dr inż. Wojciech Trzasko
Politechnika Białostocka w Białymstoku

WZGLĘDNA STEROWALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

W pracy rozpatrzono problem sterowalności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych. Sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające sterowalności do zera oraz względnej sterowalności. Rozważania zilustrowano przykładem.

RELATIVE CONTROLLABILITY OF POSITIVE CONTINUOUS – DISCRETE TIME SYSTEMS

In the paper the controllability of the linear 2D positive continuous-discrete time systems are considered. The definitions of null controllability and relative controllability are introduced and necessary and sufficient conditions are given. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [2] oraz cytowanej tam literaturze.

W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii stożków. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i mniej zaawansowaną niż klasyczna teoria układów liniowych. Problem analizy i syntezy dodatnich układów liniowych jest tematem wielu publikacji w ostatnich kilku latach, np. [2, 6, 7].

Ostatnio, nowa klasa dwuwymiarowych liniowych hybrydowych (ciągło-dyskretnych) układów dodatnich została zaproponowana w pracy [1]. W pracy [4] podano warunki względnej sterowalności stacjonarnych układów hybrydowych. Problem punktowej zupełności oraz względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych rozpatrzono w pracy [5].

W niniejszej pracy, wykorzystując rezultaty prac [1, 2, 5], rozpatrzymy problem sterowalności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych, dla których rozwiązanie analityczne równań stanu zostały podane w pracy [1]. Najpierw, uwzględniając specyfikę dodatnich układów dwuwymiarowych, zostaną wprowadzone definicje sterowalności do zera oraz względnej sterowalności. Następnie zostaną podane warunki konieczne i wystarczające sterowalności takich układów oraz prosta metoda wyznaczania nieujemnego sterowania w klasie sterowań odcinkami stałych.

2. DODATNI UKŁAD CIĄGŁO-DYSKRETNY

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_+, zaś zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych przez $R_+ = [0,+\infty)$.

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowy układ ciągło-dyskretny liniowy stacjonarny opisany równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t,i) = A_{11}x_1(t,i) + A_{12}x_2(t,i) + B_1u(t,i),\ t \in R_+, \tag{1a}$$

$$x_2(t,i+1) = A_{21}x_1(t,i) + A_{22}x_2(t,i) + B_2u(t,i),\ i \in Z_+, \tag{1b}$$

przy czym $\dot{x}_1(t,i) = \dfrac{\partial x_1(t,i)}{\partial t}$, $x_1(t,i) \in \Re^{n_1}$, $x_2(t,i) \in \Re^{n_2}$, $u(t,i) \in \Re^m$ oraz $A_{11} \in \Re^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \Re^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \Re^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \Re^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \Re^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \Re^{n_2 \times m}$.

Układ (1) ma strukturę podobną do modelu 2W Roessera [2], gdzie $x_1(t,i) \in \Re^{n_1}$ jest odpowiednikiem wektora horyzontalnego, zaś $x_2(t,i) \in \Re^{n_2}$ wektora wertykalnego. W pracach [1, 4] układy ciągło dyskretne są nazywane dwuwymiarowymi układami hybrydowymi.

Warunki brzegowe dla układu (1) mają postać

$$x_1(0,i) = x_1(i),\ i \in Z_+ \text{ oraz } x_2(t,0) = x_2(t),\ t \in R_+. \tag{2}$$

Definicja 1. Układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy dwuwymiarowym (2W) modelem wewnętrznie dodatnim, jeżeli dla wszystkich dodatnich warunków brzegowych

$$x_1(i) \in \Re_+^{n_1},\ i \in Z_+ \text{ oraz } x_2(t) \in \Re_+^{n_2},\ t \in R_+ \tag{3}$$

oraz dowolnych wymuszeń $u(t,i) \in \Re_+^m$, $t \in R_+$ i $i \in Z_+$, zachodzi $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ i $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ dla wszystkich $t \in R_+$ i $i \in Z_+$.

Twierdzenie 1. [1] Rozwiązanie układu (1) spełniające warunki brzegowe (2) ma postać

$$x_1(t,i) = \begin{cases} \Phi(t)x_1(0) + P(t)x_2(t) + Q(t)u(t,0) \quad \text{dla } i = 0 \\ \Phi(t)x_1(i) + \sum\limits_{k=0}^{i-1} P(t)(A_{21}P(t) + A_{22})^{i-k-1} A_{21}\Phi(t)x_1(k) + P(t)(A_{21}P(t) + A_{22})^i x_2(t) \\ + \sum\limits_{k=0}^{i-1} P(t)(A_{21}P(t) + A_{22})^{i-k-1}(A_{21}Q(t) + B_2)u(t,k) + Q(t)u(t,i) \quad \text{dla } i = 1,2,.. \end{cases} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} x_2(t,i) = &\sum_{k=0}^{i-1}(A_{21}P(t) + A_{22})^{i-k-1}A_{21}\Phi(t)x_1(k) + (A_{21}P(t) + A_{22})^i x_2(t) \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1}(A_{21}P(t) + A_{22})^{i-k-1}(A_{21}Q(t) + B_2)u(t,k)\ dla\ \ i = 1,2,... \end{aligned} \tag{4b}$$

przy czym $\Phi(t) = e^{A_{11}t}$, a $P(t)$ i $Q(t)$ są operatorami, określonymi zależnościami

$$P(t)x = \int_0^t \Phi(t-\tau)A_{12}x(\tau)d\tau, \tag{5a}$$

$$Q(t)x = \int_0^t \Phi(t-\tau)B_1x(\tau)d\tau. \tag{5b}$$

Dowód. Dowód został podany w pracy [1] wykorzystując metodę indukcji względem *i*. □

Twierdzenie 2. Układ ciągło-dyskretny (1) jest dodatni wewnętrznie, wtedy i tylko wtedy, gdy

1. A_{11} jest macierzą Metzlera,
(6a)

2. $A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \Re_+^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \Re_+^{n_2 \times m}$. (6b)

Dowód. Dowód przeprowadzimy podobnie jak w twierdzeniu 2 pracy [1].

Dostateczność. Ogólnie wiadomo, że macierz $\Phi(t) = e^{A_{11}t} \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A_{11} jest macierzą Metzlera. Jeżeli A_{11} jest macierzą Metzlera, zaś pozostałe macierze mają elementy nieujemne (6b) i warunki brzegowe spełniają (3), to z (4a) mamy $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$, a z równania (4b) $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ dla dowolnych wymuszeń $u(t,i) \in \Re_+^m$, $t \in R_+$ i $i \in Z_+$.

Konieczność. Niech $x_2(t) = 0$, $u(t,0) = 0$, $t \in R_+$ i $x_1(0) = e_i$ (i-ta kolumna macierzy jednostkowej I_{n_1}). Z (1a) dla $i = 0$, $t \in R_+$ i (4a) mamy $\dot{x}_1(t,0) = A_{11}\Phi(t)e_i$. Zauważmy, że aby trajektoria nie wyszła z ćwiartki $\Re_+^{n_1}$ musi być $\dot{x}_1(0,0) = A_{11}e_1 \in \Re_+^{n_1}$, co implikuje $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$. Macierz A_{11} musi być macierzą Metzlera. Z tych samych względów dla $x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 0$, mamy $\dot{x}_1(0,0) = B_1 u(0,0) \in \Re_+^{n_1}$, co implikuje $B_1 \in \Re_+^{n_1 \times m}$, ponieważ $u(0,0) \in \Re_+^m$ może być dowolne. Podobnie, dla $x_1(0) = 0$, $u(0,0) = 0$ z (1a) mamy $\dot{x}_1(0,0) = A_{12}x_2(0) \in \Re_+^{n_1}$, co implikuje $A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}$, gdyż $x_2(0)$ może być dowolne. Zaś z (1b) dla $x_2(t) = 0$, $u(t,0) = 0$, $i = 0$, $t \in R_+$ mamy $x_2(t,1) = A_{21}x_1(t,0) \geq 0$, co implikuje $A_{21} \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$, gdyż $x_1(t,0) \in \Re_+^{n_1}$ może być dowolne. Podobnie dla $x_1(0) = 0$, $u(0,0) = 0$, z (1b) dla $i = 0$ mamy $x_2(0,1) = A_{22}x_2(0) \geq 0$, co implikuje $A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$, gdyż $x_2(0) \in \Re_+^{n_2}$ może być dowolne. Dla $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, mamy zaś $x_2(0,1) = B_2 u(0,0) \geq 0$, co implikuje $B_2 \in \Re_+^{n_2 \times m}$, gdyż $u(0,0) \in \Re_+^m$ może być dowolne.

□

3. STEROWALNOŚĆ DO ZERA

Uwzględniając prace [1, 2, 4] możemy sformułować podaną poniżej definicję sterowalności do zera dodatniego układu ciągło-dyskretnego.

Definicja 2. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy sterowalnym do zera, jeżeli dla dowolnych niezerowych warunków brzegowych (3) istnieją: chwila $t_f > 0$ i liczba naturalna $k \geq 1$ oraz ciąg sterowań $u(t,i) \in \Re_+^m$ dla $0 \leq t \leq t_f$, $0 \leq i \leq k$ takie, że w punkcie $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$, $t_f > 0$, $k \geq 1$, mamy

$$x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_f, k) \\ x_2(t_f, k) \end{bmatrix} = 0. \tag{7}$$

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że składowa $x_2(t,0)$ warunków brzegowych (3) jest stała w całym przedziale, tzn. $x_2(t) := x_2$ dla $t \in [0, t_f]$.

Poszukiwać będziemy sterowania w klasie sterowań odcinkami stałych, czyli

$$u(t,i) = u(i) \text{ dla } t \in [0, t_f], \; i \in Z_+, \tag{8}$$

gdzie $u(i)$ nie zależy od zmiennej *t*.

Uwzględniając powyższe założenia, rozwiązanie (4) równań stanu układu ciągło-dyskretnego z warunkami brzegowymi (3) dla $t = t_f > 0, \; i = k \geq 1$ można napisać w postaci

$$x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} u_k = \boldsymbol{D} x_0 + \boldsymbol{R} u_k, \tag{9}$$

gdzie

$$x_0 = [x_1(0), x_1(1), \ldots, x_1(k), x_2]^T \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}, \tag{10a}$$

$$u_k = [u(0), u(1), \ldots, u(k)]^T \in \Re_+^{(k+1)m}, \tag{10b}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(0) & D_1(1) & \cdots & D_1(k) & D_1(k+1) \\ D_2(0) & D_2(1) & \cdots & 0 & D_2(k+1) \end{bmatrix} \in \Re_+^{(n_1+n_2)\times[(k+1)n_1+n_2]}, \tag{10c}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(0) & R_1(1) & \cdots & R_1(k-1) & R_1(k) \\ R_2(0) & R_2(1) & \cdots & R_2(k-1) & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{(n_1+n_2)\times[(k+1)m]}, \tag{10d}$$

przy czym

$$D_1(j) = P(t_f) D^{k-1-j} A_{21} \Phi(t_f), \; D_2(j) = D^{k-1-j} A_{21} \Phi(t_f), \text{ dla } j = 0,1,\ldots,k-1, \tag{11a}$$

$$D_1(k) = \Phi(t_f), \tag{11b}$$

$$D_1(k+1) = P(t_f) D^k, \; D_2(k+1) = D^k, \tag{11c}$$

$$R_1(j) = P(t_f) D^{k-1-j} B, \; D_2(j) = D^{k-1-j} B, \text{ dla } j = 0,1,\ldots,k-1, \tag{12a}$$

$$R_1(k) = Q(t_f), \tag{12b}$$

$$D = A_{21} P(t_f) + A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}, \tag{13a}$$

$$B = A_{21} Q(t_f) + B_2 \in \Re_+^{n_2 \times m}. \tag{13b}$$

Twierdzenie 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nie jest sterowalny do zera w czasie skończonym.

Dowód. Ze wzoru (9) dla stanu końcowego (7) $x = 0$ mamy równość

$$\boldsymbol{D} x_0 = -\boldsymbol{R} u_k, \tag{14}$$

z której wynika, że dla każdej skończonej chwili $t_f > 0$ i niezerowych warunków brzegowych (3) lewa strona jest wektorem dodatnim (co najmniej $D_1(k) = \Phi(t_f) > 0$) a prawa strona dla $u_k \in \Re_+^{(k+1)m}$ jest wektorem ujemnym (co najmniej $R_1(k) = Q(t_f) > 0$).

□

Twierdzenie 4. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest sterowalny do zera w czasie nieskończenie długim $t_f \to \infty$, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy Metzlera A_{11} mają ujemne części rzeczywiste oraz

a) w $k = n_2$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$D_\infty = -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2} \tag{15}$$

ma wszystkie zerowe wartości własne,

b) w $k = \mu$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz D_∞ jest nilpotentna, gdzie μ jest indeksem nilpotentności tej macierzy,

c) w nieskończenie wielu krokach tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy D_∞ mają moduły mniejsze od 1.

Ponadto ciąg sterujący (10b) $u(i) = 0$ dla $i = 0,...,k$.

Dowód. Z właściwości układu dodatniego wynika, że dla $u(i) = 0,\quad i = 0,...,k$ i $\boldsymbol{R} \in \Re_+^{(n_1+n_2)\times[(k+1)m]}$ oraz dowolnych niezerowych warunków brzegowych (3), równość (14) może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy lewa strona będzie równa zero, tzn. $D_1(j) = 0$, $D_2(j) = 0$ dla $j = 0,1,\ldots,k,k+1$.

Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy Metzlera A_{11} mają ujemne części rzeczywiste, to

$$\lim_{t_f \to \infty} \Phi(t_f) = \lim_{t_f \to \infty} e^{A_{11}t_f} = 0 \tag{16}$$

oraz $-A_{11}^{-1} \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$.

W tym przypadku dla $t_f \to \infty$ $D_1(j) = 0$ i $D_2(j) = 0,\ j = 0,1,\ldots,k-1,$ oraz $D_1(k) = 0$, o postaci (11a) i (11b), odpowiednio.

Dla nieosobliwej macierzy Metzlera A_{11} operator $P(t_f)$ wyznacza się z zależności

$$P(t_f) = -A_{11}^{-1}(I_{n_1} - e^{A_{11}t_f})A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}. \tag{17}$$

Dla $t_f \to \infty$ otrzymamy

$$P_\infty = P(t_f \to \infty) = -A_{11}^{-1}A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}. \tag{18}$$

Podstawiając (18) do zależności na macierz D (13a) otrzymamy

$$D_\infty = D(t_f \to \infty) = -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}. \tag{19}$$

Z zależności (11c) wynika, że $D_1(k+1) = 0$, $D_2(k+1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $D_\infty^k = 0$. Warunek ten będzie spełniony, gdy macierz (19):

a) ma wszystkie zerowe wartości własne, to z twierdzenia Caleya-Hamiltona mamy $D_\infty^{n_2} = 0$ i $k = n_2$,

b) jest nilpotenta z indeksem μ, tzn. $D_\infty^\mu = 0$ i $k = \mu$,

c) ma wszystkie wartości o modułach mniejszych od 1, to $\lim_{k \to \infty} D_\infty^k = 0$ i $k = \infty$. □

4. WZGLĘDNA STEROWALNOŚĆ

Uwzględniając prace [1, 2, 4, 5] możemy sformułować podane poniżej definicje sterowalności i względnej sterowalności dodatniego układu ciągło- dyskretnego.

Definicja 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy sterowalnym w punkcie $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$, $t_f > 0$, $k \geq 1$, jeżeli dla dowolnych niezerowych warunków brzegowych (3) i każdego wektora

$$x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} \in \Re_+^{n_1+n_2} \tag{20}$$

istnieje ciąg sterowań $u(t,i) \in \Re_+^m$ dla $0 \leq t \leq t_f$, $0 \leq i \leq k$ taki, że

$$x(t,i) = \begin{bmatrix} x_1(t_f,k) \\ x_2(t_f,k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Definicja 4. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy względnie sterowalnym dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$, $t_f > 0$, $k \geq 1$, jeżeli dla dowolnych niezerowych warunków brzegowych (3) i każdej składowej

$$x_{1f} \in \Re_+^{n_1} \tag{22}$$

wektora stanu (20) istnieje ciąg sterowań $u(t,i) \in \Re_+^m$ dla $0 \leq t \leq t_f$, $0 \leq i \leq k$ taki, że $x_1(t,i) = x_1(t_f,k) = x_{1f}$.

Lemat 1. Warunkiem koniecznym, aby dodatni układ ciągło-dyskretny był sterowalny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, musi być spełniony warunek

$$rzad\ \boldsymbol{R} = n_1 + n_2. \tag{23}$$

Należy zauważyć, że powyższy warunek jest także warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w punkcie (t_f, k) standardowych układów ciągło-dyskretnych (1), tzn. o dowolnych elementach macierzy A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, przy założeniu (8).

Twierdzenie 5. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest sterowalny w punkcie $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$, $t_f > 0$, $k \geq 1$, jeżeli

$$x - \boldsymbol{D}x_0 \in \Re_+^{n_1+n_2} \tag{24}$$

oraz są spełnione warunki

a) rząd macierzy $\boldsymbol{R}$, o postaci (10d), jest równy $n_1 + n_2$,

b) z macierzy $\boldsymbol{R}$ (10d) można wybrać $n_1 + n_2$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\tilde{\boldsymbol{R}}$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji, zwaną też macierzą monomialną (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe).

Ciąg sterowań odcinkami stałych $u_k \in \Re_+^{(k+1)m}$ (10b), który przeprowadza układ (1) w czasie $t_f > 0$ oraz $k \geq 1$ krokach z niezerowych warunków brzegowych (10a) do zadanego stanu końcowego (20) jest określony wzorem

$$u_k = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]^{-1}(x - \boldsymbol{D}x_0), \tag{25}$$

przy czym macierze $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{D}$ mają postacie (10d) i (10c), odpowiednio.

Dowód. Z (9) dla $t = t_f > 0$ i $i = k \geq 1$ oraz dowolnych warunków brzegowych (10a) mamy

$$x - \boldsymbol{D}x_0 = \boldsymbol{R}u_k. \tag{26}$$

Z założenia $x \in \Re_+^{n_1+n_2}$ i $\boldsymbol{D}x_0 \in \Re_+^{n_1+n_2}$ są dowolnymi wektorami o nieujemnych elementach. Można więc tak dobrać te wektory, aby $x - \boldsymbol{D}x_0 \notin \Re_+^{n_1+n_2}$. W tym przypadku nie istnieje ciąg sterowań $u(i) \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,k$, spełniające równość (26), ponieważ $\boldsymbol{R} \in \Re_+^{(n_1+n_2)\times[(k+1)m]}$.

Z definicji 3 i (26) wynika, że jeżeli zachodzi $x - \boldsymbol{D}x_0 \in \Re_+^{n_1+n_2}$, to istnieje ciąg nieujemnych sterowań (25) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\boldsymbol{R}$ (10d) zawiera $n_1 + n_2$ liniowo niezależnych kolumn monomialnych. W tym przypadku istnieje prawa odwrotność tej macierzy

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{(k+1)m\times(k+1)n_1+n_2}. \tag{27}$$

Wykażemy, że sterowanie to przeprowadza w czasie $t_f > 0$ i k krokach układ (1) ze stanu (10a) do stanu końcowego (20). Podstawiając (25) do (9) w punkcie (t_f, k) otrzymamy

$$\boldsymbol{D}x_0 + \boldsymbol{R}u_k = \boldsymbol{D}x_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]^{-1}(x - \boldsymbol{D}x_0) = x \tag{28}$$

Układ jest więc sterowalny w punkcie (t_f, k). □

Twierdzenie 6. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest względnie sterowalny dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$, $t_f > 0$, $k \geq 1$, jeżeli

$$x_{1f} - \boldsymbol{D}_1 x_0 \in \Re_+^{n_1} \tag{29}$$

oraz są spełnione warunki

a) rząd macierzy $\boldsymbol{R}_1$, o postaci (10d), jest równy n_1,

b) z macierzy $\boldsymbol{R}_1$ (10d) można wybrać n_1 liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\widetilde{\boldsymbol{R}}_1$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji, zwaną też macierzą monomialną (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe).

Ciąg sterowań odcinkami stałych $u_k \in \Re_+^{(k+1)m}$ (10b), który przeprowadza układ (1a) w czasie $t_f > 0$ oraz $k \geq 1$ krokach z niezerowych warunków brzegowych (10a) do zadanego stanu końcowego $x_{1f} \in \Re_+^{n_1}$ jest określony wzorem

$$u_k = \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}]^{-1}(x_{1f} - \boldsymbol{D}_1 x_0). \tag{30}$$

Wówczas dla otrzymanego ciągu sterowań (30), przyjętych warunków brzegowych $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ i punktu (t_f, k) wartość składowej $x_{2f} = x_2(t_f, k) \in \Re_+^{n_2}$ wektora stanu (20) układu (1) wyznacza się ze wzoru

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0 + \boldsymbol{R}_2 u_k. \tag{31}$$

Dowód. Przeprowadza się identycznie jak twierdzenia 5, biorąc pod uwagę tylko pierwszy wiersz równania (9).
□

Niech $A = \mathrm{diag}[a_1, a_2, \mathrm{K}, a_n]$, $a_i < 0$, $i = 1, \mathrm{K}, n$, będzie macierzą diagonalną o ujemnych elementach. Wszystkie wartości własne macierzy A są rzeczywiste i ujemne.

Jeżeli A_{11} jest diagonalną macierzą o ujemnych elementach, to $\Phi(t) = e^{A_{11}t}$ jest również macierzą diagonalną i ma postać

$$\Phi(t) = e^{A_{11}t} = \mathrm{diag}[e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \mathrm{K}, e^{a_{n_1} t}] \in \Re_+^{n_1 \times n_1} \tag{32}$$

oraz macierz $-A_{11}^{-1}$ jest macierzą diagonalną o dodatnich współczynnikach i ma postać

$$-A_{11}^{-1} = \mathrm{diag}[\frac{-1}{a_1}, \frac{-1}{a_2}, \mathrm{K}, \frac{-1}{a_{n_1}}] \in \Re_+^{n_1 \times n_1}. \tag{33}$$

W tym przypadku operator $Q(t_f)$ jest macierzą monomialną, o postaci

$$Q(t_f) = -A_{11}^{-1}(I_{n_1} - e^{A_{11}t_f})B_1 \in \Re_+^{n_1 \times n_1} \tag{34}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $B_1 \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$ jest macierzą monomialną.

Wobec tego macierz

$$\boldsymbol{R}_1 = \left[R_1(0) \quad R_1(1)\right] = \left[P(t_f)B \quad Q(t_f)\right] \in \Re_+^{n_1 \times 2n_1} \tag{35}$$

ma n_1 kolumn monomialnych dla dowolnej chwili $t_f > 0.$ Zgodnie z twierdzeniem 6 układ (1) jest sterowalny dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t_f, 1)$ pod warunkiem (29).

Wniosek 1. Jeżeli A_{11} jest diagonalną macierzą o ujemnych elementach oraz macierz $B_1 \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$ jest monomialna, to dodatni układ (1) jest względnie sterowalny dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t_f, 1)$, $t_f > 0$.

4. PRZYKŁAD

Należy zbadać sterowalność dodatniego układu ciągło-dyskretnego (1) o macierzach:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Dla rozpatrywanego układu macierz podstawowa ma postać

$$\Phi(t) = e^{A_{11}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

operatory (5)

$$P(t_f) = \begin{bmatrix} 1-e^{-t_f} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^2,\ Q(t_f) = \begin{bmatrix} 1-e^{-t_f} & 0 \\ 0 & 0.5(1-e^{-t_f}) \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2}, \quad (38)$$

zaś macierze (13)

$$D = 0.3 - 0.1e^{-t_f} \in \Re_+^1,\ B = [1.1 - 0.1e^{-t_f} \quad 2.1 - 0.1e^{-2t_f}] \in \Re_+^{1\times 2}. \quad (39)$$

Dla $t_f \to \infty$ otrzymamy: $\lim\limits_{t_f\to\infty} \Phi(t_f) = \lim\limits_{t_f\to\infty} e^{A_{11}t_f} = 0$, $D_\infty = D(t_f \to \infty) = 0.3$.

Macierz A_{11} ma ujemne rzeczywiste wartości własne, zatem z twierdzenia 4 wynika, że dodatni układ ciągło-dyskretny (1), o macierzach (36), jest sterowalny do zera w czasie nieskończenie długim $t_f \to \infty$ i w nieskończenie wielu krokach $k \to \infty$.

Zbadamy teraz sterowalność powyższego układu w punkcie $(t_f, k) \in \Re_+ \times Z_+$, $t_f = 1$ i $k = 1$. Z powyższego oraz wzoru (10d) otrzymamy macierz

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(0) & R_1(1) \\ R_2(0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6721 & 1.3189 & 0.6321 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4323 \\ 1.0632 & 2.0865 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{3\times 4}. \quad (40)$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (40) ma $n_1 + n_2 = 3$ liniowo niezależne kolumny, przy czym tylko dwie z nich są monomialne. Zatem nie jest spełniony warunek b) twierdzenia 5, co oznacza, że rozpatrywany układ nie jest sterowalny w badanym punkcie.

Natomiast z Twierdzenia 6 wynika, że układ (1), o macierzach (36) jest względnie sterowalny w badanym punkcie dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^2$ pod warunkiem (29).

Przyjmijmy, że w punkcie $(t_f, k) = (1,1)$ składowa $x_{1f} = x_1(1,1) \in \Re_+^2$ wektora stanu (20) układu (1) jest równa

$$x_{1f} = x_1(1,1) = \begin{bmatrix} x_{11f} \\ x_{12f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

zaś wektor warunków brzegowych (10a) jest równy

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{11}(0) \\ x_{12}(0) \\ x_{11}(1) \\ x_{12}(1) \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \Re_+^5. \tag{42}$$

Podstawiając powyższe do (29) otrzymamy

$$x_{1f} - \boldsymbol{D}_1 x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0233 & 0.0171 & 0.3679 & 0 & 0.1664 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1353 & 0 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 0.9082 \\ 0.8647 \end{bmatrix} \in \Re_+^2. \tag{43}$$

Ciąg sterowań odcinkami stałych $u_1 \in \Re_+^4$ (10b) wyznaczymy ze wzoru (30)

$$u_1 = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}]^{-1} (x_{1f} - \boldsymbol{D}_1 x_0) = \begin{bmatrix} 0.2594 & 0 \\ 0.5091 & 0 \\ 0.2440 & 0 \\ 0 & 2.3130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9082 \\ 0.8647 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2356 \\ 0.4624 \\ 0.2216 \\ 2.0000 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Wartość składowej $x_{2f} = x_2(1,1) \in \Re_+^1$ wektora stanu (20) układu (1), która będzie osiągnięta w punkcie $(t_f, k) = (1,1)$ dla powyższych warunków brzegowych (42) i sterowania (44), jest równa

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0 + \boldsymbol{R}_2 u_1 = 1.7784. \tag{45}$$

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równań (1) o macierzach (36) w punkcie $(t_f, k) = (1,1)$ dla wektora warunków brzegowych (42).

Z ogólnego rozwiązania równania (1a), o postaci

$$x_1(t,i) = \Phi(t) x_1(i) + P(t) x_2(t,i) + Q(t) u(t,i), \tag{46}$$

oraz równania (1b) dla $i = 0,1,$ odpowiednio otrzymamy

$$x_1(t,0) = \begin{bmatrix} 2.2356 - 1.2356 e^{-t} \\ 0.2312 - 0.2312 e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$x_2(t,1) = 1.8301 - 0.1236 e^{-t} + 0.0462 e^{-2t}, \tag{48a}$$

$$x_1(t,1) = \begin{bmatrix} 2.0517 - 0.1753 e^{-t} + 0.0773 e^{-2t} + 0.0462 e^{-3t} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{48b}$$

Z powyższych rozwiązań obliczymy wartości wektora stanu w punktach $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$ dla $t_f = 1$ oraz $k = 0,1$:

$$\begin{bmatrix} x_1(1,0) \\ x_2(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7811 \\ 0.1999 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(1,1) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1.7784 \end{bmatrix} \tag{49}$$

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem sterowalności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych, opisanych równaniami stanu (1) przy założeniach (3) i (6).

Sformułowano podstawowe definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające sterowalności do zera i względnej sterowalności. Podano prostą metodę wyznaczania nieujemnego sterowania w klasie sterowań odcinkami stałych, które przeprowadza układ (1) z dowolnych niezerowych warunków brzegowych (3) do zadanego stanu końcowego (20) w punkcie $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$, $t_f > 0$, $k \geq 1$.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na dodatnie dwuwymiarowe układy ciągło-dyskretne ułamkowego rzędu.

LITERATURA

1. Kaczorek T.: *Positive 2D hybrid linear systems*, Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech. 55 (4), pp. 351–358, 2007.
2. Kaczorek T.: *Positive 1D and 2D Systems*, Springer-Verlag, London, 2002.
3. Klamka J.: *Controllability of dynamical system*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.
4. Marchenko V.M., Poddubnaya O.N.: *Relative controllability of stationary hybrid systems*, 10^{th} IEEE Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 267–272, 2004.
5. Trzasko W.: *Względna punktowa zupełność dodatnich układów ciągło-dyskretnych*, Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2, 2009.
6. Trzasko W.: *Reachability and controllability of cone discrete-time linear systems with delays in state and control*, XVI KKA, Challenging problems of science Control and Automation Recent Advances in Control and Automation, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, Rozdział II Stability, Controllability and Observability, s. 114-124.
7. Trzasko W.: *Sterowalność dodatnich singularnych układów dyskretnych z opóźnieniami od stanu i sterowania*, Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2, 2007.
8. Weiss L.: *Controllability for various linear and nonlinear systems models, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer Verlag, pp. 250-262, 1970.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, jako projekt badawczy nr G/WE/5/07.