

dr inż. Rafał Kociszewski  
Politechnika Białostocka

## **OBSERWATORY DODATNICH LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU**

*W pracy rozpatrzono problem syntezy obserwatorów dodatnich liniowych układów dyskretnych ułamkowego rzędu. Wykorzystując podejście oparte na liniowych nierównościach macierzowych (LMI) sformułowano warunki istnienia dodatniego asymptotycznie stabilnego obserwatora. Podano warunki konieczne i wystarczające obserwowalności dodatnich dyskretnych układów ułamkowego rzędu. Rozważania zilustrowano przykładem symulacyjnym.*

## **OBSERVERS FOR POSITIVE LINEAR DISCRETE-TIME FRACTIONAL ORDER SYSTEMS**

*The paper is devoted to observer synthesis for linear positive fractional discrete-time systems. The problem of finding a nonnegative gain matrix of the observer such that the observer is positive and asymptotically stable is formulated and solved by the use of LMI method. Necessary and sufficient conditions for the observability for linear positive fractional discrete-time systems are formulated and proved. The proposed approach to computation the nonnegative gain matrix is illustrated by numerical example.*

### **1. WSTĘP**

Idea stosowania obserwatora układu dynamicznego polega na wykorzystaniu sygnałów wejściowych (wymuszeń) i wyjściowych (odpowiedzi) systemu do estymacji niemierzalnych (nieдоступnych pomiarowo) wielkości przyjętych jako zmienne stanu. W literaturze z zakresu syntezy obserwatorów wyróżnić można dwa rodzaje obserwatorów: obserwatory odtwarzające cały wektor stanu układu (obserwatory pełnego rzędu - tożsamościowe) oraz obserwatory odtwarzające tylko niemierzalne bezpośrednio zmienne stanu (obserwatory zredukowanego rzędu). Koncepcja obserwatorów układów całkowitego rzędu została po raz pierwszy sformułowana w pracy [9]. Problematyka syntezy obserwatorów standardowych (nie-dodatnich) układów dyskretnych ułamkowego rzędu są poświęcone prace [3, 5]. Obserwatory układów dodatnich ciągłych i dyskretnych były natomiast tematem np. prac [1, 16]. W ostatnim okresie można zaobserwować wzrost zainteresowania układami ułamkowego rzędu. Podstawy rachunku ułamkowego rzędu oraz wybrane zastosowania rachunku ułamkowego można znaleźć np. w pracach [10-13,15] oraz i w cytowanych tam pozycjach literatury.

W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem syntezy obserwatora pełnego rzędu układów dodatnich dyskretnych ułamkowego rzędu. Wykorzystana będzie klasyczna idea podana przez Luenbergera [9], zaś zadanie syntezy zostanie rozwinięte przy użyciu aparatu liniowych nierówności macierzowych (LMI) [2].

### **2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU**

W pracy będą stosowane następujące oznaczenia:  $\mathcal{R}^{n \times m}$  ( $\mathcal{R}_+^{n \times m}$ ) - zbiór macierzy rozmiaru  $n \times m$  o elementach rzeczywistych (nieujemnych) oraz  $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n \times 1}$  ( $\mathcal{R}_+^n = \mathcal{R}_+^{n \times 1}$ );  $Z_+$  - zbiór liczb całkowitych dodatnich;  $I_n$  - macierz jednostkowa rozmiaru  $n \times n$ ;  $S^n$  - zbiór macierzy

symetrycznych. Macierz  $Q \in S^n$  jest dodatnio (ujemnie) określona ( $Q \succ 0$  ( $Q \prec 0$ )) jeżeli jej forma kwadratowa jest dodatnia (ujemna), tzn.  $x^T Q x > 0$  ( $x^T Q x < 0$ ) dla każdego niezerowego  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

Weźmy pod uwagę liniowy układ dyskretny opisany w przestrzeni stanu za pomocą równania stanu i równania wyjścia w poniższej postaci

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \quad k \in Z_+, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $\alpha \in \mathfrak{R}$  jest ułamkowym rzędem,  $x_k \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u_k \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y_k \in \mathfrak{R}^p$  są wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi oraz  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ .

Uwzględniając definicję różniczko-całki ułamkowego rzędu [8]

$$\Delta^\alpha x_k = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad (2)$$

przy czym

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j=0 \\ \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} & \text{dla } j=1,2,\dots \end{cases} \quad (3)$$

gdzie  $h$  jest okresem próbkowania,  $k \in Z_+$  jest numerem próbki, dla której jest obliczana różniczko-całka, możemy równania (1) napisać w poniższej formie

$$\begin{aligned} x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} &= Ax_k + Bu_k, \quad k \in Z_+, \\ y_k &= Cx_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Rozwiązanie równania stanu (4) ma postać [8]

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} B u_i, \quad (5)$$

gdzie macierz tranzycji  $\Phi_k$  jest określona zależnością

$$\Phi_{k+1} = (A + I_n) \Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} \Phi_{k-i+1}, \quad (6)$$

przy warunku początkowym  $\Phi_0 = I_n$ .

Układ ułamkowego rzędu (4) nazywamy wewnętrznym dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_k \in \mathfrak{R}_+^n$  i  $y_k \in \mathfrak{R}_+^p$ ,  $k \in Z_+$  dla dowolnych warunków początkowych  $x_0 \in \mathfrak{R}_+^n$  oraz wszystkich ciągów wymuszeń  $u_k \in \mathfrak{R}_+^m$ ,  $k \in Z_+$  [8].

**Twierdzenie 1.** [8] Jeżeli  $0 < \alpha \leq 1$ , to

$$(-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} > 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

■

Jeżeli  $1 < \alpha < 2$  to  $(-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} < 0$  dla  $i = 2, 3, \dots$

**Twierdzenie 2.** [8] Jeżeli  $0 < \alpha \leq 1$  oraz  $A + I_n \alpha \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}$ , to

$$\Phi_k \in \mathfrak{R}_+^{n \times n} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

■

**Twierdzenie 3.** [8] Jeżeli  $0 < \alpha \leq 1$ , to układ (4) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A + I_n \alpha \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathfrak{R}_+^{p \times n}. \quad (9)$$

■

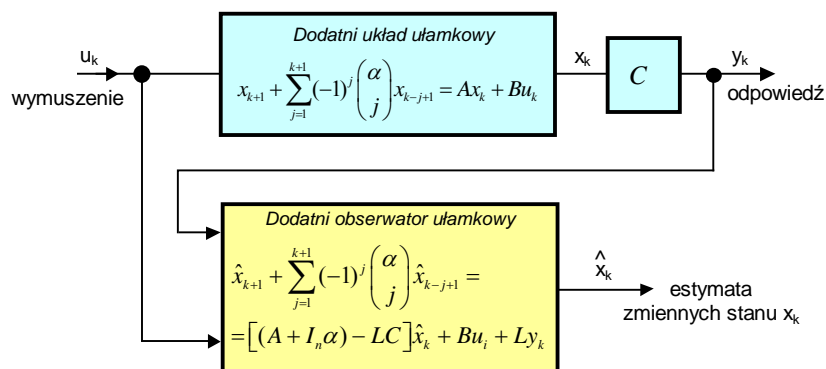
**Definicja 1.** Dodatnim obserwatorem ułamkowego rzędu dodatniego układu dyskretnego (4) nazywamy układ, który odtwarza asymptotycznie wektor  $x_k \in \mathfrak{R}_+^n$ ,  $k \in Z_+$  tego układu.

Uwzględniając równania obserwatora układu całkowitego rzędu (np. [9]) możemy obserwator układu ułamkowego (4) opisać poniższym równaniem

$$\hat{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \hat{x}_{k-j+1} = [(A + I_n \alpha) - LC] \hat{x}_k + Bu_k + Ly_k, \quad k \in Z_+. \quad (10)$$

gdzie  $\hat{x}_k \in \mathfrak{R}_+^n$  jest wektorem stanu obserwatora – estymatą wektora stanu układu (4). Wektor wymuszenia, odpowiedzi oraz macierze występujące w równaniu (10) są to macierze występujące w równaniu (4), natomiast macierz (wzmocnień)  $L \in \mathfrak{R}_+^{n \times p}$  zostanie wyznaczona w procesie syntezy obserwatora.

Ogólny schemat blokowy dodatniego układu ułamkowego rzędu (4) i obserwatora (10) można przedstawić w poniższej postaci.



Rys. 1. Schemat blokowy układu ułamkowego rzędu z obserwatorem

Celem pracy jest podanie warunków istnienia dodatniego asymptotycznie stabilnego obserwatora pełnego rzędu (tożsamościowego) dla dodatniego układu dyskretnego opisanego równaniami (4) oraz metody wyznaczania macierzy (o nieujemnych elementach) wzmocnień obserwatora. Zostaną sformułowane także warunki konieczne i wystarczające obserwowalności układu ułamkowego rzędu (4). Obserwowalność układu (4) jest warunkiem koniecznym do przeprowadzenia syntezy obserwatora tego układu.

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

#### 3.1. Obserwowalność

Weźmy pod uwagę dodatni układ dyskretny ułamkowego rzędu (4). Założmy, bez straty ogólności, że wymuszenie  $u_k = 0$ ,  $k \in Z_+$ .

**Definicja 2.** Układ dodatni ułamkowego rzędu (4) nazywamy obserwowalnym w  $N$  krokach, jeżeli na podstawie znajomości wartości odpowiedzi  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  tego układu w kolejnych  $N$  krokach (punktach pomiarowych) możemy jednoznacznie wyznaczyć nieznaną wartość początkową  $x_0 \in \mathfrak{R}_+^n$ .

**Definicja 3.** Układ dodatni ułamkowego rzędu (4) nazywamy obserwowalnym, jeżeli istnieje liczba naturalna  $N \geq 1$  taka, że układ ten jest obserwowalny w  $N$  krokach.

Wykorzystując pewne rezultaty podane w monografii [7] z zakresu dyskretnych układów dodatnich całkowitego rzędu możemy udowodnić poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 4.** Układ dodatni ułamkowego rzędu (4) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz obserwowalności tego układu o postaci

$$S_N = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi_1 \\ C\Phi_2 \\ \vdots \\ M \\ C\Phi_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_+^{Np \times n}, \quad (11)$$

zawiera  $n$  liniowo niezależnych wierszy monomialnych (tylko jeden element jest nieujemny, pozostałe zaś są równe zero).

**Dowód.** Podstawiając wzór (5) do równania wyjścia (4) otrzymamy

$$y_k = C\Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C\Phi_{k-i-1} B u_i. \quad (12)$$

Dla  $k = 0, 1, \dots, N-1$  ze wzoru (12) otrzymamy

$$y_0^N = S_N x_0 \rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ M \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi_1 \\ C\Phi_2 \\ \vdots \\ M \\ C\Phi_{N-1} \end{bmatrix} x_0. \quad (13)$$

Z (13) wynika, że znając nieujemne wartości odpowiedzi  $y_0^N \in \mathfrak{R}_+^p$  można wyznaczyć nieujemny wektor  $x_0 \in \mathfrak{R}_+^n$  wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $S_N$  (11) zawiera  $n$  liniowo niezależnych wierszy monomialnych. ■

**Twierdzenie 5.** Układ dodatni ułamkowego rzędu (4) jest obserwowalny wtedy, gdy macierz o postaci

$$\begin{bmatrix} C \\ (A + I_n \alpha) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_+^{(p+n) \times n} \quad (14)$$

zawiera co najmniej  $n$  liniowo niezależnych wierszy monomialnych.

**Dowód.** Z postaci macierzy obserwowalności  $S_N$  (11) oraz ze wzoru [4]

$$\Phi_k = (A + I_n \alpha)^k + a_{k,k-1} (A + I_n \alpha)^{k-1} + \dots + a_{k1} (A + I_n \alpha) + a_{k0} I_n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

gdzie  $a_{ki}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$  są to rzeczywiste współczynniki, wynika, że liczba wierszy monomialnych w macierzy  $S_N$  (11) nie może być większa niż w macierzy (14). ■

### 3.2. Obserwator pełnego rzędu

Weźmy pod uwagę dyskretny układ dodatni ułamkowego rzędu (4). Załóżmy, że układ ten jest obserwowalny (spełnia warunek podany w twierdzeniu (4) oraz, że wektor stanu  $x_k \in \mathfrak{R}_+^n$ ,  $k \in Z_+$  nie jest dostępny.

Niech

$$e_k = (x_k - \hat{x}_k) \in \mathfrak{R}_+^n, \quad k \in Z_+, \quad (16)$$

będzie wektorem błędu obserwacji (estymacji). Z równania stanu układu ułamkowego rzędu (4) oraz równania obserwatora (10) otrzymujemy równanie dynamiki błędu o postaci

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = G e_k - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} e_{k-j+1}, \quad (17)$$

gdzie

$$G = (\tilde{A} - LC) \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}, \quad \tilde{A} = (A + I_n \alpha) \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}. \quad (18)$$

Równanie (17) ma rozwiązania stabilne jeżeli wszystkie wartości własne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  macierzy  $G$  (18) mają moduły mniejsze od 1, tj.  $|\lambda_k| < 1$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ . Wtedy błąd estymacji zanika do zera, tzn.  $\forall \hat{x}_0 \in \mathfrak{R}_+^n, \lim_{k \rightarrow \infty} [x_k - \hat{x}_k] = 0$  i obserwator jest asymptotycznie stabilny, zaś estymowane zmienne stanu dążą do oryginalnych zmiennych stanu.

Do wyznaczenia macierzy wzmocnień  $L$  obserwatora opisanego równaniem (10) wykorzystamy podejście oparte na liniowych nierównościach macierzowych (LMI).

Jest dobrze znany fakt [5], że dodatni układ dyskretny całkowitego rzędu jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dodatnio określonej diagonalnej macierzy (zmiennej)  $P$  jest spełniona następująca nierówność

$$P - A^T P A \succ 0, \quad P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n) \succ 0. \quad (19)$$

Uwzględniając (19) zadanie syntezy asymptotycznie stabilnego dodatniego obserwatora układu (4) sprowadza się do wyznaczenia macierzy  $L \in \mathfrak{R}_+^{n \times p}$  takiej, że poniższa nierówność

$$P - (\tilde{A} - LC)^T P (\tilde{A} - LC) \succ 0 \rightarrow P - G^T P G \succ 0, \quad (20)$$

jest spełniona względem zmiennej  $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n) \succ 0$ .

Stosując do nierówności (20) uzupełnienie Schura możemy napisać

$$P - G^T P G = \begin{bmatrix} P & G \\ G^T & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (21)$$

zaś po przekształceniu (21) przez kongruencję, tj.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & G \\ G^T & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \succ 0 \quad (22)$$

otrzymamy

$$\begin{bmatrix} P & G^T P \\ P G^T & P \end{bmatrix} \succ 0. \quad (23)$$

Wymnażając (23) lewo i prawostronnie przez  $P^{-1} \succ 0$  i dokonując następnie zamiany zmiennych:  $P^{-1} = Q$  oraz  $Y = P^{-1}L$  otrzymamy końcową nierówność LMI w postaci

$$\begin{bmatrix} Q & QG - YC \\ G^T Q - C^T Y^T & Q \end{bmatrix} \succ 0 \quad (24)$$

$$(QG - YC) \geq 0$$

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.** Obserwator (10) układu dodatniego ułamkowego rzędu (4) jest dodatni i asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność LMI (24) względem macierzy  $Q = P^{-1}$  ( $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ ) oraz  $Y \in \mathfrak{R}_+^{n \times p}$ . Macierz wzmocnień obserwatora  $L \in \mathfrak{R}_+^{n \times p}$  jest określona zależnością

$$L = YQ^{-1}. \quad (25)$$

#### 4. PRZYKŁAD

Dany jest układ dyskretny ułamkowego rzędu opisany równaniem (4) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.42 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \quad C = [0.15 \quad 0]. \quad (26)$$

Niech rząd ułamkowy  $\alpha = 0.2$ . Zgodnie z twierdzeniem 3 mamy

$$\tilde{A} = A + I_2 \alpha = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.42 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_+^{2 \times 2}. \quad (27)$$

Wyznaczając macierz (14) przy  $\tilde{A}$  (27) oraz  $C$  (26) otrzymamy, że zawiera ona  $n=2$  liniowo niezależne wiersze monomialne, zatem warunek podany w twierdzeniu 5 jest spełniony i rozpatrywany układ jest obserwowalny.

Zaprojektujemy obserwator pełnego rzędu dla układu o macierzy  $\tilde{A}$  (27) oraz  $B$  i  $C$  (26).

Łatwo można sprawdzić, że dla macierzy

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.94 & 0 \\ 0 & 1.07 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

nierówność (24) jest spełniona. Obliczając macierz wzmocnień obserwatora ze wzoru (25) otrzymamy

$$L = YQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_+^2 \quad (29)$$

Macierz  $G = \tilde{A} - LC$  ma postać

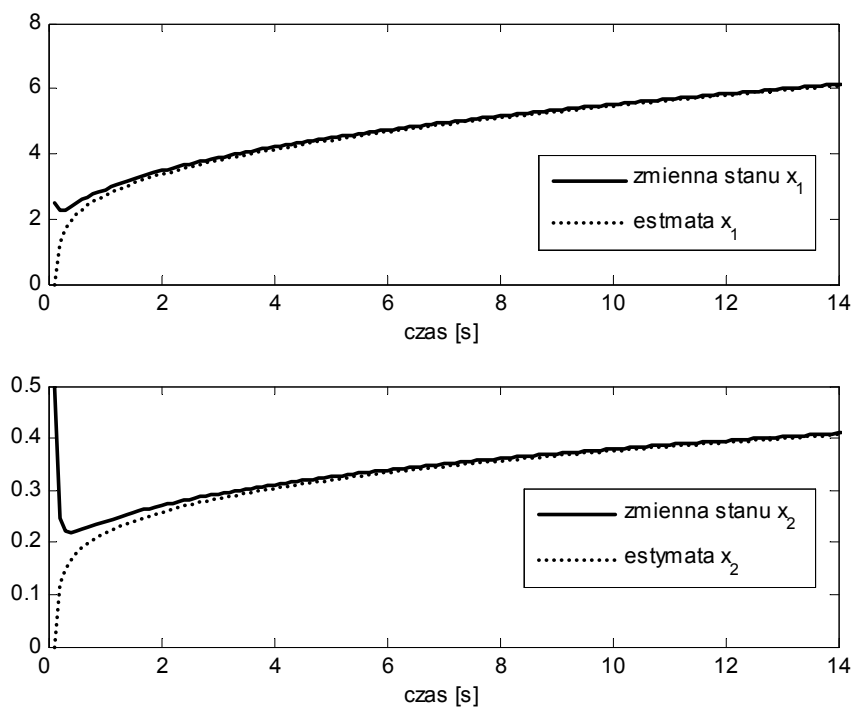
$$G = \tilde{A} - LC = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.42 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_+^{2 \times 2}, \quad (30)$$

zaś moduły wartości własnych tej macierzy wynoszą  $|\lambda_1| = 0.04$ ,  $|\lambda_2| = 0.05$ .

Zaprojektowany obserwator o równaniu

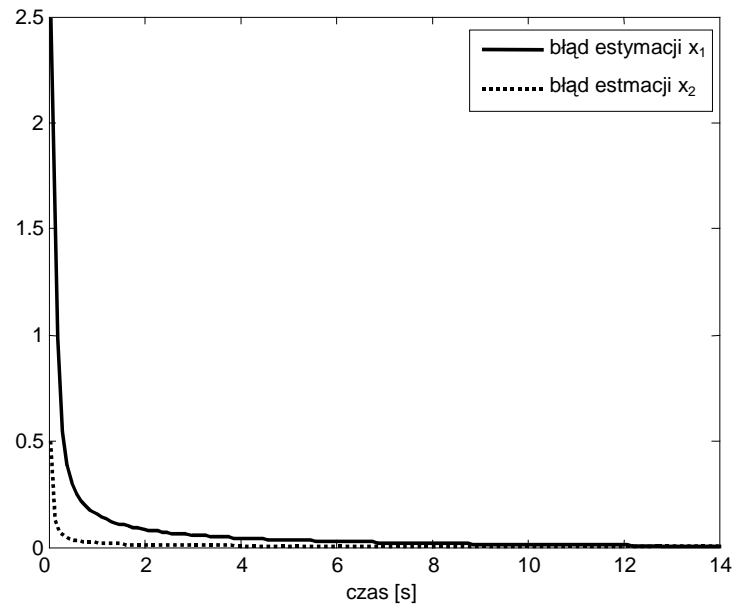
$$\hat{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \hat{x}_{k-j+1} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.42 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.12 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0 \end{bmatrix} y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (31)$$

jest dodatni i stabilny asymptotycznie.



Rys. 2. Estymacja zmiennych stanu rozpatrywanego układu ułamkowego rzędu

Na rys. 2 są pokazane wyniki estymacji dwóch zmiennych stanu rozpatrywanego układu przy warunku początkowym  $x_0 = [2.5 \ 0.5]^T$  układu oraz warunku początkowym obserwatora  $x_0 = [0 \ 0]^T$ . Na rys. 3 jest natomiast przedstawiony błąd estymacji zmiennych stanu, tj.  $x_1 - \hat{x}_1$ ,  $x_2 - \hat{x}_2$ .



Rys. 3. Błąd estymacji zmiennych stanu rozpatrywanego układu ułamkowego rzędu

Obliczenia numeryczne w powyższym przykładzie zrealizowano w środowisku Matlab, natomiast badania symulacyjne zostały przeprowadzone w środowisku Matlab/Simulink z wykorzystaniem przybornika Fractional States Space Toolkit [14].

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy rozpatrzono problem syntezy dodatniego obserwatora dodatnich dyskretnych układów ułamkowego rzędu. Pokazano, że zadanie syntezy obserwatora można efektywnie rozwiązać stosując podejście oparte na liniowych nierównościach macierzowych (LMI). Jeżeli zadanie sformułowane w ramach LMI ma rozwiązanie, wówczas projektowany obserwator jest dodatni i asymptotycznie stabilny. W pracy podano także kryteria obserwowalności rozpatrywanej klasy ułamkowych układów dynamicznych. Spełnienie przez układ warunku stabilności jest warunkiem koniecznym istnienia obserwatora tego układu.

Przedstawioną w pracy syntezę obserwatora tożsamościowego można uogólnić dla układów ciągłych dodatnich jak i niedodatnich ułamkowego rzędu. Przedstawioną metodykę obliczania macierzy wzmocnień obserwatora można również wykorzystać do syntezy obserwatora zredukowanego rzędu.

*Pracę wykonano w ramach grantu NN 514 1939 33 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.*



## 6. LITERATURA

1. Back J., Astolfi A.: *Positive linear observers for positive linear systems: A Sylvester Equation Approach*. Proc. of the American Control Conf., Minneapolis, USA, 2006, pp. 4037-4042.
2. Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishnan V.: *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM 1994.
3. Dzieliński A, Sierociuk D.: *Observer for discrete fractional order state-space systems*. 2<sup>nd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA'06, pp. 524-529, Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
4. Dzieliński A., Sierociuk D.: *Controllability and observability of fractional order discrete state-space systems*. Proc. 13th IEEE IFAC Intern. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, 27-30 Aug. 2007, Szczecin, Poland, IEEE Conf. No. 12459.
5. Dzieliński A., Sierociuk D.: *Obserwator zredukowany dla dyskretnych układów ułamkowego rzędu*. Recent Advances in Control and Automation, eds. Malinowski K., Rutkowski L., Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2008, s. 67-75.
6. Farina L., Rinaldi S.: *Positive linear systems. Theory and applications*. Willey, New York 2000.
7. Kaczorek T.: *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe*. Oficyna Wyd. Polit. Warszawskiej, Warszawa 2000.
8. Kaczorek T.: *Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems*, Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 6, No. 4, 2004, pp.139-143.
9. Luenberger D.G.: *An introduction to observers*. IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 16, no. 6, 1971, pp. 596-602.
10. Miller K. S., Ross B.: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Willey, New York 1993.
11. Ostalczyk P.: *The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis*. Int. J. Syst. Sci. vol. 31, no. 12, 2000, pp. 1551-1561.
12. Podlubny I.: *Fractional differential equations*. San Diego: Academic Press, 1999.
13. Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U.: *Modelling and relaxation phenomena in organic dielectric materials*. Application of differential and integral operators of fractional order. J. Optoelect. Adv. Mat. Vol. 6, no. 3, 2004, pp. 1037-1043.
14. Sierociuk D.: *Fractional order discrete state-space system Simulink toolkit user guide* (<http://www.ee.pw.edu.pl/dsieroci/fsst/fsst.htm>)
15. Sjöberg M., Kari L.: *Non-linear behavior of a rubber isolator system using fractional derivatives*. Vehicle Syst. Dynam. Vol. 37, no. 3, 2002, pp. 217-236.
16. Van Den Hof J.M.: *Positive linear observers for linear compartmental systems*. SIAM J. Control Optim., vol. 36, No. 2, pp.590-608, 1998.