

# Wyznaczanie parametrów multimezurandu z pomiarów wieloparametrowych

## Część 1. Podstawy teoretyczne – w zarysie

Zygmunt Lech Warsza<sup>1</sup>, Vladimir V. Ezhela<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP

<sup>2</sup>Instytut Fizyki Wielkich Energii (IHEP), RosAtom, Protvino MR, Rosja

**Streszczenie:** Praca jest wprowadzeniem w problematykę wyrażania i oceny wyników pomiarów zbioru wielkości ze sobą skorelowanych, czyli multimezurandu. Poprzedza ona ciągle oczekiwany Suplement 2 do Przewodnika GUM, który obejmie kompleksowo te zagadnienia. W części 1 podane są podstawy teoretyczne poprawnego wyznaczania estymatorów wartości, niepewności i współczynników korelacji składowych multimezurandu z użyciem algebry wektorów losowych. Otrzymuje się je pośrednio przetwarzając dane pomiarowe jednocześnie mierzonych wielkości wejściowych. Przykładami liczbowymi zilustrowano liniowe przekształcenie danych dwu wielkości i rodzaje niewłaściwych oszacowań – uszkodzeń danych, które mogą wystąpić przy nadmiernym zaokrągłaniu. Możliwość wykorzystania tych rozważań w pomiarach będzie tematem drugiej części publikacji.

**Słowa kluczowe:** niepewność, pomiary pośrednie wieloparametrowe, multimezurand, dane skorelowane

### Wstęp

W badaniach naukowych i technicznych oraz w procesach przemysłowych i badaniach środowiska często przeprowadza się równoczesne pomiary kilku wielkości powiązanych deterministycznie oraz statystycznie, tj. skorelowanych wskutek wzajemnych oddziaływań wewnętrznych w badanym obiekcie i wpływów otoczenia. Z pomiarów  $m$  wielkości bezpośrednio mierzonych (wejściowych) można wyznaczyć pośrednio innych  $n$  wielkości (wyjściowych), gdy znane są równania opisujące ich wzajemne zależności. W fizyce te  $n$  wielkości nazywa się obserwablami (od ang. *observables*), a w metrologii – łącznie multimezurandem. Pomiary te wykonuje się w:

- badaniach naukowych na granicy wiedzy różnych dziedzin,
- metrologii o najwyższych dokładnościach przy określaniu podstawowych stałych fizycznych i innych danych odniesienia oraz wyznaczaniu wartości wzorców i jednostek wielkości pochodnych,
- zaawansowanych badaniach technicznych, np. przy identyfikacji *in situ* parametrów przemysłowych obiektów sterowania, w odpowiedzialnych badaniach diagnostycznych i monitoringu urządzeń oraz monitoringu środowiska w celu przeciwdziałania zagrożeniom urządzeń technicznych i zapewnienia bezpieczeństwa obsługi, w pomiarach śledzących przebieg i jakość procesów oraz zasilania ich w energię w warunkach ruchowych,
- badaniach właściwości materiałów i surowców.

W ocenie dokładności powiązanych ze sobą wielkości mierzonych, czyli multimezurandu, należy uwzględniać ich związki deterministyczne oraz występujące w eksperymencie składniki losowe i ich skorelowanie. Można wyróżnić dwa rodzaje wymagań dotyczących dokładności wielkości wyznaczanych pośrednio z pomiarów w danym eksperymencie:

- wystarczy zapewnić niezbędną rozdzielczość instrumentalną i dokładność wielkości wejściowych oraz określić powiązania wzajemne wielkości wyjściowych;
- należy dążyć do uzyskania możliwie największej dokładności pomiarów wartości oraz współczynników kowariancji i korelacji wzajemnej wielkości wyjściowych, tj. aby zdobytej w eksperymencie informacji nie utracić w procesie przetwarzania danych i ich zaokrągłania.

W pierwszym przypadku, charakterystycznym dla wielu pomiarów użytkowych, dominują błędy instrumentalne i zmiany wywołane wpływami otoczenia, a rozrzuty losowe wyników obserwacji zwykle są od nich mniejsze. Po wprowadzeniu korekcji wskazań przyrządów, szacuje się dla poszczególnych wielkości mierzonych poziom nieskompensowanych błędów. Jeśli jest on poniżej dopuszczalnego, to dalsze zwiększanie rozdzielczości i dokładności jest zbyt kosztowne, a nawet wprowadzające dezinformację.

W drugim z tych przypadków, dokłada się wszelkich starań by nieznanne a priori pozostałości systematycznych błędów instrumentalnych – główny składnik niepewności typu B, dla wszystkich mierzonych wielkości były jak najmniejsze w stosunku do zakresu losowych rozrzutów wyników pojedynczych pomiarów. Starannie eliminuje się wpływy wszystkich znanych oddziaływań, czyli czystości pomiarów. Pozostałości, których nie daje się już usunąć mimo odpowiedniego prowadzenia eksperymentu (np. regularne próbkowanie), jak i poprzez odpowiednie procedury obliczeniowe, traktuje się tak, jakby były losowe. Dokonuje się też odpowiednio dużych liczb obserwacji by zminimalizować statystyczne niepewności typu A. Przypadek ten dotyczy w szczególności pomiarów w badaniach poznawczych na granicy wiedzy i przy wyznaczaniu wartości podstawowych stałych fizycznych, publikowanych jako dane odniesienia przez niektóre ośrodki metrologiczne i międzynarodową organizację CODATA.

Rozrzut wyników obserwacji związany jest z właściwościami obiektu badanego i torów pomiarowych. Zwykle ma on charakter statystyczny, tj. przy każdorazowym powtarzaniu uzyskuje się inne wyniki pomiarów w próbkach. W szczególnych przypadkach może też mieć charakter deterministyczny, np. przy badaniu właściwości zbioru określonych obiektów

technicznych lub próbek materialnych. Wówczas wielokrotnie mierzone dane tych samych obiektów mogą powtarzać się i tworzą stały zbiór punktów w przestrzeni wielkości mierzonej. W przetwarzaniu danych wejściowych należy uwzględnić specyfikę każdego z tych przypadków.

Dokładność parametrów multimezurandu wyjściowego zależy od dokładności pomiarów i poprawności oszacowań parametrów multimezurandu wejściowego oraz od dokładności jego dalszego przetwarzania. Obowiązujące obecnie przepisy metrologiczne wraz z Przewodnikiem GUM [1] służą do wyrażania wyniku i niepewności pomiarów tylko pojedynczej wielkości mierzonej, traktowanej tak, jakby miała rozkład normalny. Nie obejmują one wieloparametrowych pomiarów pośrednich, chociaż jest już dla nich opracowywany Supplement 2. Zaokrąglenia liczbowe wartości estymatorów składowych multimezurandu i jego niepewności dokonuje się jak dotąd dowolnie, zwykle wg zaleceń GUM dla pojedynczej wielkości, tj. niepewność – do 2 cyfr, a współczynniki korelacji bliskie 1 – do 3 cyfr po przecinku.

Celem tej pracy jest wprowadzenie w tematykę pomiarów wieloparametrowych i wyznaczania parametrów multimezurandu otrzymywanych pośrednio z ich danych z zastosowaniem metody poprawnego przetwarzania bez strat informacji. Metoda ta wynika z potrzeb współczesnych fizycznych eksperymentów poznawczych. Spróbuje się wstępnie określić zakres jej wykorzystania do wyznaczania dokładności wyniku różnych pomiarów wieloparametrowych, w tym realizowanych automatycznie przez systemy i przyrządy pomiarowe.

Niepewności pomiarów wieloparametrowych omawiano już częściowo, ale bądź tylko teoretycznie, bez odpowiedniej ilustracji numerycznej [8], bądź też dla ograniczonego rodzaju przypadków [9, 10, 14, 15]. W tej części podane zostaną w zarysie podstawy teoretyczne opisu dokładności multimezurandu z wykorzystaniem algebry wektorów losowych oraz konsekwencje nadmiernego zaokrąglenia wartości liczbowych jego danych.

## Opisy multimezurandu

Minimalna struktura danych numerycznych, która służy do wyrażania wyniku dowolnej pojedynczej losowej wielkości mierzonej (mezurandu skalarne), zawiera punkt skupienia danych pomiarowych jako estymator jej wartości oraz przedział ufności, czyli zakres rozrzutu wartości obserwacji pomiarowych o określonym prawdopodobieństwie ich występowania. Dla skalarnej wielkości mierzonej jako estymator stosuje się zwykle wartość średnią (niektóre rozkłady niegaussowskie, np. równomierny, trapezowy mają też inne dokładniejsze estymatory). Przedziały ufności o zadanym prawdopodobieństwie wyznacza się w wartościach odchylenia standardowego.

Szacowanie wyników pomiarów wielu wielkości mierzonych równocześnie we wspólnym eksperymencie, czyli multimezurandu, jest bardziej złożone, gdyż rozrzuty danych jego składników są ze sobą powiązane. Poza estymatorami wartości wielkości wyjściowych należy wyznaczyć ich niepewności z uwzględnieniem skorelowania.

Nawet wyniki poszczególnych pomiarów każdej z  $m$  wielkości wejściowych mogą być powiązane statystycznie ze sobą (autokorelacja), a estymatory tych wielkości są skorelowane wzajemnie. Są one statystycznie niezależne tylko w szczegól-

nych przypadkach, np. gdy sąsiednie (w kolejności wykonywania) wyniki pomiarów pojedynczej wielkości nie zależą od siebie, a różne wielkości wejściowe mierzy się w osobnych eksperymentach.

Z pomiarów można wyznaczyć pośrednio jedynie  $n$  wielkości wyjściowych, powiązanych z wielkościami wejściowymi znanym układem  $n$  równań niezależnych. Od tych funkcji zależy też zmiana geometrii obszaru opisującego łącznie rozrzuty wyników pomiaru. Gdy  $n$  badanych wielkości losowych traktuje się tak, jakby miały rozkłady równomierne i ich wartości uzyskano w niezależnych eksperymentach, to obszar rozrzutu danych jest wówczas opisywany  $n$ -wymiarowym hiperprostokątem o bokach zorientowanych równoległe do osi składników multimezurandu. Koniec wektora średniego znajduje się w środku tej bryły, a boki hiperprostokąta są przedziałami ufności o określonej stałej gęstości prawdopodobieństwa  $p(x_i) = const$ , jednakowej dla wszystkich elementów multimezurandu. Otrzymane z pomiarów szerokości przedziałów mogą różnić się liczbą cyfr znaczących. Ujednocila się je i podaje w wartościach odchylenia standardowego  $\sigma$ , bądź procentowo. Ten kształt obszaru rozrzutu danych pomiarowych nie jest jednak właściwym modelem dla wielkości skojarzonych statystycznie w eksperymencie pomiarowym, gdyż nie uwzględnia ich skorelowania. Rozrzut danych multimezurandu należy wówczas opisywać wspólnym  $n$ -wymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa o  $n$  wielkościach mierzonych jako współrzędnych. Gdy każda z tych wielkości ma rozkład normalny, to i rozkład  $n$ -wymiarowy też będzie normalny. Dla dwu parametrów w układzie prostokątnym  $x, y$  otrzymuje się

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho_{xy}xy}{\sigma_x\sigma_y}\right)\right) \quad (1)$$

gdzie:  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$  – wariancje,  $\rho_{xy} = E(x-\bar{x})(y-\bar{y})$  współczynnik korelacji,  $\bar{x}, \bar{y}$  – wartości średnie,

Równanie linii o stałej gęstości prawdopodobieństwa  $p(x, y) = const$  wyznacza się z (1) przez przyrównanie wykładnika do wartości stałej. Dla 0,5 otrzymuje się

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy}\frac{(x-\bar{x})}{\sigma_x}\frac{(y-\bar{y})}{\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} = 1 - \rho_{xy}^2 \quad (2)$$

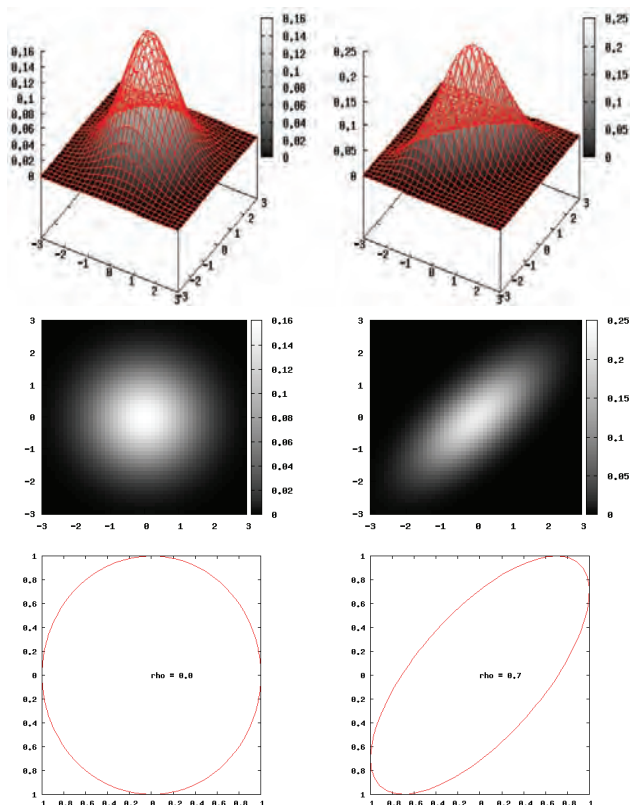
Jest to równanie elipsy o środku położonym w końcu wektora średniego  $[\bar{x}, \bar{y}]^T$  i wpisanej w prostokąt  $\pm\sigma_x, \pm\sigma_y$ . Wartości średnie  $\bar{x}, \bar{y}$  oraz obie wariancje  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$  i współczynnik korelacji  $\rho_{xy}$  oblicza się z wyników pomiarów w znany powszechnie sposób. Postacie rozkładu (1) dla dwu wartości współczynnika korelacji  $\rho_{xy}$  i przebiegi linii o stałej gęstości prawdopodobieństwa  $\rho(x, y) = const$  podano na rys. 1.

Przy  $\sigma_x \neq \sigma_y$  i braku skorelowania ( $\rho_{xy} = 0$ ) (lewa figura na rys. 1), osie elipsy wpisanej w prostokąt są równoległe do jego boków  $2\sigma_x, 2\sigma_y$ . Dla współczynnika korelacji  $0 < |\rho_{xy}| < 1$ , dłuższa oś elipsy jest nachylona do osi odciętych  $x$  pod kątem

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan 2\rho_{xy} \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Taką elipsę dla  $\rho_{xy} = +0,7$  przedstawia dolna prawa figura z rys. 1 [12], a dla ujemnego współczynnika  $\rho_{xy}$  (rys. 2).

Punkty styczności elipsy z bokami prostokąta  $\pm\sigma_y, \pm\sigma_x$  są odległe od osi układu  $x, y$  położonego w środku elipsy

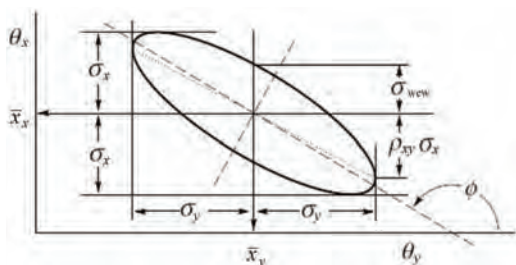


**Rys. 1.** Dwuwymiarowy rozkład normalny gęstości prawdopodobieństwa  $p(x,y)$  dla dwu współczynników korelacji:  $\rho_{xy}=0$  oraz  $\rho_{xy}=0,7$ . Poniżej: przykłady poziomicy dla  $p(x,y)=\text{const}$  [12]

**Fig. 1.** Two-parameter Normal PDF-s  $p(x,y)$  of correlation coefficient  $\rho_{xy}=0$  and  $\rho_{xy}=0,7$ . Below: border line of data dispersion space for  $p(x,y)=\text{const}$  [12]

odpowiednio o  $x_0 = \pm \rho_{xy} \sigma_x$  i o  $y_0 = \pm \rho_{xy} \sigma_y$ . Przy pełnej korelacji  $\rho_{xy} = \pm 1$ , elipsa degeneruje się do jednej z przekątnych prostokąta.

Przy przetwarzaniu danych trzech lub większej liczby skojarzonych losowo wielkości mierzonych opis analityczny wielowymiarowego rozkładu normalnego komplikuje się. Bardzo przydatnym narzędziem matematycznym do opisu i analizy wielu wielkości skojarzonych o rozkładach normalnych jest algebra wektorów losowych [5–13]. W pomiarach pośrednich zbiór danych  $m$  wielkości wejściowych, przedstawiony jako wektor losowy  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , ulega przekształceniu za pomocą operatora  $\mathbf{F}$  w multimezurand wyjściowy opisany wek-



**Rys. 2.** Zależności dla elipsy stałej gęstości  $p(x,y)=\text{const}$  i o współczynniku korelacji  $\rho_{xy} < 0$

**Fig. 2.** Formulas for ellipse of  $p(x,y)=\text{const}$  and of the of correlation coefficient  $\rho_{xy} < 0$

torem  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  o  $n$  elementach. Jest on powiązany jest z  $\mathbf{X}$  układem równań zapisanym ogólnie jako:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F} \mathbf{X} \tag{3}$$

W ogólnym przypadku operator  $\mathbf{F}$  jest nieliniowy. Dla przekształcenia liniowego i afinicznego (tj. z dodanymi wartościami stałymi) otrzymuje się liniowe równanie macierzowe, a elementami macierzy  $\mathbf{F}$  o wymiarach  $m \times n$ , (dla  $n \leq m$ ) w opisie danych pomiarowych są liczby.

Podstawowa struktura do liczbowego oszacowania multimezurandu powinna zawierać wektor średni o  $n$  składowych oraz opis obszaru jego rozrzutu o zadanej gęstości prawdopodobieństwa. Dla  $n$ -wymiarowego rozkładu normalnego obszar o  $p(x_1, \dots, x_n)$  jest ograniczony  $n$ -wymiarową hiperelipsoidą ze środkiem w końcu wektora średniego. Hiperelipsoidę dla rozkładu wyjściowego multimezurandu określa analitycznie macierz kowariancji o wymiarach  $n \times n$ . Z niej wynika macierz współczynników korelacji nazywana korelatorem.

Obie te macierze powinny być półdefinitnie określone [5–7], czyli powinny być dodatnie lub równe zero ich wartości własne  $\lambda_i$ . Dla dowolnej macierzy  $\mathbf{A}$  są to jednokrotne pierwiastki równania charakterystycznego

$$\det [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] = 0$$

Macierze kowariancji  $\mathbf{c}_Y$  i  $\mathbf{c}_X$  wektorów wejściowego i wyjściowego są powiązane równaniem

$$\mathbf{c}_Y = \mathbf{S} \mathbf{c}_X \mathbf{S}^T \tag{4}$$

gdzie:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{\partial (\mathbf{Y})}{\partial (\mathbf{X})} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{5}$$

– macierz współczynników wrażliwości nazywana macierzą czułości.

Korelator wielkości wyjściowych  $\mathbf{r}_Y$  otrzymuje się bezpośrednio z macierzy kowariancji  $\mathbf{c}_Y$ , lub przekształcając korelator wejściowy  $\mathbf{r}_X$  wg (4).

Jeśli któraś z wielkości ma niegaussowski rozkład, to obszar rozrzutu jest o innym kształcie i do jego opisu trzeba stosować inne funkcje, w tym kopuły (ang. *copulas* [7]).

Wyniki pomiarów dwuparametrowych o rozkładzie (1) można przedstawić jedną z dwu równoważnych struktur macierzowych: wektor średni i macierz kowariancji  $\mathbf{c}_Y \equiv \mathbf{c}_{xy}$  lub wektor średni z niepewnościami i korelator  $\mathbf{r}_{xy}$ .

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \cdot \rho_{xy} \\ \sigma_x \sigma_y \cdot \rho_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} \bar{x} \pm \sigma_x \\ \bar{y} \pm \sigma_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{6}$$

Równanie charakterystyczne macierzy  $\mathbf{c}_{xy}$  ma postać

$$\det |\mathbf{c}_x - \lambda \mathbf{1}| = \lambda^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \lambda + \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) = 0 \tag{6a}$$

a jej wartości własne, czyli pierwiastki tego równania

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 - 4\sigma_x^2\sigma_y^2(1 - \rho_{xy}^2)} \quad (6b)$$

W przypadkach krańcowych: dla  $\rho_{xy} = 0$  elipsa jest położona poziomo, a pierwiastki (6a)  $\lambda_1 = \sigma_x^2$ ,  $\lambda_2 = \sigma_y^2$ , są kwadratami obu średnic; zaś dla  $|\rho_{xy}| = 1$  elipsa staje się jedną z przekątnych prostokąta, gdyż  $\lambda_2 = 0$ , a  $\lambda_1 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ . Dla  $0 \leq \rho_{xy} \leq 1$  oba pierwiastki spełniają warunek  $\lambda_{1/2} \leq 0$ , a długości średnic pochylonej elipsy wynoszą [4]:

$$a^2 = -\frac{1 - \rho_{xy}^2}{\lambda_2}, \quad b^2 = -\frac{1 - \rho_{xy}^2}{\lambda_1}$$

Dotyczy to też pierwiastków  $\lambda'_{1/2} = 1 \pm \rho_{xy}$  równania  $(1 - \lambda')^2 - \rho_{xy}^2 = 0$  dla macierzy korelacji  $\mathbf{r}_{xy}$ . Jej elipsa o półosiach  $(1 \pm \rho_{xy})^{-1}$  wpisana jest w kwadrat  $\pm 1$  i styczna w  $\pm \rho_{xy}$ . Obie macierze  $\mathbf{c}_{xy}$ ,  $\mathbf{r}_{xy}$  są więc półododatnio określone.

Transformację liniową mierzonych bezpośrednio dwu parametrów ilustruje analitycznie i liczbowo przykład 1.

### Przykład 1

Mezurand wyjściowy o dwu parametrach  $x, y$  wyznacza się z wejściowych danych pomiarowych  $\zeta, \eta$  o dwuparametrowym rozkładzie normalnym jako ich sumę i różnicę. Ta liniowa operacja ma postać wektorową

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \bar{\zeta} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\zeta} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\zeta} + \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} - \bar{\eta} \end{bmatrix}$$

Standardowe niepewności dla każdej ze składowych wektora wyjściowego  $[x, y]^T$  można otrzymać znaną metodą liniowej propagacji niepewności. Są one ze sobą skojarzone statystycznie. Ich współczynnik korelacji  $\rho_{xy}$  można obliczyć metodą wektorową. Z równań (4)–(6) wynika

$$\mathbf{c}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 & \sigma_\zeta\sigma_\eta\rho_{\zeta\eta} \\ \sigma_\zeta\sigma_\eta\rho_{\zeta\eta} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_\zeta^2 - \sigma_\eta^2 \\ \sigma_\zeta^2 - \sigma_\eta^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_\zeta^2 + \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\zeta\sigma_\eta\rho_{\zeta\eta}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_\zeta^2 + \sigma_\eta^2 - 2\sigma_\zeta\sigma_\eta\rho_{\zeta\eta}}$$

Elementy niediagonalne macierzy kowariancji  $\mathbf{c}_{xy}$  nie zależą od  $\rho_{\zeta,\eta}$ . Z  $\mathbf{c}_{xy}$  wyznacza się korelator

$$\mathbf{r}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

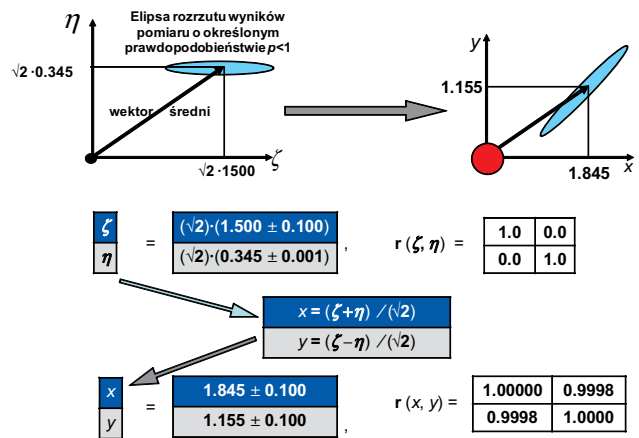
$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_\zeta^2 - \sigma_\eta^2}{\sigma_x\sigma_y}$$

– współczynnik korelacji zależny od  $\rho_{\zeta,\eta}$  występującego we wzorach dla  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ .

Przy nieskorelowanych składowych wektora wejściowego  $[\zeta, \eta]^T$ , tj. dla  $\rho_{\zeta,\eta} = 0$ , macierz  $\mathbf{c}_{xy}$  upraszcza się

$$\mathbf{c}_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 & \sigma_x^2 - \sigma_y^2 \\ \sigma_x^2 - \sigma_y^2 & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

i wówczas:



**Rys. 3.** Przykład liniowego przekształcenia wektora losowego  $[\zeta, \eta]^T$  w dwuelementowy wektor  $[x, y]^T$  jako pośrednio mierzony mezurand wraz z oszacowaniem jego niepewności i macierzy korelacji  $\mathbf{r}(x, y)$

**Fig. 3.** Example of linear transformation of the random vector  $[\zeta, \eta]^T$  to the vector  $[x, y]^T$  as indirectly evaluated two-variable measurand together with estimation of its uncertainty and correlation matrix  $\mathbf{r}(x, y)$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\sigma_\zeta^2 + \sigma_\eta^2}$$

oraz

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_\zeta^2 - \sigma_\eta^2}{\sigma_\zeta^2 + \sigma_\eta^2}$$

Na rys. 3 u góry przedstawiono schematycznie operację przekształcania wektora wejściowego o nieskorelowanych składowych, a poniżej dane liczbowe obu wektorów.

Z wartości elementów korelatora  $\mathbf{r}(x, y)$  wynika, że niepewności składowych wektora wyjściowego są silnie ze sobą skorelowane. Jednakże zaokrąglenie wartości niediagonalnych elementów tego korelatora do 3 cyfr znaczących, jak to zaleca Przewodnika GUM w punkcie 7.2.6, spowodowałoby degenerację elipsy o  $\rho_{xy} = 1$  do przekątnej prostokąta, tj. do całkowicie deterministycznej współzależności niepewności obu składowych.

Ujęcie wektorowe można również stosować w analizie i prognozowaniu traktowanych losowo błędów granicznych pomiarów wieloparametrowych. Jeśli nie można *a priori* oszacować wartości ich współczynników korelacji, to dla dużych wartości przyjmuje się równe 1 i przewidywane znaki, bądź najniekorzystniejszy ich wariant. Natomiast gdy korelacja może być niewielka, zakłada się jej współczynniki równe zeru.

### Zniekształcanie wyników pomiarów wieloparametrowych przy nadmiernym zaokrągłaniu

Najprostszą, powszechnie stosowaną transformacją danych pomiarowych jest zaokrąglenie liczbowych estymatorów ich wartości i niepewności oraz elementów macierzy kowariancji (lub korelacji). Jest to operacja nieliniowa, którą dla skojarzonych danych wieloparametrowych można obecnie stosować jedynie zgodnie z zasadami probabilistyki, gdyż w metrologii prawnej nie ma jeszcze żadnych zaleceń, jak poprawnie zaokrąglać dane multimezurandu.



Estymatory wartości oczekiwanej, niepewności i współczynniki korelacji mierzonego pośrednio mezurandu  $\mathbf{Y}$  są ze sobą powiązane przez zależności od parametrów mezurandu wejściowego  $\mathbf{X}$ . Zalecane w GUM niezależne zaokrąglenie składowych wektora i elementów macierzy korelacji może dać wynik niepoprawny. Dla wyników badań w fizyce oraz wyznaczania wartości i dokładności stałych fizycznych V. Ezhela zaproponował, aby konsekwentnie stosować zasadę zachowywania półdodatniej określoności macierzy kowariancji przy wszelkich przekształceniach, tj. by utrzymywać koniec zaokrąglanego wektora wewnątrz otrzymywanego obszaru rozrzutu dla pierwotnych (niezaokrąglonych) danych pomiarowych. W literaturze naukowej znaleźć można wiele przykładów prezentacji wyników pomiarów i ich oszacowań oraz procedur wymiany danych, które nie spełniają takich wymagań (patrz [3] i uwagi oznaczone symbolem ■ na końcu [6]). Oto przyczyny powstawania nieprawidłowości:

- (i) Podaje się wartości średnie i odchylenia standardowe składowych mezurandu, a pomija korelator.
- (ii) Dane liczbowe estymatorów są „nadmiernie zaokrąglane”, skutkiem czego macierz kowariancji przestaje być dodatnio określona.
- (iii) Końcowy, zbytnio zaokrąglony wektor średni wychodzi poza granice obszaru rozrzutu niezaokrąglonych wyników obserwacji pomiarowych na wiele odchyłeń standardowych. Jest to najbardziej szkodliwa – ukryta dezinformacja, gdyż oszacowanie niepewności wektora jest związane z rozmiarami tego obszaru rozrzutu.

Na rys. 4 pokazano przykłady takich zniekształceń dla początkowo poprawnych oszacowań wyniku mezurandu jako wektora  $[x, y]^T$  o wartościach składowych z rys. 3, które są konsekwencją:

- zignorowania korelacji (2),
  - zaokrąglenia elementów korelatora do 3 cyfr po przecinku wg zalecenia GUM (3),
  - zaokrąglenia ostatniej jednej lub dwóch cyfr znaczących dla wartości średnich składowych wektora i ich niepewności, dokonane wg zaleceń GUM dla mezurandu skalarnego (4).
- Przypadki te oszacujemy liczbowo względem wartości poprawnych dla surowych danych pomiarowych z przykładu 1.

## Przykład 2

Wyniki pomiarów pośrednich mezurandu  $\mathbf{Y}$  wg rys. 3:

$$\mathbf{Y} = [1,845(100); 1,155(100)]$$

4a. Zaokrąglenie pojedynczej ostatniej cyfry:

$$\mathbf{Y}_1 = [1,84(10); 1,16(10)]$$

Wektor różnicy:  $\Delta\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y} = [-0,005; 0,005]$

4b. Zaokrąglenie dwu ostatnich cyfr:

$$\mathbf{Y}_2 = [1,8(10); 1,16(10)]$$

Wektor różnicy:  $\Delta\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y} = [-0,045; 0,045]$

W analizie macierzowej wektorów losowych do oceny położenia końca wektora zaokrąglonego względem centrum elipsoidalnego obszaru rozproszenia stosuje się miarę odległości wg Mahalanobisa [13], w której różnice współrzędnych są odniesione do odchyłeń średnich standardowych. Otrzymuje się wtedy formę kwadratową

$$\chi^2 = \Delta\mathbf{Y} \cdot \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \mathbf{r}(x, y)^{-1} \cdot \Delta\mathbf{Y}^T \quad (7)$$

Dla elipsy stycznej wewnątrz do boków prostokąta  $\pm(\sigma_x, \sigma_y)$  jest  $\chi^2 = 1$ .

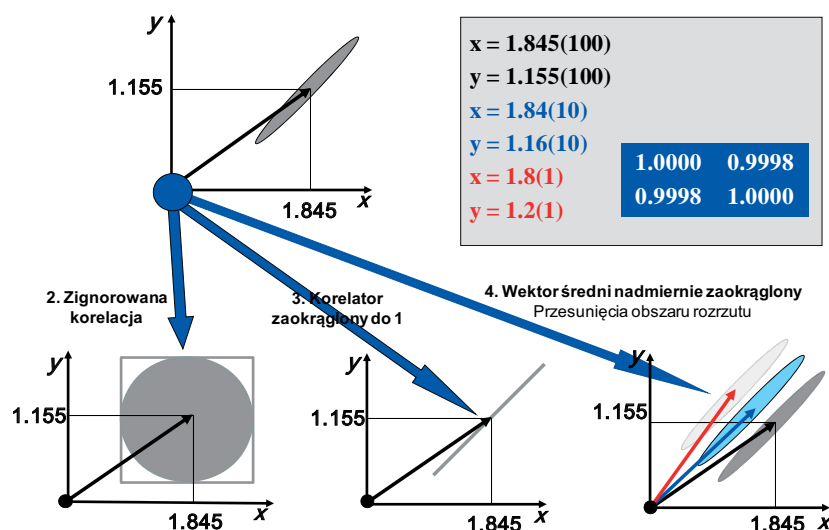
Dla przypadków 4a i 4b zaokrąglenia wektora otrzymano:

$$\chi_1^2 = [-0,005; 0,005] \cdot \frac{1}{0,01} \cdot \frac{1}{1 - 0,9998^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0,9998 \\ -0,9998 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,005 \\ 0,005 \end{bmatrix} = 25 \gg 1$$

$$\chi_2^2 = [-0,045; 0,045] \cdot \frac{1}{0,01} \cdot \frac{1}{1 - 0,9998^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0,9998 \\ -0,9998 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,045 \\ 0,045 \end{bmatrix} = 2025 \gg 1!$$

Oba zaokrąglone wektory średnie wychodzą więc znacznie poza obszar rozproszenia pierwotnych, tj. niezaokrąglonych danych na wiele odchyłeń standardowych. Autorzy publikacji często jednak obszar ten wiążą błędnie z końcem zaokrąglonego wektora, jak to pokazano na rys. 4.

Tak więc zaokrąglenie składowych wektora średniego i ich niepewności wg zaleceń GUM może dać wysoce niepoprawny rezultat. Błąd ten trudno jest wykryć i skorygować bez dostępu do danych oryginalnych. Wynika stąd konieczność jak najszybszej normalizacji procedury zapisu danych pomiarowych i przetwarzanych oraz sposobu ich zaokrąglenia w pomiarach wieloparametrowych.



Rys. 4. Warianty nieprawidłowego przedstawiania danych skorelowanych

Fig. 4. Examples of not proper presentation of correlated two-parameter data

## Podsumowanie części 1

W artykule omówiono w zarysie zasady opisu skojarzonych wieloparametrowych wielkości losowych i propagację ich niepewności przy liniowym przetwarzaniu wyników ich pomiarów oraz pośredniego wyznaczania parametrów multimezurandu wyjściowego [3, 5, 6]. Zaokrąglenia wartości średnich, niepewności i współczynników korelacji wielkości składowych tego mezurandu są ze sobą powiązane. Dla wielkości modelowanych wieloparametrowym rozkładem normalnym bardzo przydatnym w praktyce narzędziem matematycznym jest algebra wektorów losowych. Stosuje się ją do szacowania wyników eksperymentów w fizyce i w metrologii o najwyższej dokładności – przy wyznaczaniu wartości liczbowych jednostek miar i podstawowych stałych fizycznych.

W pomiarach wieloparametrowych nie można rutynowo korzystać z procedur opracowanych i znormalizowanych dla pojedynczej wielkości mierzonej. W pracach [3, 5, 6] zaleca się, aby dla fizycznych eksperymentów poznawczych w procedurze przetwarzania wyników pomiarowych po każdym przekształceniu śledzić zmiany granic obszaru rozrzutu i powiązanie wektora wartości średniej z tym obszarem, tj. sprawdzać, czy jego wierzchołek nadal leży wewnątrz obszaru rozproszenia przekształconych, lecz niezaokrąglonych danych pomiarowych.

Decyzja o ostatecznej formie cyfrowej prezentacji parametrów multimezurandu wyznaczonych pośrednio z wyników pomiarów, tj. zaokrąglenie jego składowych i niepewności oraz współczynników korelacji, zależy w decydującym stopniu od dokładności i powtarzalności wyników otrzymanych w początkowej części systemu pomiarowego i od liczności elementów ich próbek pomiarowych. Bez tych danych ocena dokładności multimezurandu wyjściowego nie jest w pełni możliwa, gdyż decydują one o ostatecznym zaokrągleniu jego parametrów.)

Pomiary wieloparametrowe coraz powszechniej występują w różnych badaniach technicznych i użytkowych. Wyznaczanie i zaokrąglenie wyników takich pomiarów i sposób numerycznej prezentacji ich danych są obecnie dowolne, nie objęte żadnymi normami ani zaleceniami. W fizyce i w metrologii oraz wszędzie tam, gdzie stosuje się zautomatyzowane elektroniczne systemy do pomiarów wieloparametrowych niecierpiąca zwłoki jest standaryzacja sposobu opisu dokładności tych systemów oraz procedur przetwarzania, wyznaczania i prezentacji wyników pomiarów z wykorzystaniem współczesnej statystyki matematycznej. Obok stopniowego wdrażania opisów uniwersalnych, w tym algebry wektorów losowych, mogą tu znaleźć zastosowanie inne wyspecjalizowane narzędzia matematyczne, takie jak statystyka na powierzchniach krzywoliniowych [2] dla zależności silnie nieliniowych oraz teoria kopuł [9].

Aby przybliżyć stosowanie przedstawionego podejścia w technice pomiarowej, w drugiej części pracy zostaną omówione zastrzeżenia do sformułowań w kilku zaleceniach Przewodnika GUM związanych z pomiarami wieloparametrowymi i przeanalizowany szczegółowo przykład numeryczny H.2. Przedstawione zostaną reguły zaokrąglenia wyników tych pomiarów, które należy włączyć do opracowywanego obecnie Suplementu 2.

## Bibliografia

1. Guide to the expression of uncertainty in measurement, ISO/IEC Guide 98:1995, 2nd ed. (Wyrażanie Niepewności Pomiaru Przewodnik. – tłumaczenie z komentarzami J. Jaworskiego, GUM – Alfavero Warszawa 2002).
2. Pennes X.: Intrinsic Statistics on Riemannian Manifolds: Basic Tools for Geometric Measurements, *Journal of Math., Imaging and Vision* 25 (2006) 127.
3. Ezhela V.: A multi-measurand ISO GUM supplement is urgent. *CODATA DSJ*, 6 s. 676–789 [Errata: *DSJ*, 7 (2007) E2-E21].
4. Korn G.A., Korn T.M.: *Mathematical book for scientists and engineers*. McGraw-Hill Book Co, New York 1968, dział 2.4.
5. Ezhela V.: Comments on some clauses of GUM which provoking the incorrect presentation of measured data in scientific literature. *Materiały Kongresu Metrologii KM 2010 (tekst CD i abstrakt Pl.)*, Politechnika Łódzka<sup>1)</sup>.
6. Ezhela V.: *Physics and metrology*. *Materiały Kongresu Metrologii KM2010 (tekst CD i abstrakt Pl.)*, Politechnika Łódzka.
7. Pawłowski J.: *Wprowadzenie do teorii kopuł*. Kraków, marzec 2009, Internet.
8. Muciek A.: *Matematyczny model propagacji niepewności w pomiarach pośrednich*. *Podstawowe Problemy Metrologii*, *Materiały Sympozjum ppm'03*, seria: *Konferencje nr 5*, Oddz. PAN w Katowicach, 2003, s. 593–604.
9. Krystek M.P.: *From Univariate to Multivariate Uncertainty Calculations*. PTB [[http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/1008/1008.2700v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1008/1008.2700v1.pdf)].
10. Catelani M., Ciani L., Zanobini A.: Some remarks on a bivariate analysis in the propagation of measurement uncertainty as an alternative approach to the Monte Carlo metod. *CD Proceedings of 17<sup>th</sup> Symposium IMEKO TC 4, 3<sup>rd</sup> Symposium IMEKO TC19 and 15<sup>th</sup> IWADC Workshop Instrumentation Sept. 8–10 2010, Kosice, Slovakia*, paper 82.
11. Warsza Z.L., Ezhela V.: *O konieczności standaryzacji metod opisu i publikowania rezultatów pomiarów wieloparametrowych*. *Pomiary Automatyka Komputery w gospodarce i ochronie środowiska (PAKgoś) nr 4 2010*.
12. Nakamura K. et al. (Particle Data Group): *Review of Particle Physics* *J. Phys. G* 37, 075021, July 2010, [<http://pdg.lbl.gov/2010/reviews/rpp2010-rev-statistics.pdf>].
13. Mahalanobis distance. [[http://en.wikipedia.org/wiki/Mahalanobis\\_distance](http://en.wikipedia.org/wiki/Mahalanobis_distance)].
14. Gajda J., Szyper M.: *Modelowanie i badania symulacyjne systemów pomiarowych*. Wyd. Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH +Jartek s.c. Kraków 1998, (rozdz. 7, s. 335–408).
15. Zeier M.: *On the analysis of multidimensional quantities in measurement comparisons*, *Conference of Precision EM Measurements Torino*, July 2006 p. 458–459.

<sup>1)</sup> Na życzenie można otrzymać polskie tłumaczenie angielskich tekstów [5, 6].

## Evaluation of multimeasurand parameters from multivariable measurements

### Part 1 Outline of the theoretical backgrounds

**Abstract:** A publication is a brief introduction to the principles of the correct numerical expression and evaluation of multiparameter measurement results. The publication precedes still unpublished Supplement 2 of the Guide GUM, which has to comprehensively address these issues. Part 1 provides the theoretical basis of determining the estimates, uncertainties and correlation coefficients of the indirectly measured multi-measurand processed from data of the simultaneously measured variables. In discussing the algebra of random vectors is used. Numerical examples illustrate the linear transformation of two variables and the types of improperly evaluated results – data corruption that may occur with over-rounding. The possibility of application these considerations in the measurement will be considered in the second part of this publication.

**Keywords:** uncertainty, indirect multidimensional measurements, multimeasurand, correlated data

**Appendix:** In order to implement presented here the procedure to applied measurements in the Part 2 will be discussed some objections to the wording of few recommendations and an example numerical H.2 of Guide GUM. Submitted will be also rounding rules of multiparameter measurements should be included to the currently prepared Supplement 2.

#### doc. dr inż. Zygmunt L. Warsza

Ukończył Miernictwo Elektryczne na Politechnice Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–63 (i 1994–95), Politechnika Warszawska 1960–70; zorganizował i prowadził: Wydział Transportu Politechniki Świętokrzyskiej (dziekan 1970–76), Ośrodek Aparatury Pomiarowej IMGW 1978–82, Zakład Automatyki i Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej 1983–91. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–94. W latach 1983–92 i 1995–2002 wykładał na Politechnice Radomskiej metrologię i diagnostykę techniczną. Obecnie: w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Specjalista z kilku dziedzin pomiarowych. Autor ok. 130 publikacji, 2 monografii, wielu prac badawczych, konstrukcyjnych i patentów, promotor 2 doktorantów.

e-mail: [zlw@op.pl](mailto:zlw@op.pl)



#### dr Vladimir V. Ezhela

W 1968 ukończył Moskiewski Instytut Fizyki i Techniki (MPTI) ze specjalnością fizyka jądrowa. Od 1968 pracuje w Instytucie Fizyki Wielkich Energii IHEP (Protvino, rejon moskiewski): 1971 aspirantura MPTI pod kierunkiem akademika A. A. Logunova, od 1971 w pionie teoretycznym IHEP, 1977–2003 starszy pracownik naukowy, kierownik Centrum Danych Fizyki Cząstek (PPDC), 2004 – główny pracownik naukowy w PPDC IHEP. Autor kilkudziesięciu publikacji naukowych, w tym międzynarodowych, współpracuje z CODATA.

e-mail: [Vladimir.Ezhela@ihep.ru](mailto:Vladimir.Ezhela@ihep.ru)



REKLAMA

My wiemy **kto** wie...



# www.automatyka.pl

Serwis branżowy [www.automatyka.pl](http://www.automatyka.pl) gromadzi informacje o produktach i usługach z branży automatyki przemysłowej. Zasoby Serwisu tworzone są samodzielnie przez zarejestrowane firmy. Każda z nich wprowadza informacje o własnej ofercie, produktach, usługach, wydarzeniach. Dzięki temu Serwis prezentuje żywy, stale aktualny obraz branży. Jest szybkim i skutecznym środkiem komunikacji pomiędzy uczestnikami rynku.

www.automatyka.pl – cała branża w zasięgu ręki