

dr inż. Andrzej Ruszewski
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny

STABILIZACJA UKŁADÓW CAŁKUJĄCYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM ZA POMOCĄ UŁAMKOWEGO REGULATORA PD

W pracy rozpatrzono problem stabilności układów regulacji automatycznej złożonych z regulatora PD ułamkowego rzędu oraz obiektu całkującego ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Wykorzystując klasyczną metodę podziału D podano proste analityczno-komputerowe metody wyznaczania obszarów stabilności na płaszczyźnie parametrów rozpatrywanego układu regulacji. Zaproponowane metody zastosowano także do wyznaczania obszarów stabilności dla zadanych zapasów stabilności modułu i fazy.

STABILIZATION OF FRACTIONAL-ORDER INTEGRATOR PLANTS WITH TIME DELAY USING FRACTIONAL PD CONTROLLER

The paper presents the stability problem of control systems composed of a fractional-order PD controller and a integrator plant of a fractional order with time delay. Using the classical D-partition method, a simple and efficient computational method for determining stability regions in the controller and plant parameters space is given. The presented method is also used for obtaining stability regions for specified gain and phase margins requirements.

1. WSTĘP

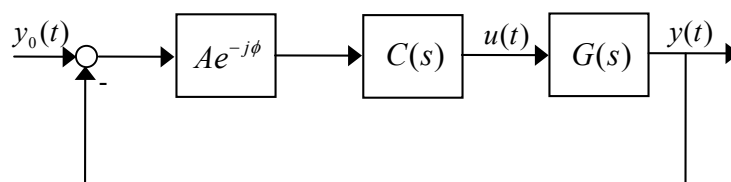
Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID) jest nadal podstawowym urządzeniem wykorzystywanym w przemysłowych układach automatyki. Związane jest to między innymi z prostotą działania, łatwością instalacji oraz niskim kosztem. Literatura na temat doboru wartości parametrów regulatora zapewniających określone kryteria jakości (syntezy parametrycznej) jest obszerna, np. [1, 7, 14, 15].

W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania układami dynamicznymi opisanymi ułamkowymi równaniami różniczko-całkowymi, np. [8-10, 16]. Regulator PID ułamkowego rzędu, określony jako $PI^\lambda D^\mu$, został zaproponowany w pracy [11]. W regulatorze tym rząd całkowania λ oraz różniczkowania μ są w ogólnym przypadku dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Problem doboru nastaw regulatorów ułamkowego rzędu dla obiektów regulacji bez opóźnienia transportowego rozpatrywany był między innymi w pracach [4, 6, 10, 17]. Wykazano tam, że zastosowanie regulatora ułamkowego $PI^\lambda D^\mu$ o pięciu stopniach swobody poprawia wskaźniki jakości regulacji. Badania przeprowadzono dla modeli obiektów regulacji całkowitego i ułamkowego rzędu. W pracy [5] rozpatrzono problem stabilności układów regulacji złożonych z ułamkowego regulatora i obiektów ułamkowego rzędu z opóźnieniem.

W niniejszej pracy rozpatrzony zostanie problem badania stabilności układów regulacji automatycznej złożonych z regulatora PD^μ i obiektu całkującego ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Zostaną podane analityczno-komputerowe metody wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów rozpatrywanego układu regulacji. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D oraz podejściu przedstawionym w pracach [12, 13].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej pokazany na rys. 1.

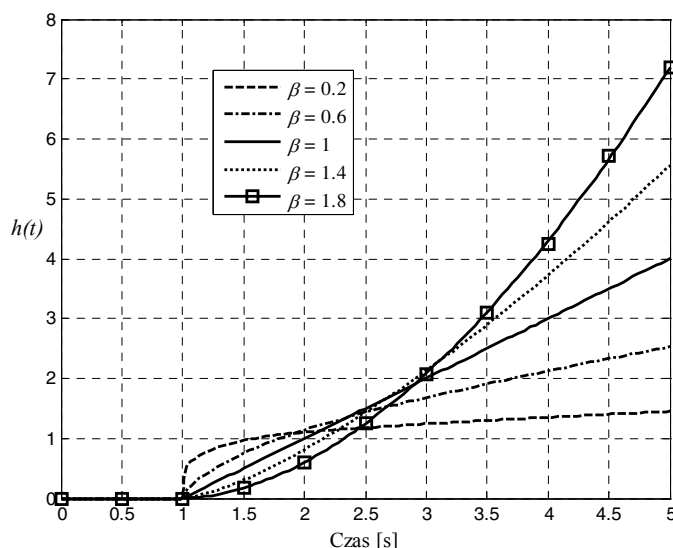


Rys. 1. Rozpatrywana struktura układu regulacji automatycznej

Obiekt regulacji opisany jest transmitancją operatorową w postaci członu całkującego ułamkowego rzędu z opóźnieniem

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{s^\beta}, \quad h \geq 0, \quad K > 0, \quad (1)$$

gdzie β jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Będziemy przyjmować, że $\beta \in (0, 2)$. Przy $\beta = 1$ transmitancja (1) opisuje człon całkujący z opóźnieniem. Na rys. 2 pokazano odpowiedzi skokowe $h(t)$ obiektu (1) wyznaczone dla kilku wartości β przy $K = 1, h = 1$.



Rys. 2. Odpowiedzi skokowe obiektu (1) wyznaczone dla kilku wartości β przy $K = 1, h = 1$

Transmitancja regulatora PD ułamkowego rzędu ma postać

$$C(s) = k_p + k_d s^\mu, \quad (2)$$

gdzie μ jest ułamkowym rzędem części różniczkującej regulatora. W przypadku ogólnym μ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, będziemy przyjmować $\mu < 2$. Dla $\mu = 1$ otrzymamy transmitancję operatorową klasycznego regulatora PD.

Na rys. 1 w torze głównym sterowania występuje tzw. tester zapasu modułu i fazy $A \exp(-j\phi)$, gdzie A i ϕ są to odpowiednio zapas modułu i zapas fazy. Tester ten nie występuje w rzeczywistym układzie regulacji, wykorzystywany jest on tylko przy syntezy parametrycznej regulatora. Wartości parametrów regulatora dobiera się tak, aby układ

regulacji charakteryzował się określonymi zapasami stabilności modułu i fazy. W typowych układach sterowania zapas fazy wynosi od 30° do 60° , natomiast zapas modułu od 5 dB do 10 dB. Zapasy te związane są ze wskaźnikami jakości określanymi na podstawie odpowiedzi skokowych układu regulacji automatycznej, tj. przeregulowaniem, czasem regulacji. Wielkości te zależą przede wszystkim od zapasu stabilności fazy [18].

Quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji ma postać

$$w(s) = Ae^{-j\phi} K(k_p + k_d s^\mu) e^{-sh} + s^\beta. \quad (3)$$

Podstawowym wymaganiem stawianym układom regulacji automatycznej jest ich stabilność asymptotyczna. W przypadku układów ułamkowego rzędu rozpatrujemy stabilność w sensie ograniczone wejście-ograniczone wyjście, którą dalej będziemy krótko nazywać stabilnością, np. [3]. Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest stabilny, gdy jego quasi-wielomian charakterystyczny ułamkowego stopnia (3) jest stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste [5].

W przypadku ogólnym quasi-wielomian ma nieskończenie wiele zer i nie istnieją ogólne metody analityczne służące do badania jego stabilności. Badanie stabilności quasi-wielomianów zazwyczaj jest dokonywane metodami graficznymi, np. kryterium Michajłowa. Ponadto quasi-wielomian (3) jest quasi-wielomianem ułamkowego stopnia, co jeszcze bardziej komplikuje problem badania jego stabilności. Przy ustalonej transmitancji obiektu (1) stabilność quasi-wielomianu (3) zależy od wartości parametrów regulatora k_p , k_d oraz μ .

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów obiektu (1) i regulatora (2). Każdemu punktowi z wyznaczonego obszaru odpowiada stabilny układ regulacji, który charakteryzuje się określonymi wartościami zapasów stabilności modułu i fazy.

2. GŁÓWNY REZULTAT

Mnożąc quasi-wielomian (3) przez $\exp(sh)$ otrzymamy nowy quasi-wielomian o postaci

$$w(s) = Ae^{-j\phi} K(k_p + k_d s^\mu) + s^\beta e^{sh}. \quad (4)$$

który ma te same zera co quasi-wielomian (3). Stosując w quasi-wielomianie (4) podstawienie $z = sh$ po przekształceniach otrzymamy quasi-wielomian

$$w(z) = Ae^{-j\phi} (a_0 + a_1 z^\mu) + z^\beta e^z. \quad (5)$$

gdzie $a_1 = Kk_d h^{\beta-\mu}$, $a_0 = Kk_p h^\beta$.

Wykorzystując klasyczną metodę podziału D [2] możemy wyznaczyć obszary stabilności w przestrzeni parametrów (a_1, a_0) . Obszary te określają zbiór wartości parametrów, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest stabilny. Granice stabilności (podziału D) odpowiadają takim wartościom parametrów, dla których quasi-wielomian charakterystyczny (5) ma przynajmniej jedno zero położone na osi urojonej, w tym w nieskończoności. Może to być zero rzeczywiste, para zer urojonych sprzężonych o skończonej wartości części urojonej lub para zer urojonych sprzężonych o nieskończonej części urojonej. Wobec tego granice podziału D dzielimy na granice: zer rzeczywistych, zer zespolonych i zer w nieskończoności.

Granica zer w nieskończoności zależy od postaci członu dominującego quasi-wielomianu (5), (patrz np. [2, 12]) o postaci

$$a_1 z^\mu + z^\beta e^z. \quad (6)$$

W zależności od rzędu μ i β quasi-wielomian (5) może być typu neutralnego ($\mu = \beta$), wyprzedzonego ($\mu > \beta$) lub opóźnionego ($\mu < \beta$). Jeżeli quasi-wielomian (5) jest typu wyprzedzonego to jest on zawsze niestabilny. Łatwo zauważyć, że jeżeli quasi-wielomian (5) jest typu opóźnionego to granica zer w nieskończoności nie istnieje. Granica ta istnieje tylko dla quasi-wielomianów typu neutralnego i ma ona postać $a_1 = \pm 1$.

Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (5), który ma zero $z = 0$. Łatwo zauważyć, że na płaszczyźnie (a_1, a_0) granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (5) jest linia prosta $a_0 = 0$.

Granica zer zespolonych odpowiada takim wartościom a_1 i a_0 , dla których quasi-wielomian (5) ma zera urojone sprzężone. Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując względem a_1 i a_0 równanie

$$w(j\omega) = A e^{-j\phi} [a_0 + a_1 (j\omega)^\mu] + (j\omega)^\beta e^{j\omega}. \quad (7)$$

Otrzymuje się je przyrównując do zera quasi-wielomian (5) przy $z = j\omega$. Równanie zespolone (7) jest spełnione, gdy odpowiednio jego części rzeczywiste i urojone są równe 0, tj.

$$\operatorname{Re}[w(j\omega)] = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im}[w(j\omega)] = 0. \quad (9)$$

Rozwiązując układ równań (8), (9) względem a_1 i a_0 odpowiednio otrzymamy

$$a_1 = \frac{-\omega^{\beta-\mu}}{A \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta + \omega + \phi\right), \quad (10)$$

$$a_0 = \frac{\omega^\beta}{A \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\beta - \mu) + \omega + \phi\right). \quad (11)$$

Linia krzywa o opisie parametrycznym (10), (11), wykreślona w funkcji ω , przy zadanych wartościach A , ϕ , β , μ wyznacza na płaszczyźnie (a_1, a_0) granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (5).

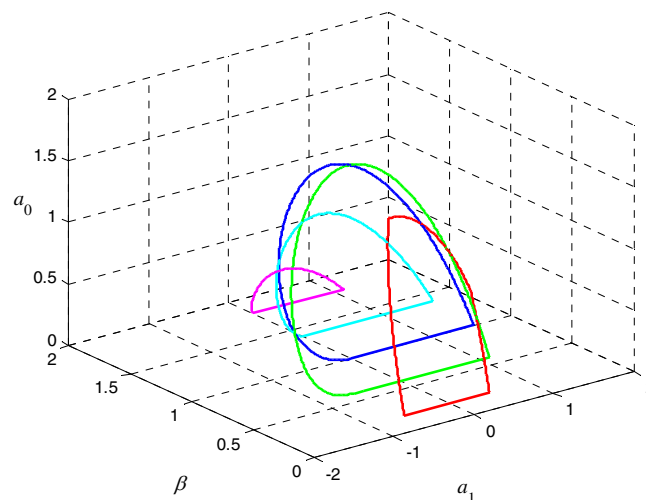
Otrzymane granice podziału D dzielą przestrzeń parametrów układu regulacji na obszary $D(k)$ o skończonej liczbie zer quasi-wielomianu (5) o dodatniej części rzeczywistej. Dowolny punkt w $D(k)$ odpowiada takim wartościom parametrów regulatora, dla których quasi-wielomian (5) ma dokładnie k zer o dodatniej części rzeczywistej. Jeżeli obszar $D(0)$ istnieje (nie jest pusty), to jest on obszarem stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem stabilności należy zbadać stabilność quasi-wielomianu (5) dla jednego punktu z tego obszaru, stosując np. uogólnione na przypadek quasi-wielomianów ułamkowego stopnia kryterium Michajłowa [3].

Przyjmując $\beta = 1$, $\mu = 1$ w (10), (11) otrzymamy opis parametryczny granicy zer zespolonych dla przypadku układu regulacji z klasycznym regulatorem PD i obiektem całkującym [13].

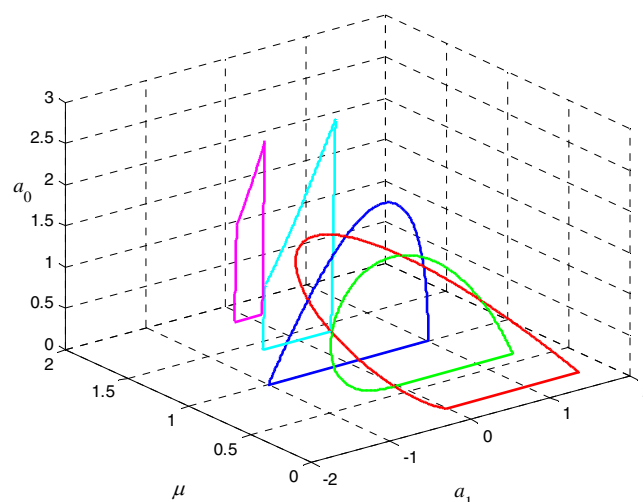
Obszary stabilności quasi-wielomianu (5) w przypadku ułamkowego rzędu β obiektu (1) pokazane są na rys. 3. Obszary stabilności zostały wyznaczone przy $A = 1$, $\phi = 0^\circ$, $\mu = 0.5$ dla wartości β zmieniających się od 0,2 do 1,8 z krokiem 0,4 (regulator $PD^{0.5}$). Z rys. 3 wynika, że dla $\beta > 1$ obszary stabilności są mniejsze niż dla $\beta = 1$.

Obszary stabilności quasi-wielomianu (5) wyznaczone przy $A = 1$, $\phi = 0^\circ$, $\beta = 1$ dla wartości μ zmieniających się od 0,2 do 1,8 z krokiem 0,4 pokazane są na rys. 4. Z rys. 4 wynika, że dla $\mu < 1$ obszary stabilności są większe niż dla $\mu = 1$. Zwiększanie μ powyżej jedynki powoduje zmniejszanie obszarów stabilności, aż w końcu przy $\mu = 2$ przestaje on istnieć.

Zauważmy, że różnym wartościom β , μ odpowiadają różne obszary stabilności. Zastosowanie regulatora PD^μ pozwala na zwiększenie obszarów stabilności poprzez odpowiedni dobór ułamkowego rzędu części różniczkującej regulatora.



Rys. 3. Obszary stabilności quasi-wielomianu (5) wyznaczone przy $A = 1$, $\phi = 0^\circ$, $\mu = 0.5$ dla wartości β zmieniających się od 0,2 do 1,8 z krokiem 0,4 (regulator $PD^{0.5}$)

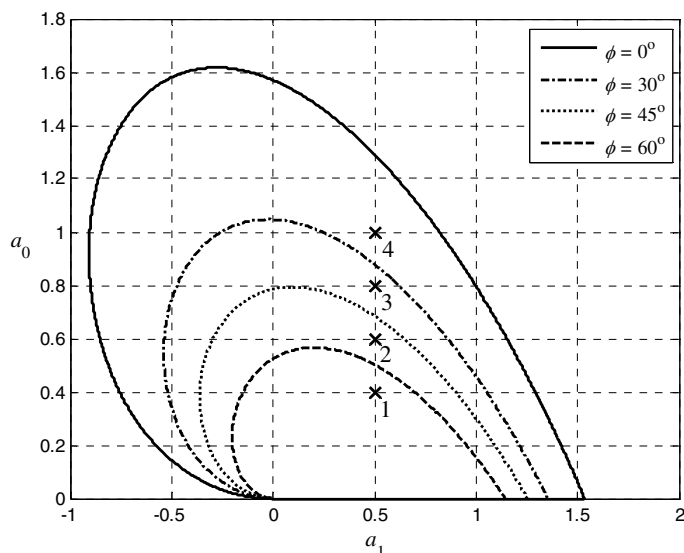


Rys. 4. Obszary stabilności quasi-wielomianu (5) wyznaczone przy $A = 1$, $\phi = 0^\circ$, $\beta = 1$ dla wartości μ zmieniających się od 0,2 do 1,8 z krokiem 0,4

Podstawowym zadaniem regulatora jest zapewnienie stabilności układu regulacji oraz określonych celów regulacji. Wartości parametrów regulatora wyznacza się na przykład z uwzględnieniem zadanych zapasów stabilności modułu i fazy.

Otrzymane opisy granic stabilności (podziału D) umożliwiają wyznaczenie obszarów stabilności dla zadanych zapasów modułu i fazy. Przy wyznaczaniu obszarów stabilności dla określonego zapasu modułu A należy przyjąć $\phi = 0$, natomiast dla określonego zapasu fazy ϕ należy przyjąć $A = 1$. Większe znaczenie ma zapas fazy, gdyż jest on związany z oscylacyjnością odpowiedzi skokowej układu regulacji [18].

Na rys. 4 pokazano obszary stabilności rozpatrywanego układu regulacji z regulatorem $PD^{0.5}$ wyznaczone dla kilku wartości ϕ przy $A = 1$, $\beta = 1$. Wybierając punkt z obszaru ograniczonego linią krzywą wyznaczoną dla zadanej wartości ϕ i linią prostą $a_0 = 0$ otrzymamy wartości parametrów, przy których układ regulacji ma zapas stabilności fazy większy niż wartość ϕ przyjęta do wyznaczenia granicy zer zespolonych.



Rys. 5. Obszary stabilności quasi-wielomianu (5) wyznaczone dla kilku wartości ϕ przy $A = 1$, $\beta = 1$, $\mu = 0.5$ (regulator $PD^{0.5}$)

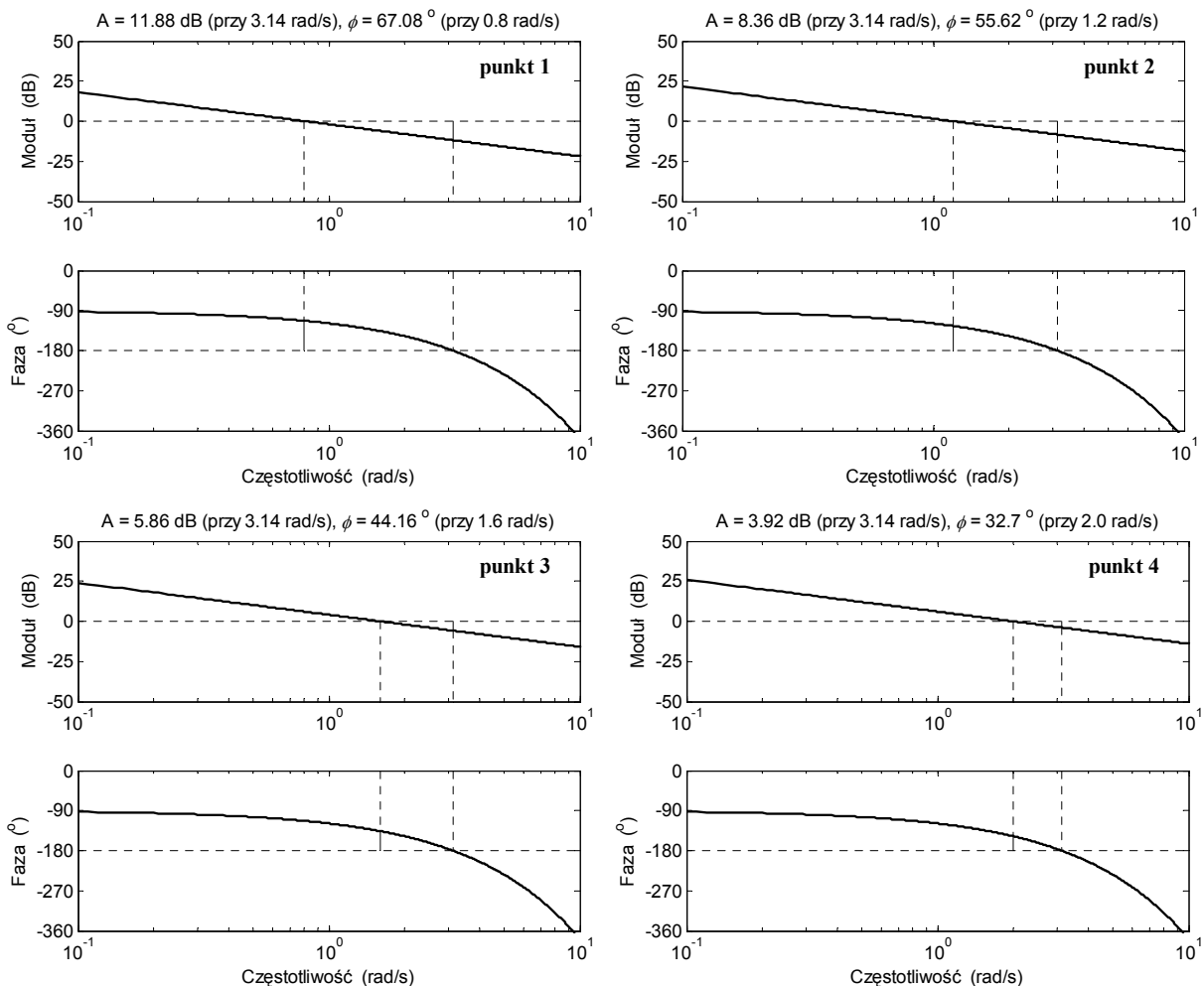
Przykład. Należy wyznaczyć wartości parametrów regulatora PD^μ , dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z obiektem (1) o wartościach parametrów $K = 1$, $h = 0,5$, $\beta = 1$, jest stabilny.

Obszary stabilności rozpatrywanego układu wyznaczone dla kilku wartości ϕ są pokazane na rys. 5, przy czym $\mu = 0.5$. Przyjmując $\phi = 60^\circ$, obszar stabilności jest ograniczony odcinkiem linii prostej $a_0 = 0$ oraz linią krzywej odpowiadającej $\phi = 60^\circ$. Dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru określa parametry regulatora $PD^{0.5}$ zapewniające zapas fazy większy niż 60° . Wybierając dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru, np. o współrzędnych $a_1 = 0,5$, $a_0 = 0,4$, (punkt 1 na rys. 5) otrzymamy $Kk_d h^{\beta-\mu} = 0,5$, $Kk_p h^\beta = 0,4$. Obliczając z powyższych zależności wartości nastaw regulatora $PD^{0.5}$ otrzymamy $k_d = 0,707$, $k_p = 0,8$, dla których zapas fazy wynosi $67,08^\circ$. W tabeli 1 podano wyznaczone wartości parametrów regulatora oraz odpowiadające im zapasy stabilności dla czterech punktów zaznaczonych na

rys. 5. Z tabeli wynika, że wszystkie układy regulacji charakteryzują się większym zapasem fazy od tego jaki przyjęto do wyznaczenia granic zer zespolonych. Na rys. 6 pokazano logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy wraz z zaznaczonymi zapasami stabilności. Tabela 1 i rys. 6 potwierdzają rezultat otrzymany wcześniej na podstawie metody podziału D, że punkt z wyznaczonego obszaru stabilności zapewnia określone wartości zapasu fazy.

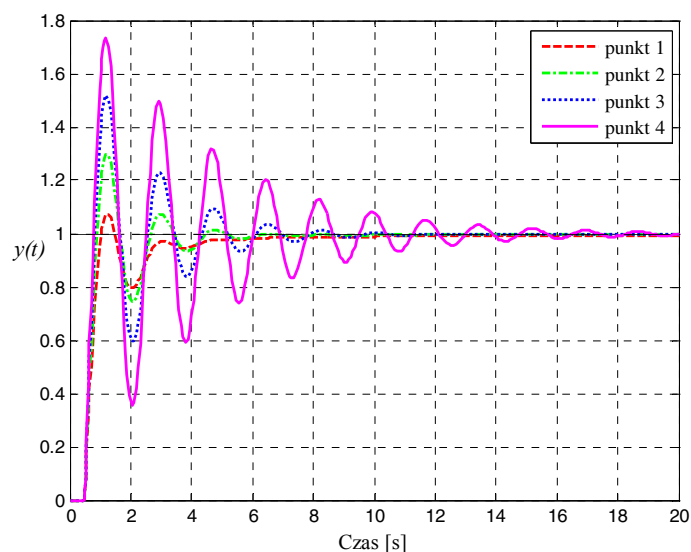
Tabela 1. Zapasy modułu i fazy

Punkt	Nastawy regulatora PD ^{0,5}	Zapas modułu A [dB]	Zapas fazy ϕ [°]
1	$k_p = 0,8, k_d = 0,707$	11,88	67,08
2	$k_p = 1,2, k_d = 0,707$	8,36	55,62
3	$k_p = 1,6, k_d = 0,707$	5,86	44,16
4	$k_p = 2,0, k_d = 0,707$	3,92	32,70



Rys. 6. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy wyznaczone przy $k_d = 0,707, k_p = 0,8; 1,2; 1,6; 2$ (regulator PD^{0,5})

Na rys. 7 pokazano charakterystyki skokowe układu regulacji wyznaczone dla otrzymanych wartości nastaw regulatora (punktów z obszarów stabilności). Z rysunku wynika, że dla większego zapasu fazy ϕ występuje mniejsze przeregulowanie.



Rys. 7. Odpowiedzi skokowe układu regulacji

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania stabilności układów regulacji automatycznej złożonych z ułamkowego regulatora PD^{μ} i obiektu całkującego ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Wykorzystując metodę podziału D podano analityczno-komputerową metodę wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów rozpatrywanego układu regulacji. Dowolny punkt z wyznaczonego obszaru odpowiada takim wartościom parametrów układu regulacji, dla których jest on stabilny, tj. jego bieguny leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie. Zaproponowaną metodę zastosowano także do wyznaczania obszarów stabilności dla zadanych zapasów modułu i fazy, wówczas dowolny punkt z obszaru odpowiada takim wartościom parametrów, dla których układ regulacji charakteryzuje się zapasem stabilności nie mniejszym od zadanego.

Obszary stabilności oraz charakterystyki częstotliwościowe i skokowe rozpatrywanego układu regulacji automatycznej wykonano w środowisku systemu Matlab.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego N N514 1939 33 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

5. LITERATURA

1. Astrom K. J., Hagglund T.: *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. 2nd ed. Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America, 1995.
2. Busłowicz M.: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*. Seria: Mon. Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Tom 1, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok, 2000.

3. Busłowicz M.: *Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems*, In: K. Malinowski and L. Rutkowski (Eds.): *Recent Advances in Control and Automation*, Academic Publishing House EXIT, pp. 83-92, Warsaw 2008.
4. Chen Y.Q., Dou H., Vinagre B. M., Monje C.A.: *A Robust Tuning Method for Fractional Order PI Controllers*, The Second IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications, Porto, Portugal 2006.
5. Hamamci S. E.: *An Algorithm for Stabilization of Fractional-Order Time Delay Systems Using Fractional-Order PID Controllers*, IEEE Trans. on Automatic Control, 2007, Vol. 52, pp. 1964-1969.
6. Monje C.A., Vinagre B.M., Chen Y.Q., Feliu V., Lanusse P., Sabatier J.: *Proposals for Fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Tuning*, The First IFAC Symposium on Fractional Differentiation and its Applications, Bordeaux, France 2004.
7. O'Dwyer A.: *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003.
8. Ortiguera M.D.: *Introduction to fractional linear systems*, IEE Proc.-Vis. Image Signal Process., Vol. 147, No. 1, February 2000.
9. Ostalczyk P.: *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
10. Podlubny, I.: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California, 1999.
11. Podlubny I.: *Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers*, IEEE Trans. on Automatic Control, 1999, Vol. 44, pp.208-214.
12. Ruszewski A.: *Synteza parametryczna regulatorów dla określonej klasy obiektów o niepewnych parametrach*, Praca doktorska, Politechnika Białostocka, Białystok, 2008.
13. Ruszewski A.: *Odporna stabilność układów regulacji z obiektami całkującymi z opóźnieniem i regulatorem PD*. PAR, nr 2 (2007), CD-ROM
14. Silva G. J., Datta A., Bhattacharyya S. P.: *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Birkhauser, Boston, 2005.
15. Soylemez M.T., Munro N., Baki H.: *Fast calculation of stabilizing PID controllers*, Automatica, 2003, Vol. 39, pp. 121–126.
16. Valerio D.: *Fractional robust system control*, PhD Dissertation, Tech. Univ. of Lisbona, 2005.
17. Zhao C., Xue D., Chen Y.Q.: *A Fractional Order PID Tuning Algorithm for A Class of Fractional Order Plants*, in Proc. of the IEEE International Conference on Mechatronics & Automation, pp. 216-221, Niagara Falls, Canada 2005.
18. Żuchowski A.: *Metoda doboru nastaw regulatora PID uwzględniająca postulowany zapas stabilności modułu i fazy*. Pomiary Automatyka Kontrola, Nr 1, 2004, s. 11-13.