mgr inż. Krzysztof Rogowski
Studia Doktoranckie, Wydział Elektryczny, Politechnika Białostocka

DODATNIOŚĆ I STABILNOŚĆ DWUWYMIAROWYCH UKŁADÓW LAPUNOWA NIECAŁKOWITEGO RZĘDU OPISANYCH MODELEM ROESSERA

Zaproponowano nową klasę dwuwymiarowych układów Lapunowa opisanych modelem Roessera. Podano warunki konieczne i wystarczające dodatniości i stabilności asymptotycznej takich układów. Pokazano, że problem badania stabilności asymptotycznej dwuwymiarowych układów Lapunowa niecałkowitego rzędu jest równoważny problemowi badania stabilności asymptotycznej odpowiadających im jednowymiarowych układów standardowych. Rozważania zilustrowano przykładem numerycznym.

POSITIVITY AND STABILITY OF FRACTIONAL 2D LYAPUNOV SYSTEMS DESCRIBED BY THE ROESSER MODEL

A new class of fractional 2D Lyapunov systems described by the Roesser models is introduced. Necessary and sufficient conditions for the positivity and asymptotic stability of the new class of systems are established. It is shown that the checking of the asymptotic stability of positive 2D fractional Lyapunov systems can be reduced to testing the asymptotic stability of corresponding positive standard 1D discrete-time systems. The considerations are illustrated by a numerical example.

1. WSTĘP

Najbardziej popularnymi modelami dwuwymiarowych układów liniowych są modele wprowadzone przez Roessera [38], Fornasiniego i Marchesiniego [6, 7] oraz Kurka [29]. Modele te zostały uogólnione na układy dodatnie w pracach [10, 12, 13, 40]. Teorii układów 2D poświęcone są monografie [1, 2, 8, 9]. Obszerny opis układów dodatnich zawarty został w monografiach [5, 12]. Problem stabilności asymptotycznej dodatnich układów dwuwymiarowych był rozpatrywany w pracach [16, 17, 20, 39]. Zagadnienie stabilizacji układów dwuwymiarowych było badane w [22].

Podstawy matematyczne algebry niecałkowitego rzędu zostały sformułowane w monografiach [30, 32-34]. Pojęcie dwuwymiarowego układu liniowego niecałkowitego rzędu zostało wprowadzone przez Kaczorka w [18] oraz uogólnione w [19, 21]. Problem stabilizacji dwywymiarowego układu niecałkowitego rzędu przez sprzężenie zwrotne od wektora stanu został rozpatrzony w [23, 28].

Sterowalność i obserwowalność układów Lapunowa była tematem pracy Murty i Apparao [31]. Dodatnie jednowymiarowe układy Lapunowa były rozpatrywane w wielu pracach [15, 24-26], a dodatnie dwuwymiarowe układy Lapunowa były analizowane w [37].

W pracy [36] wprowadzony został nowy model Lapunowa niecałkowitego rzędu, a następnie został uogólniony w [35]. Problemy dodatniości, stabilności asymptotycznej, obserwowalności, osiągalności i sterowalności do zeraz zostały sformułowane i rozwiązane.

Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie nowej klasy dwuwymiarowych układów Lapunowa niecałkowitego rzędu. Rozpatrzone zostaną problemy dodatniości oraz stabilności asymptotycznej nowej klasy układów.

Według wiedzy autora dwuwymiarowe układu Lapunowa niecałkowitego rzędu, ich dodatniość i stabilność asymptotyczna nie były dotychczas rozpatrywane.

2. WPROWADZENIE

W pracy będą stosowane następujące oznaczenia. Zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach $n \times m$ i elementach nieujemnych będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$ oraz $\Re_+^n := \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_+, a macierz jednostkową stopnia n przez I_n.

Macierz $A = \left[a_{ij}\right] \in \Re_+^{n\times m}$ o wszystkich elementach dodatnich ($a_{ij} > 0$ dla $i = 1,2,\ldots,n$ oraz $j = 1,2,\ldots,m$) będziemy nazywać ściśle dodatnią i oznaczać przez $A > 0$.

Macierz kwadratowa $A = \left[a_{ij}\right]$ będzie nazywana macierzą Metzlera, jeżeli wszystkie elementy poza główną przekątną tej macierzy są dodatnie, tj. $a_{ij} > 0$ dla $i \neq j$.

Definicja 1. [11] Iloczynem Kronekera $A \otimes B$ macierzy $A = \left[a_{ij}\right] \in \Re^{m\times n}$ i macierzy $B \in \Re^{p\times q}$ nazywamy macierz blokową postaci

$$A \otimes B = \left[a_{ij} B\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in \Re^{mp\times nq} \tag{1}$$

Lemat 1. [11] Równanie

$$AXB = C \tag{2}$$

gdzie $A \in \Re^{m\times n}$, $B \in \Re^{q\times p}$, $C \in \Re^{m\times p}$ oraz $X \in \Re^{n\times q}$ jest równoważne równaniu

$$\left(A \otimes B^T\right) x = c \tag{3}$$

przy czym

$$x := \left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\right]^T, \qquad c := \left[c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_m\right]^T \tag{4}$$

gdzie x_i oraz c_i są odpowiednio i-tymi wierszami macierzy X i C.

Lemat 2. [11] Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy $A \in \Re^{n\times n}$, zaś $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ są wartościami własnymi macierzy $B \in \Re^{n\times n}$, to $\lambda_i + \mu_j$ dla $i, j = 1,2,\ldots,n$ są wartościami własnymi macierzy

$$A \otimes I_n + I_n \otimes B^T . \tag{5}$$

Wprowadźmy następujące dwie definicje horyzontalnej i wertykalnej różnicy niecałkowitego rzędu dwuwymiarowych funkcji macierzowych.

Definicja 2. Różnicą horyzontalną niecałkowitego rzędu α dwuwymiarowej dyskretnej funkcji macierzowej $X_{ij}^h \in \Re^{n_1\times N}$, $i, j \in Z_+$ nazywamy funkcję o postaci

$$\Delta^\alpha X_{ij}^h = \sum_{k=0}^{i} c_\alpha(k) X_{i-k,j}^h , \tag{6}$$

gdzie $\alpha \in \Re$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \{1,2,\ldots\}$ oraz

$$c_\alpha(k)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad k=0\\ (-1)^k\binom{\alpha}{k}=(-1)^k\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{dla} \quad k>0\end{cases} \tag{7}$$

Definicja 3. Różnicą wertykalną niecałkowitego rzędu β dwuwymiarowej dyskretnej fuknkcji macierzowej $X_{ij}^v \in \Re^{n_2 \times N}$, $i, j \in Z_+$ nazywamy funkcję o postaci

$$\Delta^\beta X_{ij}^v=\sum_{l=0}^{j} c_\beta(l)\, X_{i,j-l}^v, \tag{8}$$

gdzie $\beta \in \Re$, $n-1<\beta<n$, $n \in \{1,2,\ldots\}$ oraz

$$c_\beta(l)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad l=0\\ (-1)^l\binom{\beta}{l}=(-1)^l\dfrac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-l+1)}{l!} & \text{dla} \quad l>0\end{cases} \tag{9}$$

Lemat 3. [28] Jeżeli $n-1<\alpha<n$, $n \in \{1,2,\ldots\}$ $(n-1<\beta<n)$, to

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_\alpha(k)=0 \quad \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_\beta(l)=0\right). \tag{10}$$

3. DWUWYMIAROWE UKŁADY LAPUNOWA NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

3.1. Równania stanu dwuwymiarowych układów Lapunowa niecałkowitego rzędu

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu opisany równaniami

$$\begin{bmatrix}\Delta^\alpha X_{i+1,j}^h\\ \Delta^\beta X_{i,j+1}^v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}^0 & A_{12}^0\\ A_{21}^0 & A_{22}^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{ij}^h\\ X_{ij}^v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}X_{ij}^h\\ X_{ij}^v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}^1 & A_{12}^1\\ A_{21}^1 & A_{22}^1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}U_{ij} \tag{11a}$$

$$Y_{ij}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{ij}^h\\ X_{ij}^v\end{bmatrix}+DU_{ij}, \qquad i, j \in Z_+ \tag{11b}$$

gdzie $X_{ij}^h \in \Re^{n_1 \times N}$, $X_{ij}^v \in \Re^{n_2 \times N}$ są odpowiednio horyzontalną i wertykalną macierzą stanu w punkcie (i, j), $U_{ij} \in \Re^{m \times N}$ jest macierzą wymuszeń, $Y_{ij} \in \Re^{p \times N}$ jest macierzą wyjść w punkcie (i, j) oraz $A_{kl}^r \in \Re^{n_k \times n_l}$ dla $k, l=1,2$ i $r=0,1$; $B_k \in \Re^{n_k \times m}$, $C_k \in \Re^{p \times n_k}$ dla $k=1,2$; $D \in \Re^{p \times m}$ oraz $N=n_1+n_2$.

Korzystając z Definicji 2 i Definicji 3 równanie (11a) możemy napisac w postaci

$$\begin{bmatrix}X_{i+1,j}^h\\ X_{i,j+1}^v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11}^0 & A_{12}^0\\ A_{21}^0 & \overline{A}_{22}^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{ij}^h\\ X_{ij}^v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}X_{ij}^h\\ X_{ij}^v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}^1 & A_{12}^1\\ A_{21}^1 & A_{22}^1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k)\, X_{i-k+1,j}^h\\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l)\, X_{i,j-l+1}^v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}U_{ij} \tag{12}$$

przy czym $\overline{A}_{11}^0=A_{11}^0+\alpha \mathrm{I}_{n_1}$, $\overline{A}_{22}^0=A_{22}^0+\beta \mathrm{I}_{n_2}$.

Warunki brzegowe dla (11a) i (12) mają postać

$$X_{0j}^h \text{ dla } j \in Z_+ \text{ oraz } X_{i0}^v \text{ dla } i \in Z_+. \tag{13}$$

Lemat 4. Dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) może zostać przekształcony do równoważnej postaci dwuwymiarowego Nm-wejsciowego i Np-wyjściowego układu niecałkowitego rzędu opisanego modelem Roessera [28]

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h_{i+1,j} \\ \bar{x}^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^h_{ij} \\ \bar{x}^v_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k)\, \bar{x}^h_{i-k+1,j} \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l)\, \bar{x}^v_{i,j-l+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \bar{u}_{ij} \tag{14a}$$

$$\bar{y}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^h_{ij} \\ \bar{x}^v_{ij} \end{bmatrix} + \bar{D}\bar{u}_{ij}, \qquad i, j \in Z_+ \tag{14b}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \bar{x}^h_{ij} &= \begin{bmatrix} {}_1X^h_{ij} & {}_2X^h_{ij} & \cdots & {}_{n_1}X^h_{ij} \end{bmatrix}^T \in \Re^{N\cdot n_1}, \\ \bar{x}^v_{ij} &= \begin{bmatrix} {}_1X^v_{ij} & {}_2X^v_{ij} & \cdots & {}_{n_2}X^v_{ij} \end{bmatrix}^T \in \Re^{N\cdot n_2}, \\ \bar{u}_{ij} &= \begin{bmatrix} {}_1U_{ij} & {}_2U_{ij} & \cdots & {}_mU_{ij} \end{bmatrix}^T \in \Re^{N\cdot m}, \\ \bar{y}_{ij} &= \begin{bmatrix} {}_1Y_{ij} & {}_2Y_{ij} & \cdots & {}_pY_{ij} \end{bmatrix}^T \in \Re^{N\cdot p} \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie ${}_kX^h_{ij}$, ${}_kX^v_{ij}$, ${}_kU_{ij}$, ${}_kY_{ij}$ oznaczają odpowiednio k-te wiersze macierzy X^h_{ij}, X^v_{ij}, U_{ij}, Y_{ij} oraz

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{11} = \bar{A}^0_{11} \otimes \mathrm{I}_N + \mathrm{I}_{n_1} \otimes \begin{bmatrix} A^1_{11} & A^1_{12} \\ A^1_{21} & A^1_{22} \end{bmatrix}^T \in \Re^{(N\cdot n_1)\times(N\cdot n_1)}, \\ &\bar{A}_{12} = A^0_{12} \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot n_1)\times(N\cdot n_2)}, \quad \bar{A}_{21} = A^0_{21} \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot n_2)\times(N\cdot n_1)}, \\ &\bar{A}_{22} = \bar{A}^0_{22} \otimes \mathrm{I}_N + \mathrm{I}_{n_2} \otimes \begin{bmatrix} A^1_{11} & A^1_{12} \\ A^1_{21} & A^1_{22} \end{bmatrix}^T \in \Re^{(N\cdot n_2)\times(N\cdot n_2)}, \\ &\bar{B}_1 = B_1 \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot n_1)\times(N\cdot m)}, \quad \bar{B}_2 = B_2 \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot n_2)\times(N\cdot m)}, \\ &\bar{C}_1 = C_1 \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot p)\times(N\cdot n_1)}, \quad \bar{C}_2 = C_2 \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot p)\times(N\cdot n_2)}, \\ &\bar{D} = D \otimes \mathrm{I}_N \in \Re^{(N\cdot p)\times(N\cdot m)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dowód. Korzystając z Lematu 1 dla równań (12) i (11b) otrzymujemy natychmiast (14). □

Warunki brzegowe dla układu (14) mają postać

$$\begin{aligned} \bar{x}^h_{0j} &= \begin{bmatrix} {}_1X^h_{0j} & {}_2X^h_{0j} & \cdots & {}_{n_1}X^h_{0j} \end{bmatrix}^T \quad \text{dla} \quad j \in Z_+, \\ \bar{x}^v_{i0} &= \begin{bmatrix} {}_1X^v_{i0} & {}_2X^v_{i0} & \cdots & {}_{n_2}X^v_{i0} \end{bmatrix}^T \quad \text{dla} \quad i \in Z_+. \end{aligned} \tag{17}$$

Twierdzenie 1. Rozwiązanie równania (14a), spełniające warunki brzegowe (17), ma postać

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^h_{ij} \\ \bar{x}^v_{ij} \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^{i} \bar{T}_{i-p,j} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}^v_{p0} \end{bmatrix} + \sum_{q=0}^{j} \bar{T}_{i,j-q} \begin{bmatrix} \bar{x}^h_{0q} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{j} \left(\bar{T}_{i-p-1,j-q}\bar{B}^{10} + \bar{T}_{i-p,j-q-1}\bar{B}^{01} \right) \bar{u}_{pq} \tag{18}$$

przy czym

$$\bar{B}^{10} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B}^{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

oraz macierze tranzycji modelu (14a) $\bar{T}_{pq} \in \Re^{N^2 \times N^2}$ mają postać

$$\bar{T}_{pq} = \begin{cases} \mathrm{I}_{N^2} & \text{dla } p=0,\ q=0 \\ \mathrm{T}_{pq} & \text{dla } p+q>0 \ \left(p,q \in \mathrm{Z}_+\right) \\ 0 \text{ (zero matrix)} & \text{dla } p<0 \text{ i/lub } q<0 \end{cases} \tag{20}$$

gdzie

$$\mathrm{T}_{pq} = \bar{T}_{10}\bar{T}_{p-1,q} - \sum_{k=2}^{p} \begin{bmatrix} c_\alpha(k)\mathrm{I}_{(N\cdot n_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{T}_{p-k,q} + \bar{T}_{01}\bar{T}_{p,q-1} - \sum_{k=2}^{q} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_\beta(l)\mathrm{I}_{(N\cdot n_2)} \end{bmatrix} \bar{T}_{p,q-l} \tag{21}$$

przy czym

$$\bar{T}_{10} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{T}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Dowód. Rozwiązanie równania (14a) otrzymujemy natychmiast korzystając z rozwiązania dwuwymiarowego układu niecałkowitego rzędu opisanego modelem Roessera, patrz [28]. □

3.2. Dodatniość dwuwymiarowych układów Lapunowa niecałkowitego rzędu

Definicja 4. Układ (11) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim dwuwymiarowym układem Lapunowa niecałkowitego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $X_{ij}^h \in \Re_+^{n_1 \times N}$, $X_{ij}^v \in \Re_+^{n_2 \times N}$ oraz $Y_{ij} \in \Re_+^{p \times N}$, $i, j \in \mathrm{Z}_+$ dla dowolnych nieujemnych warunków brzegowych $X_{0j}^h \in \Re_+^{n_1 \times N}$, $j \in \mathrm{Z}_+$ oraz $X_{i0}^v \in \Re_+^{n_2 \times N}$, $i \in \mathrm{Z}_+$ oraz dowolnych nieujemnych wymuszeń $U_{ij} \in \Re_+^{m \times N}$, $i, j \in \mathrm{Z}_+$.

Twierdzenie 2. Dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) dla $\alpha, \beta \in \Re$, $0 < \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$ jest (wewnętrznie) dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_{kk}^l = \left[{}_{ij}a_{kk}^l \right]_{i,j=1,2,\ldots,n_k} \quad \text{dla } k=1,2;\ l=0,1 \tag{23a}$$

są macierzami Metzlera spełniającymi natępujące warunki

$$\begin{aligned} &{}_{ii}a_{11}^0 + \alpha + {}_{jj}a_{11}^1 \ge 0 && \text{dla} \quad i,j=1,2,\ldots,n_1 \\ &{}_{ii}a_{11}^0 + \alpha + {}_{jj}a_{22}^1 \ge 0 && \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n_2 \\ &{}_{ii}a_{22}^0 + \beta + {}_{jj}a_{11}^1 \ge 0 && \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n_2;\ j=1,2,\ldots,n_1 \\ &{}_{ii}a_{22}^0 + \beta + {}_{jj}a_{22}^1 \ge 0 && \text{dla} \quad i,j=1,2,\ldots,n_2 \end{aligned} \tag{23b}$$

oraz

$$\begin{aligned} &A_{kl}^r \in \Re_+^{n_k \times n_l};\ \text{dla } k,l=1,2;\ k \ne l;\ r=0,1; \\ &B_k \in \Re_+^{n_k \times m};\ C_k \in \Re_+^{p \times n_k} \ \text{dla} \ k=1,2; \\ &D \in \Re_+^{p \times m}. \end{aligned} \tag{23c}$$

Dowód. Dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy równoważny dwuwymiarowy układ niecałkowitego rzędu (14) jest dodatni. Korzystając z warunków dodatniości dwuwymiarowych układów niecałkowitego rzędu opisanych modelem Roessera [28] otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in \Re_+^{N^2 \times N^2}, \quad \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \in \Re_+^{N^2 \times (N\cdot m)}, \\ &\begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \in \Re_+^{(N\cdot p) \times N^2}, \quad \bar{D} \in \Re_+^{(N\cdot p)\times(N\cdot m)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Biorąc pod uwagę (16) otrzymujemy (23). □

3.3. Stabilność asymptotyczna dodatnich dwuwymiarowych układów Lapunowa niecałkowitego rzędu

Definicja 5. Dodatni układ Lapunowa (11) nazywamy stabilnym asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych ograniczonych warunków brzegowych $X_{0j}^{h} \in \Re_{+}^{n_1 \times N}$, $j \in Z_{+}$, $X_{i0}^{v} \in \Re_{+}^{n_2 \times N}$, $i \in Z_{+}$ i zerowego wymuszenia $U_{ij} = 0$, $i, j \in Z_{+}$ jest spełniony następujący warunek

$$\lim_{i,j\to\infty} \begin{bmatrix} X_{ij}^{h} \\ X_{ij}^{v} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{25}$$

Twierdzenie 3. Dodatni układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z poniższych równoważnych warunków:

1) dodatni jednowymiarowy układ dyskretny

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} x_i \tag{26}$$

przy czym

$$\tilde{A}_{kk} = \left(A_{kk}^{0} + \mathrm{I}_{n_k}\right) \otimes \mathrm{I}_N + \mathrm{I}_{n_k} \otimes \begin{bmatrix} A_{11}^{1} & A_{12}^{1} \\ A_{21}^{1} & A_{22}^{1} \end{bmatrix}^{T} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2 \tag{27}$$

oraz $\bar{A}_{12}$, $\bar{A}_{21}$ są określone wzorami (16) jest stabilny asymptotycznie,

2)
$$\left|\lambda_i + \mu_j\right| < 1 \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, \ldots, N \tag{28}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ są wartościami własnymi macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{0} + \mathrm{I}_{n_1} & A_{12}^{0} \\ A_{21}^{0} & A_{22}^{0} + \mathrm{I}_{n_2} \end{bmatrix}$$

oraz $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ są wartościami własnymi macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{1} & A_{12}^{1} \\ A_{21}^{1} & A_{22}^{1} \end{bmatrix}$$

3) istnieje ścisle dodatnia macierz $\Lambda \in \Re_{+}^{N \times N}$ taka, że

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{0} & A_{12}^{0} \\ A_{21}^{0} & A_{22}^{0} \end{bmatrix} \Lambda + \Lambda \begin{bmatrix} A_{11}^{1} & A_{12}^{1} \\ A_{21}^{1} & A_{22}^{1} \end{bmatrix} < 0 \tag{29}$$

Dowód. Zgodnie z Lematem 4 dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy równoważny dwuwymiarowy układ niecałkowitego rzędu (14) jest stabilny asymptotycznie. Zauważmy, że układ (14) jest układem z opóźnieniami, których liczba rośnie dla $i, j \to \infty$. W [3, 4] wykazano, że stabilność asymptotyczna dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami nie zależy od liczby i wielkości opóźnień, lecz od sumy macierzy stanu. Zatem stabilność asymptotyczna dodatniego dwuwymiarowego układu (14) jest równoważna stabilności asymptotycznej dodatniego jednowymiarowego układu z macierzą stanu

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} - \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) \mathrm{I}_{(N\cdot n_1)} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} - \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) \mathrm{I}_{(N\cdot n_2)} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Korzystając z Lematu 3 oraz z (7) i (9) otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_\alpha(k) = \alpha - 1 \text{ oraz } \sum_{l=2}^{\infty} c_\beta(l) = \beta - 1 \tag{31}$$

Podstawiając (31) do (30) otrzymamy (26).

Jak powszechnie wiadomo, jednowymiarowy układ dyskretny (26) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne jego macierzy stanu mają moduły mniejsze od jedności. Korzystając z Lematu 2 dla układu (26) oraz ze wzorów (27) i (16) otrzymujemy natychmiast (28).

W [14] wykazano, że dodatni jednowymiarowy układ (26) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ściśle dodatni wektor $\lambda \in \Re_+^N$ taki, że

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} - \mathrm{I}_{(N\cdot n_1)} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \tilde{A}_{22} - \mathrm{I}_{(N\cdot n_2)} \end{bmatrix} \lambda < 0$$

Korzystając z Lematu 1 oraz z (27) otrzymamy (29). □

Niech

$$\begin{bmatrix} A_{11}^r & A_{12}^r \\ A_{21}^r & A_{22}^r \end{bmatrix} = \left[a_{kl}^r \right]_{k,l=1,2,\ldots,N} \text{ dla } r = 0,1 \tag{32}$$

oraz

$$\Lambda = \left[\lambda_{kl} \right]_{k,l=1,2,\ldots,N}. \tag{33}$$

Twierdzenie 4. Dodatni dwuwymiarowy układ Lapunowa (11) jest stabilny asymptotycznie tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} a_{kk}^0 + a_{ll}^1 &\in [-\alpha, 0) \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,n_1; \; l = 1,2,\ldots,N \\ a_{kk}^0 + a_{ll}^1 &\in [-\beta, 0) \quad \text{dla} \quad k = n_1+1, n_1+2, \ldots, N; \; l = 1,2,\ldots,N \end{aligned} \tag{34}$$

Dowód. Nierówność (29) możemy napisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}^0 \lambda_{jl} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{kj} a_{jl}^1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} a_{kj}^0 \lambda_{jl} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{N} \lambda_{kj} a_{jl}^1 + \left(a_{kk}^0 + a_{ll}^1 \right) \lambda_{kl} < 0 \quad \text{dla } k,l = 1,2,\ldots,N \tag{35}$$

Z Twierdzenia 2 wynika, że nierówność może być spełniona tylko wtedy, gdy warunki (34) są spełnione. □

4. PRZYKŁAD

Rozważmy dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) dla $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.5$ oraz

$$\begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = 0. \tag{36}$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2 układ (36) jest dodatni, gdyż macierze $A_{11}^0, A_{22}^0, A_{11}^1, A_{22}^1$ są macierzami Metzlera i spełniają następujące warunki

$$
\begin{aligned}
{}_{11}a_{11}^{0} + \alpha + {}_{11}a_{11}^{1} &= 0.1 > 0 \\
{}_{11}a_{11}^{0} + \alpha + {}_{11}a_{22}^{1} &= 0.2 > 0 \\
{}_{11}a_{22}^{0} + \beta + {}_{11}a_{11}^{1} &= 0.1 > 0 \\
{}_{11}a_{22}^{0} + \beta + {}_{11}a_{22}^{1} &= 0.2 > 0
\end{aligned}
$$

a pozostałe macierze układu mają wszystkie elementy nieujemne.

Korzystając z Twierdzenia 3 otrzymujemy następujące wyniki.

1) Jednowymiarowy układ dyskretny o macierzy

$$
\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}
$$

jest stabilny asymptotycznie, gdyż wartości własne macierzy stanu tego układu mają moduły mniejsze od jedności $|z_1| = 0.7$, $|z_2| = 0.4$, $|z_3| = 0.6$, $|z_4| = 0.3$.

2) Biorąc pod uwagę, że macierz

$$
\begin{bmatrix} A_{11}^{0} + \mathrm{I}_{n_1} & A_{12}^{0} \\ A_{21}^{0} & A_{22}^{0} + \mathrm{I}_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}
$$

ma wartości własne $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.8$ oraz macierz

$$
\begin{bmatrix} A_{11}^{1} & A_{12}^{1} \\ A_{21}^{1} & A_{22}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}
$$

ma wartości własne $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = -0.1$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1 + \mu_1| &= 0.6 < 1, \quad |\lambda_1 + \mu_2| = 0.7 < 1, \\
|\lambda_2 + \mu_1| &= 0.3 < 1, \quad |\lambda_2 + \mu_2| = 0.4 < 1.
\end{aligned}
$$

3) Istnieje ściśle dodatnia macierz

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},
$$

która spełnia nierówność

$$
\begin{bmatrix} A_{11}^{0} & A_{12}^{0} \\ A_{21}^{0} & A_{22}^{0} \end{bmatrix} \Lambda + \Lambda \begin{bmatrix} A_{11}^{1} & A_{12}^{1} \\ A_{21}^{1} & A_{22}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.5 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix} < 0 .
$$

Wykazaliśmy zatem, że dodatni dwuwymiarowy układ Lapunowa niecałkowitego rzędu (11) z macierzami (36) jest stabilny asymptotycznie.

Zauważmy, że warunki Twierdzenia 4 są również spełnione, gdyż

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{0} + a_{11}^{1} &= -0.7 \in [-0.8, 0), \quad a_{11}^{0} + a_{22}^{1} = -0.6 \in [-0.8, 0), \\
a_{22}^{0} + a_{11}^{1} &= -0.4 \in [-0.5, 0), \quad a_{22}^{0} + a_{22}^{1} = -0.3 \in [-0.5, 0).
\end{aligned}
$$

5. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy zaproponowano nową klasę dwuwymiarowych układów Lapunowa niecałkowitego rzędu opisanych modelem Roessera. Warunki konieczne i wystarczające dodatniości tego modelu zostały sformułowane w Twierdzeniu 2 oraz stabilności asymptotycznej w Twierdzeniu 3. Wykazano, że problem badania stabilności asymptotycznej dodatniego dwuwymiarowego układu Lapunowa niecałkowitego rzędu może zostać sprowadzony do badania stabilności asyptotycznej odpowiadającemu mu dodatniego układu jednowymiarowego. Rozważania zostały zilustrowane przykładem numerycznym.

Problemem otwartym jest rozszerzenie tych rozważań na dwuwymiarowe układy Lapunowa opisane modelem o strukturze zbliżonej do dwuwymiarowego modelu Kurka [29].

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Bose N. K.: Applied Multidimensional Systems Theory, Van Nonstrand Reinhold Co., New York, 1982.
2. Bose N. K.: Multidimensional Systems Theory Progress, Directions and Open Problems, D. Reidel Publishing Co., 1985.
3. Busłowicz M.: Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays, Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., vol. 56, nr 4, str. 325-328, 2008.
4. Busłowicz M., Kaczorek T.: Simple conditions for practical stability of positive fractional discrete-time linear systems, Intern. J. Applied Math. Comp. Science, vol. 19, nr 2, str. 263-269, 2009.
5. Farina E., Rinaldi S.: Positive Linear Systems: Theory and Applications, J. Willey, New York, 2000.
6. Fornasini E., Marchesini G.: State-space realization theory of two-dimensional filters, IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-21, str. 484-491, 1976.
7. Fornasini E., Marchesini G.: Double indexed dynamical systems, Math. Sys. Theory, nr 12, str. 59-72, 1978.
8. Gałkowski K.: State space realizations of linear 2D systems with extensions to the general nD ($n > 2$) case, Springer Verlag, London, 2001.
9. Kaczorek T.: Two-Dimensional Linear Systems, Springer Verlag, London, 1985.
10. Kaczorek T.: Reachability and controllability of non-negative 2D Roesser type models, Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., vol. 44, nr 4, str. 405-410, 1996.
11. Kaczorek T.: Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice, WNT, 1998.
12. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer Verlag, London, 2001.
13. Kaczorek T.: Reachability and minimum energy control of positive 2D systems with delays, Control and Cybernetics, vol. 34, nr 2, s. 411-423, 2005.
14. Kaczorek T.: Choice of the forms of Lyapunov functions for positive 2D Roesser model, Intern. J. Applied Math. Comp. Science, vol. 17, nr 4, s. 471-475, 2007.
15. Kaczorek T.: Positive discrete-time linear Lyapunov systems, Procc. 15-th Miditerrean Conf. Cont. Automation, MED, Athens, Greece, 2007.
16. Kaczorek T.: Asymptotic stability of positive 1D and 2D linear systems, Recent Advances in Control and Automation, Acad. Publ. House EXIT, s. 41-52, 2008.

17. Kaczorek T.: Asymptotic stability of positive 2D linear systems. XIII Scientific Conf. Comp. App. Electrical Engineering, s. 1-5, Poznań, Kwiecień 14-16, 2008.
18. Kaczorek T.: Fractional 2D linear systems, J. Aut., Mob. Rob. Intell. Sys., vol. 2, nr 2, s. 5-9, 2008.
19. Kaczorek T: Positive different orders fractional 2D linear systems, Acta Mech. et Aut., vol. 2, nr 2, s. 51-58, 2008.
20. Kaczorek T.: LMI approach to stability of 2D positive systems, Multidim. Syst. Signal Process., vol. 20, nr 1, s. 39-54, 2009.
21. Kaczorek T.: Positive 2D fractional linear systems. COMPEL, vol. 28, nr 2, s. 341-352, 2009.
22. Kaczorek T.: Positivity and stabilization of 2D linear systems, SIAM J. Contr. Optim., 2009, (Submitted).
23. Kaczorek T.: Positivity and stabilization of fractional 2D Roesser model by state feedbacks, LMI approach. Arch. Cont. Sci., vol. 19(LV), nr 2, s. 165-177, 2009.
24. Kaczorek T., Przyborowski P.: Continuous-time linear Lyapunov cone-systems, Procc. 13-th MMAR Conf., s. 225-229, Szczecin, 2007.
25. Kaczorek T., Przyborowski P.: Positive continuous-time linear Lyapunov systems, Procc. Int. Conf. Computer as a Tool, EUROCON, s. 731-737, Warszawa, 2007.
26. Kaczorek T., Przyborowski P.: Positive continuous-time linear time-varying Lyapunov systems, Procc. 16-th Int. Conf. Sys. Sci., s. 140-149, Wrocław, 2007.
27. Kaczorek T., Przyborowski P.: Reachability, controllability to zero and observability of the positive discrete-time Lyapunov systems, Control and Cybernetics, vol. 38, nr 2, s. 529-541, 2009.
28. Kaczorek T., Rogowski K.: Positivity and stabilization of fractional 2D linear systems described by the Roesser model, Intern. J. Applied Math. Comp. Science, vol. 20, nr. 1, 2010.
29. Kurek J.: The general state-space model for a two-dimensional linear digital systems. IEEE Trans. Aut. Contr., vol. AC-30, s. 600-602, 1985.
30. Miller K. S., Ross B.: An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. J. Willey, New York, 1993.
31. Murty M. S. N., Apparao B. V.: Controllability and observability of Lyapunov systems, Ranchi University Math. J., vol. 32, s. 55-65, 2005.
32. Nashimoto K.: Fractional Calculus. Descartes Press, Koriyama, 1984.
33. Oldham K. B., Spanier J.: The Fractional Calculus, Acad. Press, New York, 1974.
34. Podlubny I.:Fractional Differential Equations, Acad. Press, San Diego, 1999.
35. Przyborowski P.: Fractional discrete-time Lyapunov cone-systems, Przegląd Elektrotechniczny, vol. 84, nr 5, s. 47-52, 2008.
36. Przyborowski P.: Positive fractional discrete-time Lyapunov systems, Arch. Contr. Sci., vol. 18, nr 1, s. 121-134, 2008.
37. Przyborowski P., Kaczorek T.: Positive discrete-time linear Lyapunov systems. Intern. J. Applied Math. Comp. Science, vol. 19, nr 1, s. 95-105, 2009.
38. Roesser R. P.: A discrete state-space model for linear image processing, IEEE Trans. Aut. Contr., vol. AC-20, nr 1, s. 1-10, 1975.
39. Twardy M.: An LMI approach to checking stability of 2D positive systems. Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., vol. 55, nr 4, s. 385-395, 2007.
40. Valcher M. E., On the internal stability and asymptotic behavior of 2D positive systems, IEEE Trans. On Circuits and Systems – I, vol. 44, nr. 7, s. 602-613, 1997.