Sterowanie optymalne systemami o parametrach rozłożonych z opóźnieniami

Adam Kowalewski

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział EAIiE, Katedra Automatyki

Streszczenie: W artykule dokonano przeglądu problematyki sterowania optymalnego systemami o parametrach rozłożonych z opóźnieniami w warunkach brzegowych. Zaprezentowano podstawowe zagadnienia dotyczące systemów o parametrach rozłożonych takie jak: istnienie i jednoznaczność rozwiązań, sterowanie optymalne rozłożone i brzegowe, sterowanie optymalne ze sprzężeniem zwrotnym, sterowanie czasowo-optymalne, sterowalność oraz modele matematyczne systemów o parametrach rozłożonych.

Słowa kluczowe: sterowanie optymalne, warunki optymalności, istnienie i jednoznaczność rozwiązań, opóźnienia czasowe

Równania różniczkowe z odchylonym argumentem występowały już w pracach Eulera, jednakże systematyczne badanie tych równań rozpoczęto w XX wieku w związku z potrzebami nauk stosowanych, a w pierwszym rzędzie teorii regulacji automatycznej.

W ciągu ostatnich 20 lat dziedzina zastosowań równań różniczkowych z odchylonym argumentem znacznie się rozszerzyła, obejmując nie tylko szereg zagadnień matematyki, fizyki i automatyki, lecz i pewne dziedziny ekonomii i biologii.

Obfitość zastosowań jeszcze bardziej zwiększyła zainteresowanie teorią równań różniczkowych z odchylonym argumentem i obecnie dziedzina ta jest jednym z najbardziej dynamicznie rozwijających się działów automatyki.

W systemach o parametrach rozłożonych równania stanu w większości przypadków stanowią równania różniczkowe cząstkowe z odpowiednio określonymi warunkami początkowymi i brzegowymi. Stąd też równania różniczkowe cząstkowe z odchylonym argumentem znajdują szerokie zastosowanie w problemach sterowania optymalnego systemami o parametrach rozłożonych z opóźnieniem.

Odrębną klasę systemów o parametrach rozłożonych stanowią systemy opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi parabolicznymi z opóźnieniami w warunkach brzegowych. Równania tego typu stanowią w liniowym przybliżeniu uniwersalny model matematyczny procesów dyfuzyjnych, w których opóźnione sygnały ze sprzężenia zwrotnego są wprowadzane na brzeg pewnego obszaru przestrzennego. I tak, dla przykładu w dziedzinie sterowania plazmą [26] wymagane jest ograniczenie plazmy w zadanym ograniczonym obszarze przestrzennym Ω przez wprowadzenie skończonej bariery potencjału elektrycznego lub „zwierciadła magnetycznego" otaczającego obszar Ω. W przypadku plazmy zdominowanej przez zderzenia gęstość cząstek plazmy opisywana jest za pomocą równania różniczkowego cząstkowego typu parabolicznego. Wskutek bezwładności cząstek oraz skończoności potencjału elektrycznego lub natężenia pola „zwierciadła magnetycznego" odbicie cząstek od brzegu obszaru przestrzennego nie jest natychmiastowe. W konsekwencji strumień cząstek na brzegu obszaru Ω w każdej chwili zależy od strumienia cząstek, które uciekły wcześniej, a następnie odbiły się z powrotem do Ω w późniejszej chwili. Prowadzi to do występowania opóźnień czasowych w warunkach brzegowych równania cząstkowego. Zatem czas transportu warunku brzegowego stanowi opóźnienie w warunku brzegowym.

Ze znanych dotychczas prac z zakresu sterowania optymalnego liniowymi systemami o parametrach rozłożonych z opóźnieniami występującymi w warunkach brzegowych są prace [1–14, 16–27].

W pracy [26] zaprezentowano zagadnienia sterowania optymalnego liniowymi systemami parabolicznymi z warunkami brzegowymi typu Neumanna, posiadającymi stałe opóźnienia czasowe. Udowodniono warunki wystarczające na istnienie jednoznacznego rozwiązania dla równania parabolicznego ze stałym opóźnieniem w warunku brzegowym Neumanna. Wyprowadzono warunki konieczne i wystarczające optymalności przy kwadratowych wskaźnikach jakości i ograniczeniach na sterowanie. Korzystając z twierdzenia Schwartza o jądrach podano postać sterowania optymalnego ze sprzężeniem zwrotnym. Uzyskano oszacowania rozwiązań dla jednowymiarowego przypadku systemu parabolicznego z warunkiem brzegowym Neumanna przy ustalonej postaci sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Udowodniono warunki wystarczające na ograniczoność rozwiązań systemu parabolicznego ze stałym opóźnieniem w warunku brzegowym Dirichleta.

W pracy [4] rozważono zadanie sterowania czasowo-optymalnego dla liniowego systemu parabolicznego ze stałym opóźnieniem w warunku brzegowym Neumanna przy ograniczeniu na amplitudę sterowania. Sterowanie optymalne scharakteryzowano za pomocą równania sprzężonego. Wykazano, że sterowanie optymalne jest jednoznaczne i typu bang-bang. Uzyskane rezultaty uogólniono na przypadek nieliniowego sterowania (bez założenia o wypukłości), występującego w pewnych procesach indukcyjnego nagrzewania oraz problemu z ustalonym czasem sterowania.

Natomiast praca [27] dotyczy metod wyznaczania optymalnego sterowania rozłożonego dla liniowych systemów parabolicznych drugiego rzędu ze stałymi opóźnieniami w warunkach brzegowych typu Neumanna. Udowodniono warunki konieczne i wystarczające optymalności oraz zaproponowano metodę iteracyjną wyznaczania sterowania optymalnego dla tej klasy systemów. Zbadano właściwości zbieżności zaproponowanej metody iteracyjnej. Korzystając z metody Galerkina dla elementów skończonych sprowadzono wyjściowy problem do ciągu skończenie wymiarowych problemów aproksymacyjnych. Następnie zastosowano zaproponowane algorytmy obliczeniowe do rozwiązywania tej klasy problemów. Rozważania teoretyczne zilustrowano na przykładzie jednowymiarowego przypadku równania parabolicznego.

W szczególności w pracy [1] zbadano i rozwiązano problem sterowalności dla systemów parabolicznych z opóźnieniami występującymi w warunkach brzegowych typu Neumanna.

Z kolei w pracach [5–9, 11–14, 17–19, 21] oraz [10, 22] zaprezentowano problemy liniowo-kwadratowe dla liniowych systemów o parametrach rozłożonych drugiego rzędu z różnego typu opóźnieniami (stałe opóźnienia czasowe, zmienne opóźnienia czasowe, opóźnienia zadane w postaci całkowej itd.) występującymi odpowiednio w równaniach stanu i warunkach brzegowych typu Neumanna. Ponadto w pracach [16, 20, 23] zbadano i rozwiązano problemy sterowania czasowo-optymalnego rozłożonego i brzegowego dla liniowych systemów parabolicznych drugiego rzędu ze zmiennymi opóźnieniami czasowymi oraz opóźnieniami całkowymi występującymi jednocześnie w równaniach stanu oraz w warunkach brzegowych. Natomiast w pracach [24, 25] zaprezentowano problemy sterowania czasowo-optymalnego brzegowego i rozłożonego dla liniowych systemów parabolicznych i hiperbolicznych nieskończonego rzędu z opóźnieniami typu całkowego występującymi zarówno w równaniach stanu oraz w warunkach brzegowych typu Neumanna.

Odpowiednio w pracach [2, 3] rozważono problemy sterowania optymalnego rozłożonego i brzegowego (n × n) liniowymi systemami parabolicznymi o nieskończonej liczbie zmiennych oraz drugiego rzędu z opóźnieniami występującymi jednocześnie w równaniach stanu oraz w warunkach brzegowych. Wyprowadzono warunki konieczne i wystarczające optymalności przy kwadratowych wskaźnikach jakości i ograniczeniach na sterowanie rozłożone i brzegowe dla przypadku problemu Neumanna.

Bibliografia

1. Avdonin S.A., Gorshkova O.YA.: *Controllability and quasicontrollability of parabolic systems with delay.* „Differentsial'nyje Uravneniya", Vol. 28, No. 3/1992, 442–451 (j. rosyjski).
2. El-Saify H.A.: *Optimal control for n x n parabolic system involving time lag.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 22, No. 3/2005, 240–250.
3. El-Saify H.A.: *Optimal boundary control problem for n × n infinite order parabolic lag system.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 23, No. 4/2006, 433–445.
4. Knowles G.: T*ime-optimal control of parabolic systems with boundary conditions involving time delays.* „Journal of Optimization Theory and Applications", Vol. 25, No. 4/1978, 563–574.
5. Kowalewski A.: *Optimal control of distributed hyperbolic system with boundary condition involving a time lag.* „Archives of Automatic Control and Remote Control", Vol. 33, No. 4/1988, 537–545.
6. Kowalewski A.: *Boundary control of distributed parabolic system with boundary condition involving a time-varying lag.* „International Journal of Control", Vol. 48, No. 6/1988, 2233–2248.
7. Kowalewski A.: *Feedback control of a distributed parabolic system with boundary condition involving a time-varying-lag.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 7, No.2/1990, 143–157.
8. Kowalewski A.: *Minimum time problem for a distributed parabolic system with boundary condition involving a time-varying lag.* „Archives of Automatic Control and Remote Control", Vol. 35, No. 3–4/1990, 143–153.
9. Kowalewski A.: *Optimal control of distributed parabolic systems involving time lags.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 7, No. 4/1990, 375–393.
10. Kowalewski A., Duda J.: *On some optimal control problem for a parabolic system with boundary condition involving a time-varying lag.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 9, No. 2/1992, 131–146.
11. Kowalewski A.: *Optimal control of parabolic systems with time-varying lags.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 10, No. 2/1993, 113–129.
12. Kowalewski A.: *Optimal control of hyperbolic system with time lags.* „Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 3, No. 4/1993, 687–697.
13. Kowalewski A.: *Boundary control of hyperbolic system with time lags.* „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 10, No. 3/1993, 261–272.
14. Kowalewski A.: *Optimal control of distributed parabolic systems with multiple time-varying lags.* „International Journal of Control", Vol. 69, No. 3/1998, 361–381.
15. Kowalewski A.: *Optimal control of a distributed hyperbolic system with time-varying lags.* „International Journal of Control", Vol. 71, No. 3/1998, 419–435.
16. Kowalewski A., Krakowiak A.: *Time optimal control of parabolic systems with multiple time-varying lags.* „Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 8, No. 3/1998, 471–489.
17. Kowalewski A.: *Optimization of parabolic systems with deviating arguments.* „International Journal of Control", Vol. 72, No. 11/1999, 947–959.

18. Kowalewski A.: *Optimal control of distributed hyperbolic systems with deviating arguments*. „International Journal of Control", Vol. 73, No. 11/2000, 1026–1041.
19. Kowalewski A.: *Optimal Control of Infinite Dimensional Distributed Parameter Systems with Delays*. AGH University of Science and Technology Press, Cracow 2001.
20. Kowalewski A., Krakowiak A.: T*ime optimal control of a parabolic system with time lags given in the integral form*. „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 17, No. 3/2000, 209–225.
21. Kowalewski A.: *Time optimal control of hyperbolic systems with deviating arguments*. „International Journal of Control", Vol. 76, No. 6/2003, 557–565.
22. Kowalewski A., Duda J.: *An optimization problem for time lag distributed parabolic systems*. „IMA Journal of Mathematical Control and Information", Vol. 21, No. 1/2004, 15–31.
23. Kowalewski A., Krakowiak A.: *Time-optimal boundary control of a parabolic system with time lags given in the integral form*. „International Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 16, No. 3/2006, 287–295.
24. Kowalewski A., Krakowiak A.: T*ime-optimal boundary control of an infinite order parabolic system with time lags*. „International Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 18, No. 2/2008, 189–198.
25. Kowalewski A.: *Time-optimal control of infinite order hyperbolic systems with time delays*. „International Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 19, No. 4/2009, 597–568.
26. Wang P.K.C.: *Optimal control of parabolic systems with boundary conditions involving time delays*. „SIAM Journal on Control", Vol. 13, No. 2/1975, 274–293.
27. Wong K.H.: *Optimal control computation for parabolic systems with boundary conditions involving time delays*. „Journal of Optimization Theory and Applications", Vol. 53, No. 3/1987, 475–507. ■

Optimal Control of Distributed Parameter Systems with Delays

Abstract: In this article the review of optimal control problems for distributed parameter systems with boundary conditions involving time delays is performed. The principal problems, namely: existence and uniqueness of solutions, distributed and boundary optimal control, optimal feedback control, controllability and mathematical models of distributed parameter systems are presented.

Keywords: optimal control, optimality conditions, existence and uniqueness of solutions, time delays

prof. dr hab. inż. Adam Kowalewski

Urodził się w Krakowie w 1949 r. Otrzymał tytuł magistra inżyniera w zakresie automatyki napędu elektrycznego, stopień naukowy doktora oraz doktora habilitowanego w zakresie automatyki i robotyki na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH odpowiednio w latach 1972, 1977 i 1992. W 2002 r. otrzymał tytuł profesora i obecnie jest profesorem zwyczajnym na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH. Jest również członkiem Sekcji Optymalizacji i Sterowania Komitetu Mechaniki PAN.
e-mail: ako@ia.agh.edu.pl