tilde{S}_q$ jest nieosobliwa. Podstawiając (24) i (25) do (27) i (28) otrzymamy odpowiednio $x_0 = [\bar{S}_q^T \bar{S}_q]^{-1} \bar{S}_q^T \bar{S}_q x_0 = x_0$ oraz $x_1 = [\tilde{S}_q^T \tilde{S}_q]^{-1} \tilde{S}_q^T \tilde{S}_q x_{-1} = x_{-1}$ co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 2. Należy zbadać $\Re_+^n$ – obserwowalność układu rozpatrywanego w przykładzie 1, sprawdzając warunki twierdzenia 3 zgodnie z założeniami definicji 4.

Aby określić liczbę kroków q wykorzystamy lemat 1. Zgodnie z tym lematem mamy $q \geq E[n/v] = 2$. Oznacza to, że rozpatrywany układ może być obserwowalny w $q = 2$ krokach. Wyznaczając macierze $\bar{S}_q$, $\tilde{S}_q$ (26) przy $q = 2$ otrzymamy, że warunki twierdzenia 3 nie są spełnione. Obliczając natomiast macierze (26) przy $q = 3$ mamy

$$\bar{S}_q = \bar{S}_2 = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi_1 \\ C\Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.142 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.113 \\ 0 & 0.056 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 \\ 0 & 0.084 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{6\times 3},$$

$$\tilde{S}_q = \tilde{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C\Phi_0(A_1+\omega_2 I) \\ C\Phi_1(A_1+\omega_2 I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 \\ 0 & 0.075 & 0 \\ 0.019 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{6\times 3}. \quad (29)$$

Macierze (29) zawierają $n=3$ liniowo niezależne wiersze monomialne. Rozpatrywany układ niecałkowitego rzędu o macierzach (20) jest obserwowalny.
Niech odpowiedź układu przy $x_0 \neq 0$ oraz $x_{-1}=0$ ma postać,

$$\bar{y}_0^q = \bar{y}_0^2 = \begin{bmatrix} 0.284 & 0.333 & 0.341 & 0.056 & 0.106 & 0.084 \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

natomiast przy $x_{-1} \neq 0$ oraz $x_0 = 0$ postać odpowiedzi będzie następująca

$$\tilde{y}_0^q = \tilde{y}_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.142 & 0.149 & 0.019 & 0.025 \end{bmatrix}^T. \quad (31)$$

Łatwo można sprawdzić, że macierze $[\bar{S}_2^T \bar{S}_2]^{-1} \bar{S}_2^T$, $[\tilde{S}_2^T \tilde{S}_2]^{-1} \tilde{S}_2^T$ zawierają elementy nieujemne. Dokonując podstawień w (27), (28) i uwzględniając (30) oraz (31) otrzymamy

$$x_0 = \left[\bar{S}_2^T \bar{S}_2 \right]^{-1} \bar{S}_2^T \bar{y}_0^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \Re_+^3, \quad x_{-1} = \left[\tilde{S}_2^T \tilde{S}_2 \right]^{-1} \tilde{S}_2^T \tilde{y}_0^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \Re_+^3. \quad (32)$$

Rozpatrywany układ dodatni niecałkowitego rzędu jest obserwowalny w $q=3$ krokach.

3.2. Obserwowalność standardowego układu niecałkowitego rzędu

Weźmy pod uwagę układ o równaniach (7), (8).

Twierdzenie 5. Układ (7), (8) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna q, dla której $rząd\, S_q = 2n$, gdzie macierz S_q ma postać (19). Stan początkowy

$x_0 \in \Re^n$, $x_{-1} \in \Re^n$ tego uk ładu, przy znanym ci ągu odpowiedzi y_0^q mo żna wyznaczy ć ze wzoru

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} = \left[S_q^T S_q \right]^{-1} S_q^T y_0^q. \quad (33)$$

Dowód. Dowód jest podobny jak w twierdzeniu 4. ■

Przykład 3. Należy zbadać obserwowalność układu dyskretnego z opóźnieniem o macierzach (20), rozpatrywanego w przykładzie 1.

W przykładzie 1 stwierdzono, że układ o macierzach (20) jest dodatni dla $\alpha = 0.5$. Oznacza to, że przyjm ując $0 < \alpha < 0.5$ lub $0.5 < \alpha < 1$ ma my u kład standardowy. Zbadam y obserwowalność tego układu przyjmując $\alpha = 0.2$.
Łatwo sprawdzi ć, że m acierz S_q (19) przy $q = 3$ (przyk ład 1 ,2) nie m a pe łnego rz ędu kolumnowego. Obliczając S_q (19) przy $q = 4$ mamy

$$S_q = S_4 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ C\Phi_1 & C\Phi_0(A_1 + \omega_2 I) \\ C\Phi_2 & C\Phi_1(A_1 + \omega_2 I) \\ C\Phi_3 & C\Phi_2(A_1 + \omega_2 I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.042 & 0 & 0.013 & -0.006 & 0 & 0.035 \\ 0 & -0.043 & 0 & 0 & 0.059 & 0 \\ 0.006 & 0 & -0.032 & 0.02 & 0 & -0.015 \\ 0 & 0.065 & 0 & 0 & -0.007 & 0 \\ 0.068 & 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.003 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0.0118 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Ponieważ $rząd\, S_4 = 2n = 6$ więc rozpatrywany standardowy uk ład dyskretny dla $\alpha = 0.2$ jest obserwowalny w $q = 4$ krokach.

Niech odpowiedź układu zarejestrowana w $q = 4$ krokach ma postać

$$y_0^q = y_0^4 = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.333 & 0.391 & 0.076 & -0.127 & 0.05 & 0.02 & 0.039 \end{bmatrix}^T. \quad (35)$$

Korzystając ze wzoru (33) przy macierzy (34) oraz (35) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} = \left[S_4^T S_4 \right]^{-1} S_4^T y_0^4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T. \quad (36)$$

Wobec tego

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T, \quad x_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T. \quad (37)$$

Stan początkowy rozpatrywanego układu standardowego został obliczony poprawnie.

4. PODSUMOWANIE

W pracy rozpatrzono problem obserwowalności liniowych układów dyskretnych dodatnich oraz standardowych niecałkowitego rzędu z jednym opóźnieniem. Podano definicje oraz sformułowano kryteria obserwowalności. Zaproponowano prostą metodę wyznaczania stanu początkowego rozpatrywanej klasy układów dynamicznych.

Kryteria obserwowalności dla układu dodatniego uzyskano rozpatrując $\Re_{+}^{n}$ – obserwowalność tj. obserwowalność chwilową względem poszczególnych składowych wektora zupełnego stanu początkowego.

Przedstawione rozważania można uogólnić na przypadek dodatniego jak i standardowego układu niecałkowitego rzędu z wielokrotnymi opóźnieniami zmiennych stanu i/lub sterowania.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

5. BIBLIOGRAFIA

1. Guermah S., Djennoune S., Bettayeb M.: *Controllability and observability of linear discrete-time fractional-order system*. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. Vol. 18, No. 2, 2008, pp. 213-222.
2. Kalman R. E.: *On the general theory of control system*. Proc. of the 1st World IFAC Congress, London: Butterworth, 1960.
3. Kaczorek T.: *Reachability and controllability to zero of positive factional discrete-time systems*. Machine Intelligence and Robotic Control. vol. 6, no. 4, pp. 139-143, 2004.
4. Kaczorek T.: *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*. Oficyna Wyd. Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
5. Kociszewski R.: *Sterowalność i obserwowalność liniowych stacjonarnych układów dodatnich dyskretnych z opóźnieniami*. Rozprawa doktorska, Politechnika Białostocka, Białystok 2008.
6. Miller K.S. Ross B.: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Willey, New York 1993.
7. Trzasko W.: *Reachability and controllability of positive fractional discrete-time systems with delay*. Journal and Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, vol. 2, no. 3, pp. 43-47, 2008.
8. Vinagre B. M.: *Fractional Calculus Fundamentals*. Tutorial Workshop #2. Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 41st IEEE Conf. on Decision and Control, Las Vegas, USA 2002.