Strategia równoczesna w metodzie MSE rozwiązywania problemów sterowania optymalnego

Propozycja modyfikacji algorytmu

Janusz Miller

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział EAIiE, Katedra Automatyki

Streszczenie: Uważa się, że strategie równoczesne mają przewagę nad sekwencyjnymi w rozwiązywaniu zadań sterowania optymalnego – w szczególności w przypadku obiektów niestabilnych. Przedstawiono podstawowe różnice między metodami sekwencyjnymi i równoczesnymi. Wyniki eksperymentów numerycznych wskazują, że wymiana algorytmu sekwencyjnego na równoczesny w metodzie monotonicznej ewolucji struktury sterowania (MSE) może poszerzyć obszar zbieżności metody. Zaproponowano kolejną modyfikację algorytmu.

Słowa kluczowe: sterowanie optymalne, metody numeryczne, dyskretyzacja, schemat Rungego-Kutty, metoda kolokacyjna

1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono propozycję rozwiązania jednego z problemów pojawiających się w trakcie numerycznego rozwiązywania zadania sterowania optymalnego.

Postawmy problem sterowania optymalnego w postaci ogólnej. Należy znaleźć minimum

$$\min_{x(t),u(t),p} \varphi(x(t_f)) \tag{1}$$

przy spełnieniu ograniczeń dynamiki

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),p), \tag{2}$$

ograniczeń algebraicznych

$$\begin{aligned} h(x(t),u(t),p) &= 0 \\ g(x(t),u(t),p) &\leq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

i warunków granicznych

$$x(t_0) = 0, \qquad h_f(x(t_f)) = 0 \tag{4}$$

W tak postawionym problemie optymalizacji zmiennymi decyzyjnymi są zmienne stanu $x(t)$, sterowanie $u(t)$ oraz niezależne od czasu parametry p. Problemy takie rozwiązywane są metodami wariacyjnymi lub z zastosowaniem algorytmów programowania nieliniowego (NLP). Podstawą konstrukcji metod wariacyjnych (pośrednich) jest zasada maksimum Pontriagina, co prowadzi do sformułowania dwupunktowego problemu brzegowego. Problem taki jest numeryczne rozwiązywany metodami strzałów albo – po dyskretyzacji – metodami kolokacyjnymi lub elementów skończonych. Algorytmy należące do tej grupy metod są stosunkowo szybko zbieżne, jednak zakres zbieżności nie jest duży. Zazwyczaj trudność sprawia dobre wstępne przybliżenie przebiegu sterowania oraz zmiennych sprzężonych.

W drugiej grupie metod – bezpośrednich (ang. *direct transcription*), opartych na NLP – wstępnym etapem rozwiązywania jest dyskretyzacja w czasie zmiennych stanu, która rozstrzyga o podziale na metody sekwencyjne i równoczesne. Różnice między tymi metodami oraz ich istotne cechy są omówione w punkcie 2. Punkt 3 jest poświęcony algorytmom zmiany struktury sterowania, w szczególności w metodzie monotonicznej ewolucji struktury (MSE). Propozycja modyfikacji tego algorytmu, polegająca na próbie użycia w nim metody równoczesnej, jest przedstawiona w punkcie 4.

2. Metody sekwencyjne lub równoczesne

W metodach sekwencyjnych dyskretyzacji podlega jedynie sterowanie. Jest ono reprezentowane zazwyczaj funkcją przedziałami wielomianową. Parametry tej funkcji oraz parametry p są zmiennymi decyzyjnymi optymalizacji. Zmienne stanu są wyznaczane – zazwyczaj sekwencyjnie, w kierunku od 0 do t_f – przy użyciu metod stosowanych w rozwiązywaniu zagadnień początkowych równań różniczkowych. Zmienne te są obliczane w każdej iteracji pętli optymalizacji kontrolowanej przez algorytm NLP.

W drugiej grupie – wśród metod równoczesnych – wyróżnia się metody kolokacyjne oraz metody strzałów wielokrotnych (które w dalszych rozważaniach pominiemy). W algorytmach opartych na metodach kolokacyjnych wartości zmiennych stanu nie są obliczane w kosztownym procesie całkowania równań stanu w całym przedziale czasowym. Są one dyskretyzowane w czasie i są dodatkowymi zmiennymi decyzyjnymi w procesie optymalizacji. Dla spełnienia warunków (2), w punktach dyskretyzacji zadawane są dodatkowe ograniczenia równościowe – warunki kolokacji [3]. Warto zaznaczyć, że spełnienie ograniczeń na stan (3) nie wymaga w tej grupie metod stosowania dodatkowego algorytmu – ograniczenia te mogą być dopisane do warunków na zmienne decyzyjne w nieliniowym problemie optymalizacji z ograniczeniami, rozwiązywanym standardową procedurą NLP.

Struktura algorytmu rozwiązywania problemu optymalizacji jest prosta – w jednej pętli optymalizacji jest równocześnie poszukiwane optymalne sterowanie oraz odpowiadające mu trajektorie zmiennych stanu spełniające wszystkie ograniczenia (2–4).

Istotne cechy metod równoczesnych to:

- szerszy niż w metodach sekwencyjnych obszar stabilności,
- wymagane wstępne przybliżenie nie tylko sterowania (jak w metodach sekwencyjnych), lecz także początkowe przybliżenie trajektorii stanu, co ułatwia skierowanie poszukiwania rozwiązania w kierunku oczekiwanego rozwiązania,
- spełnienie ograniczeń dynamicznych (2) i algebraicznych (3) jest realizowane na tym samym poziomie dyskretyzacji,
- rozwiązania „nieostateczne” (*premature)* są bezużyteczne, bo optymalizacja jest prowadzona na aproksymacjach trajektorii, które mogą istotnie odbiegać od dokładnych,
- koszt obliczeniowy jest z jednej strony zmniejszany brakiem całkowania równań stanu w każdej iteracji NLP, ale równocześnie zwiększany dużo większą liczbą zmiennych decyzyjnych w problemie optymalizacji.

3. Algorytm zmiany struktury sterowania

Dodatkowym kryterium podziału metod rozwiązywania problemów sterowania optymalnego może być sposób parametryzacji sterowania. Parametryzacja ta może być zrealizowana jednolicie w całym przedziale czasu, np. w programie DIRCOL [8] sterowanie jest aproksymowane funkcją schodkową albo przedziałami liniową w całym przedziale $[0, t_f]$. Mniejszej liczby zmiennych wymaga sposób niejednolity, w którym inaczej parametryzuje się odcinki funkcji sterowania będące łukami granicznymi, a inaczej łukami wewnętrznymi.

Powszechnie stosowane są algorytmy, w których struktura sterowania jest z góry założona. Do grupy pozostałych metod, które w procesie szukania sterowania optymalnego automatycznie modyfikują jego strukturę, należy np. MISER3 [4] oraz opracowana w naszej katedrze metoda monotonicznej ewolucji struktury MSE [5, 6].

Istotna różnica algorytmów modyfikacji struktury polega na wyborze punktu, w którym ma być wstawiony nowy łuk. W programie MISER jest on dodawany w jednym z końców przedziału czasu. W metodzie MSE jest wyznaczana tzw. funkcja efektywności wstawienia szpilki sterowania $E(t)$. Jej wartości – mówiąc w uproszczeniu – odpowiadają pochodnej wskaźnika jakości sterowania w kierunku przesunięcia trajektorii stanu w t_f spowodowanego wstawieniem szpilki sterowania w chwili t. Przebieg tej funkcji wskazuje punkt, w którym wstawienie nowego łuku rokuje najlepszą poprawę wskaźnika jakości sterowania.

4. Propozycja algorytmu

Motywacją dla podjęcia badań było kilka okoliczności. W metodzie MSE, z zaawansowanym algorytmem modyfikacji struktury sterowania, zastosowano strategię sekwencyjną. Z drugiej strony znane są, wspomniane wyżej, zalety metod równoczesnych.

Trzecim bodźcem były wyniki prowadzonych w katedrze eksperymentów numerycznych, w których rozwiązywane były zadania sterowania optymalnego z niestabilnymi obiektami – wahadłem odwróconym jedno- lub dwuelementowym na wózku [7]. Zbadano obszary zbieżności oryginalnej metody MSE oraz jej modyfikacji polegającej na zastosowaniu strategii równoległej, konkretnie – metody kolokacyjnej Radaua IIA, równoważnej niejawnej metodzie Rungego-Kutty 5. rzędu [2], zalecanej dla systemów niestabilnych [3]. Eksperymenty pokazały, że zastąpienie strategii sekwencyjnej metodą równoczesną może poszerzyć obszar zbieżności nawet trzydziestokrotnie.

W trakcie badań zauważono istotny mankament algorytmu. Pojedyncza iteracja optymalizacji problemu z dużą liczbą ograniczeń równościowych może zakończyć się bez znalezienia rozwiązania, tj. z niezerowym residuum ograniczeń.

Wobec powyższych okoliczności proponujemy algorytm „ratunkowy” wyjścia z punktu niezerowania się residuum. Poniżej przedstawiamy uproszczony schemat wersji dla czasooptymalnego problemu trafienia „z punktu w punkt”. W przypadku zakończenia procesu optymalizacji bez spełnienia wszystkich ograniczeń równościowych należy:

Krok 1: Wyznaczyć dwie trajektorie stanu – obie w sposób sekwencyjny, jedną w kierunku od 0 do t_f oraz drugą, od t_f do 0.

Krok 2: Obliczyć funkcję efektywności zbliżania trajektorii do trajektorii (przy określonej metryce odległości między trajektoriami).

Krok 3: Znaleźć punkty, gdzie wstawienie szpilek sterowania spowoduje największe zbliżenie do siebie obu trajektorii.

Krok 4: Sformułować nowy problemu sterowania optymalnego między znalezionymi punktami i rekurencyjnie go rozwiązać.

Najistotniejsza w tym algorytmie jest zmiana kryterium efektywności wstawienia szpilki sterowania. Zbliżenie do punktu (celu) zastępujemy zbliżeniem do trajektorii. Warto też na marginesie zwrócić uwagę na okoliczność ułatwiającą realizację kroku 2. Otóż aproksymacja trajektorii stanu oparta na węzłach kolokacji pozwala obliczać wariacje trajektorii w obu kierunkach (w przód i wstecz). Wykorzystanie w obliczaniu funkcji efektywności równań wariacyjnych zamiast sprzężonych pozwala skrócić horyzont całkowania. Jest to szczególnie istotne w przypadku obiektów niestabilnych.

Proponowany algorytm ma charakter rekurencyjny, może być oparty na metodzie podziału i ograniczeń. Znalezione rozwiązanie – będące sklejeniem rozwiązań w kolejnych iteracjach – nie jest rozwiązaniem optymalnym, ale powinno być dobrym punktem startowym dla metody pośredniej lub bezpośredniej sekwencyjnej. Zastosowanie algorytmu podziałów i ograniczeń daje też możliwość znalezienia więcej niż jednego rozwiązania lokalnie optymalnego, co prowadzi w kierunku optymalizacji globalnej.

Aktualnie są prowadzone prace nad implementacją algorytmu w środowisku obliczeniowym MATLAB.

Bibliografia

1. Biegler L.T.: *An Overview of Simultaneous Strategies for Dynamic Opyimization*, „Chemical Engineering and Processing", vol. 46, 2007, 1043–1053.
2. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G.: *Solving Ordinary Differential Equations*. Springer 2008.
3. Kameswaran S., Biegler L.T.: *Convergence Rates for Direct Transcription of Optimal Control Problems Using Collocation at Radau Points*, „Computational Optimization and Applications" 41, 1, 2008, 81–126.
4. Jennings L.S., Fisher M.E., Teo K.L., Goh C.J.: *MISER3: Solving optimal control problems – an update*, „Advances in Engineering Software" 13, 1991, 190–196.
5. Szymkat M., Korytowski A.: *Method of monotone structural evolution for control and state constrained optimal control problems*, ECC, Cambridge 2003.
6. Szymkat M., Korytowski A.: *The Method of Monotone Structural Evolution for Dynamic Optimization of Switched Systems*, 47th IEEE Conf. on Decison and Control, Cancun, 2008, 1543–1550.
7. Miller J.: *The Collocation Method in the MSE Algorithm for Bang-bang Optimal Control Problems* (w przygotowaniu).
8. von Stryk O.: *User's Guide for Dircol. A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems,* Technical Report, Technische Universität Darmstadt 2002. ■

Simultaneous Strategies in the MSE method for Optimal Control Problems

Abstract: Simultaneous strategies are regarded as better than sequential methods suited for dynamic optimization – particularly in case of unstable systems. The differences between sequential and simultaneous method are presented. The results of numerical experiments show that substitution of sequential method by simultaneous one in MSE algorithm broadens its convergence range. A new modification of algorithm is proposed.

Keywords: optimal control, numerical solution, discretization, Runge-Kutta scheme, collocation methods

dr inż. Janusz Miller

Adiunkt w Katedrze Automatyki AGH. Dziedziny badań to numeryczne algorytmy rozwiązywania zadań sterowania optymalnego systemów dynamicznych oraz analiza numeryczna, a w szczególności metody rozwiązywania zagadnień brzegowych w równaniach różniczkowych.

e-mail: jmi@ia.agh.edu.pl