Prof. dr hab. inż. Zdzisław Gosiewski
Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny

WPŁYW POŁOŻENIA CZUJNIKÓW I ELEMENTÓW WYKONAWCZYCH NA STABILNOŚĆ UKŁADU WIRNIK-ŁOŻYSKA MAGNETYCZNE

Z punktu widzenia teorii sterowania, drgania wirników są szybkimi procesami wysokiego rzędu, a wirnik obiektem o wielu wejściach i wielu wyjściach (MIMO). Dlatego stosuje się lokalne pętle regulacyjne. W artykule, rozważanym obiektem jest sztywny wirnik podparty przez dwa promieniowe łożyska magnetyczne. Przedstawiono metodę redukcji modelu wirnika na potrzeby projektowania lokalnych układów regulacji. Przedstawiona metoda redukcji jest użyteczna dla każdej metody projektowania praw sterowania, a zwłaszcza dla systemów sterowania odpornego Pokazano wyniki badań wpływu niekolokacji (gdy czujniki i elementy wykonawcze nie leżą w tych samych płaszczyznach) na dynamikę układu zamkniętego. Zaproponowano możliwości przeciwdziałania negatywnym skutkom niekolokacji.

INFLUENCE OF NONCOLLOCATION OF SENSORS AND ACTUATORS ON THE STABILITY OF MAGNETIC BEARING-ROTOR SYSTEM

Magnetic bearing-rotor system is a fast high-order multi-input multi-output (MIMO) system. Therefore, local control loops are used. The rigid rotor with two radial magnetic bearings is considered in the paper. The sensors are shifted from the magnetic bearing planes what leads to the non-collocated local closed-loops. The stability of full closed-loop system is analyzed for different locations of sensors. Proposed is a method to reduce the influence of non-collocation on dynamic behavior of closed-loop full system.

1.WSTĘP

Zgodnie z teorią sterowania, każdy złożony układ dynamiczny może zostać podzielony na mniejsze podukłady lub wręcz podstawowe człony. Poszczególne podukłady są stabilne bądź niestabilne. Podukłady są sprzężone ze sobą, a sprzężenia mogą stabilizować bądź destabilizować cały układ. Zatem analiza podukładów i ich połączeń daje nam opis zachowania dynamicznego całego układu. Ponadto, wskazuje na dynamiczne zjawiska odpowiedzialne za niestabilność ruchu lub niskie tłumienie drgań układu. Analiza ta jest również ważna dla projektowania układu sterowania drganiami i układów mechanicznych. Dostarcza wiedzę, gdzie i jak powinniśmy doprowadzić energię sił sterujących, aby stabilizować i tłumić drgania.

W niniejszym artykule rozważane jest sterowanie drganiami sztywnego wirnika z wykorzystaniem czterech lokalnych regulatorów typu PD. Dla dwóch płaszczyzn prostopadłych do siebie i przecinających oś wirnika buduje się niezależnie dwa podukłady sterowania sprzężone ze sobą przez jeden parametr, którym jest prędkość obrotowa. Przyjęto, że płaszczyzny pomiarowe i płaszczyzny sterujące nie pokrywają się. Taką sytuację nazywamy niekolokacją. Jak wiadomo [7], niekolokacja prowadzi do niemimalnofazowego modelu obiektu, co utrudnia projektowanie układów sterowania. Zbadano stabilność całego układu z wykorzystaniem metody linii pierwiastkowych Evansa. Badania te przeprowadzone są zarówno dla kolokowanych jak i niekolokowanych płaszczyzn pomiarowych i sterujących w szerokim zakresie prędkości obrotowych wirnika. Przeprowadzona analiza pozwala wskazać drogę do przeciwdziałania negatywnym skutkom niekolokacji płaszczyzn.

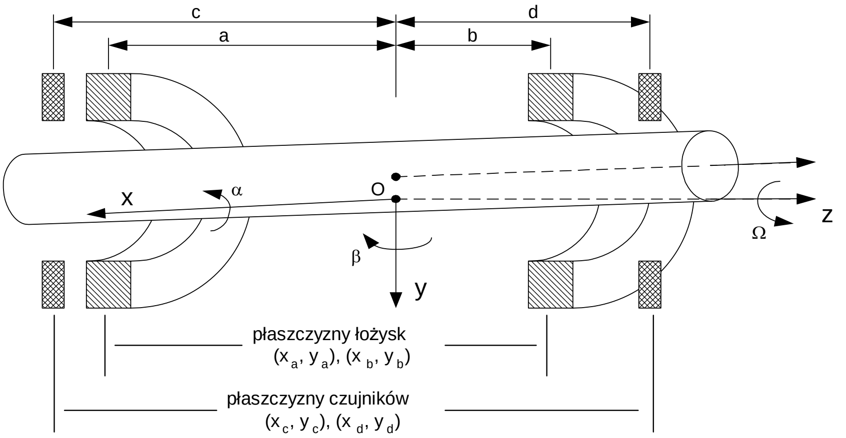
2. PEŁNY MODEL OBIEKTU

Rozpatrzymy sterowanie obiektem przedstawionym na rys. 1. Ruch wirnika można opisać przy pomocy współrzędnych modalnych [1], tj. opisujących translacyjny ruch środka masy wirnika – *x, y* oraz ruch obrotowy (nachylenie wału) - α, β. Równania ruchu, wyprowadzone na podstawie prawa Newtona i równań Euler'a, są następujące:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ax} + F_{bx}, \\ m\ddot{y} &= F_{ay} + F_{by}, \end{aligned} \qquad (1a)$$

$$\begin{aligned} I_x\ddot{\beta} - \Omega I_z\dot{\alpha} &= -aF_{ax} + bF_{bx}, \\ -I_x\ddot{\alpha} - \Omega I_z\dot{\beta} &= -aF_{ay} + bF_{by}. \end{aligned} \qquad (1b)$$

W powyższym równaniu mamy: *F*- siły elektromagnetyczne gdzie indeksy $_{(a,b,)}$ $_{(x,y)}$ wskazują odpowiednią płaszczyznę łożyska oraz odpowiednią oś na płaszczyźnie, *m* – masa, *a, b*, – odległość środka masy wirnika oraz płaszczyzn łożyska, odpowiednio, gdzie: $a+b=l$, Ω – prędkość kątowa wirnika, $I_x=I_y$, I_z- momenty bezwładności odpowiednio względem osi *x,y* i *z*.



Rys 1. Schemat układu wirnikowego z dwiema płaszczyznami promieniowych łożysk magnetycznych oraz dwiema płaszczyznami czujników.

Współrzędne modalne są zawarte w wektorze: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & \beta & y & -\alpha \end{bmatrix}^T$. Ruch wirnika może być również wyrażony poprzez współrzędne wirnika w płaszczyznach łożysk $\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} x_a & x_b & y_a & y_b \end{bmatrix}^T$ [1] lub poprzez współrzędne w płaszczyznach czujników $\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} x_c & x_d & y_c & y_d \end{bmatrix}^T$. Aby transformować zmienne z jednego układu współrzędnych do innego, mogą zostać użyte następujące zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_b &= \mathbf{T}_1\mathbf{p}, \\ \mathbf{p}_m &= \mathbf{T}_2\mathbf{p}, \end{aligned} \qquad (2)$$

gdzie: $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_m \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 1 & d \end{bmatrix}$.

Siły generowane przez elektromagnesy są nieliniowymi funkcjami prądu oraz położenia wału. Po linearyzacji, siły, dla poszczególnych par cewek, przyjmują postać:

$$F_{ax} = k_{iax} i_{ax} + k_{sax} x_a, \quad F_{bx} = k_{ibx} i_{bx} + k_{sbx} x_b,$$
$$F_{ay} = k_{iay} i_{ay} + k_{say} y_a, \quad F_{by} = k_{iby} i_{by} + k_{sby} y_b, \tag{3}$$

Zazwyczaj oba łożyska magnetyczne są identyczne i symetryczne. W tym przypadku mamy: $k_i = k_{iax} = k_{ibx} = k_{iay} = k_{iby}$, $k_s = k_{sax} = k_{sbx} = k_{say} = k_{sby}$.
Aby uprościć obliczenia na początek założono, że płaszczyzny czujników oraz łożysk pokrywają się. Transformata Laplace'a została zastosowana dla równań ruchu (1) i sił (3). Równania w postaci operatorowej umieszczono poniżej:

$$\begin{bmatrix} B(s) & A(s) & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & -\Omega G(s) & \Omega G(s) \\ 0 & 0 & B(s) & A(s) \\ \Omega G(s) & -\Omega G(s) & -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(s) \\ x_b(s) \\ y_a(s) \\ y_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i & k_i & 0 & 0 \\ -ak_i & bk_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_i & k_i \\ 0 & 0 & -ak_i & bk_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{xa}(s) \\ i_{xb}(s) \\ i_{ya}(s) \\ i_{yb}(s) \end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie:

$$A(s) = \frac{ma}{l} s^2 - k_s, \quad B(s) = \frac{mb}{l} s^2 - k_s,$$
$$C(s) = \frac{I_x}{l} s^2 - ak_s, \quad D(s) = \frac{I_x}{l} s^2 - bk_s, \quad G(s) = \frac{I_z}{l} s. \tag{5}$$

Na podstawie zależności (2) możemy obliczyć: $\mathbf{p}_m = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{p}_b$, co w płaszczyźnie xz prowadzi do transformacji:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d+a}{d+c} & \dfrac{c-a}{d+c} \\ \dfrac{d-b}{d+c} & \dfrac{c+b}{d+c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_d \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Identyczną transformację współrzędnych mamy w płaszczyźnie yz. Obiekt (4) posiada cztery wejścia oraz cztery wyjścia i jest obiektem 8-rzędu zmiennej zespolonej s. Biorąc pod uwagę dwa pierwsze równania układu (4) oraz współrzędne mierzone w płaszczyznach czujników mamy dla płaszczyzny xz:

$$\Delta \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_d \end{bmatrix} = \Omega G \begin{bmatrix} -A & A \\ B & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ y_d \end{bmatrix} + k_i \begin{bmatrix} D+aA & D-bA \\ C-aB & C+bB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{xa} \\ i_{xb} \end{bmatrix}, \tag{7a}$$

A na podstawie dwóch ostatnich równań w (4), dla płaszczyzny yz, mamy:

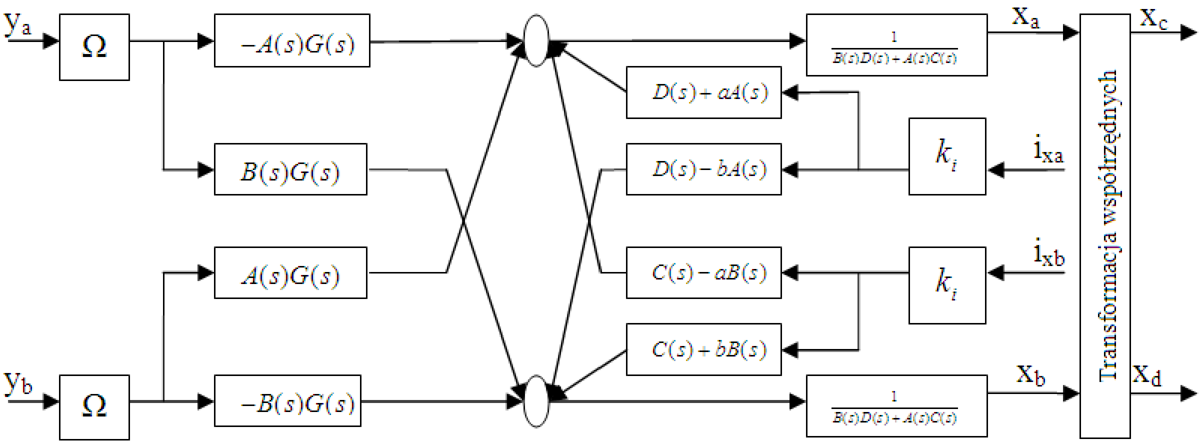
$$\Delta \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ y_d \end{bmatrix} = \Omega G \begin{bmatrix} A & -A \\ -B & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_d \end{bmatrix} + k_i \begin{bmatrix} D+aA & D-bA \\ C-aB & C+bB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ya} \\ i_{yb} \end{bmatrix}. \tag{7b}$$

gdzie: $\Delta = B(s)D(s) + C(s)A(s) = \frac{1}{l}\left\{ mI_x s^4 - [2I_x + m(a^2+b^2)]k_s s^2 + l^2 k_s^2 \right\}$,

jest wielomianem charakterystycznym każdego z podukładów. Zmienna s jest pominięta w powyższych równaniach.

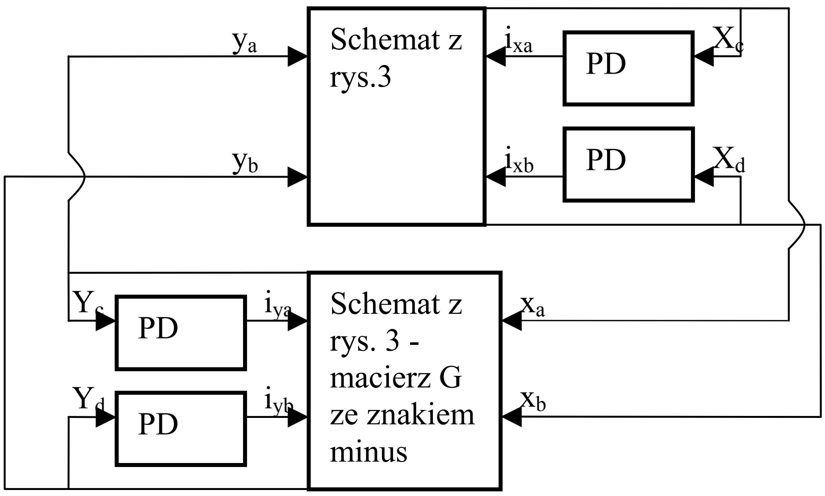
3. REGULATORY PD DLA PODUKŁADÓW

Dla celów sterowania użyjemy schemat z rys. 2, gdzie sumowane są siły działające na wirnik. Jest to rysunek podukładu sił w płaszczyźnie *xz*.



Rys. 2. Podukład ze sprzężeniami pomiędzy płaszczyznami *yz* do *xz*. Podobnie wygląda schemat dla sprzężenia między tymi płaszczyznami w przeciwnym kierunku – jedynie macierz *G*(*s*) zmienia znak.

Połączenie odpowiednich wej ść i wyj ść w obu poduk ładach prowadzi do pe łnego modelu układu zamkniętego (rys. 3). Lokalne sprz ężenia sterujące z regulatorami PD są pokazane na tym schemacie.



Rys 3. Schemat układu zamkniętego z lokalnymi regulatorami PD.

Prawo sterowania z lokalną regulacją PD opisane jest macierzą transmitancji:

$$\begin{bmatrix} i_{xa}(s) \\ i_{xb}(s) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_a(s) & 0 \\ 0 & R_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(s) \\ x_d(s) \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

gdzie: $R_a(s) = k_{da}s + k_{pa}$, $R_b(s) = k_{db}s + k_{pb}$. Sterowanie jest realizowane w p łaszczyznach łożyskowych, podczas gdy pom iar jest realizowany w p łaszczyznach czujników, które ni e pokrywają się z płaszczyznami łożysk (układ niekolokowany). Dla zapewnienia poprawne j pracy układu zamkniętego, jako parametry początkowe użyto: $k_p = k_{pa} = k_{pb} = 1.5k_s / k_i$, $k_d = k_{da} = k_{db} = 0.001k_p$. Są to parametry, które zapewniają poprawną pracę układu zamkniętego w przypadku kolokowanych czujników i łożysk [2].

Rozpatrzymy obiekt w jednej płaszczyźnie *xz*, z sprzężeniami pomiędzy dwoma wejściami i dwoma wyjściami (TITO). Zgodnie z modelu obiektu z równania (7a) mamy:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \frac{\Omega G}{\Delta_z} \begin{bmatrix} G_{aai} & -G_{abi} \\ -G_{bai} & G_{bbi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & A \\ B & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}, \tag{9}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} G_{aai} &= t_{22}\Delta + k_i(C + bB)R_b, \\ G_{abi} &= t_{12}\Delta + k_i(D - bA)R_b, \\ G_{bai} &= t_{21}\Delta + k_i(C - aB)R_a, \\ G_{bb} &= t_{11}\Delta + k_i(D + aA)R_a, \\ \Delta_z &= \left[t_{11}\Delta + k_i(D + aA)R_a\right]\left[t_{22}\Delta + k_i(C + bB)R_b\right] - \left[t_{21}\Delta + k_i(C - aB)R_a\right]\left[t_{12}\Delta + k_i(D + bA)R_b\right], \\ \Delta &= BD + CA. \end{aligned} \tag{10}$$

Wymnożenie macierzy we wzorze (9) prowadzi do pełnego modelu układu zamkniętego dla płaszczyzny *xz*:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \frac{\Omega G}{\Delta_z} \begin{bmatrix} -\left(G_{aai}A + G_{abi}B\right) & G_{aai}A + G_{abi}B \\ G_{bai}A + G_{bbi}B & -\left(G_{bai}A + G_{bbi}B\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}. \tag{11}$$

W podobny sposób znajdziemy zależności dla płaszczyzny *yz*:

$$\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix} = \frac{\Omega G}{\Delta_z} \begin{bmatrix} (G_{aai}A + G_{abi}B) & -(G_{aai}A + G_{abi}B) \\ -(G_{bai}A + G_{bbi}B) & (G_{bai}A + G_{bbi}B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Po przeliczeniu mianowników i liczników transmitancji w równaniach operatorowych (11) i (12) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} &= \frac{(d + c)\Omega G}{\Delta_z} \begin{bmatrix} -\Delta(t_{22}A + t_{12}B + k_iR_b) & \Delta(t_{22}A + t_{12}B + k_iR_b) \\ \Delta(t_{21}A + t_{11}B + k_iR_a) & -\Delta(t_{21}A + t_{11}B + k_iR_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix} &= \frac{(d + c)\Omega G}{\Delta_z} \begin{bmatrix} \Delta(t_{22}A + t_{12}B + k_iR_b) & -\Delta(t_{22}A + t_{12}B + k_iR_b) \\ -\Delta(t_{21}A + t_{11}B + k_iR_a) & \Delta(t_{21}A + t_{11}B + k_iR_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie:

$$\Delta_z = \Delta\Delta_{zm} = \Delta \left\{ \begin{aligned} &(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})\Delta + k_i\left[t_{11}(C + bB) - t_{21}(D - bA)\right]R_b + \\ &\qquad + k_i\left[t_{22}(D + aA) - t_{12}(C - aB)\right]R_a + k_i^2 lR_aR_b \end{aligned} \right\}.$$

Redukując z transmitancji wielomian charakterystyczny układu otwartego Δ otrzymamy minimalną realizację podukładów zamkniętych:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_a(s) \\ x_b(s) \end{bmatrix} &= \frac{\Omega G(s)}{\Delta_{zm}(s)} \begin{bmatrix} -D_1(s) & D_1(s) \\ D_2(s) & -D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a(s) \\ y_b(s) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_a(s) \\ y_b(s) \end{bmatrix} &= \frac{\Omega G(s)}{\Delta_{zm}(s)} \begin{bmatrix} D_1(s) & -D_1(s) \\ -D_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(s) \\ x_b(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

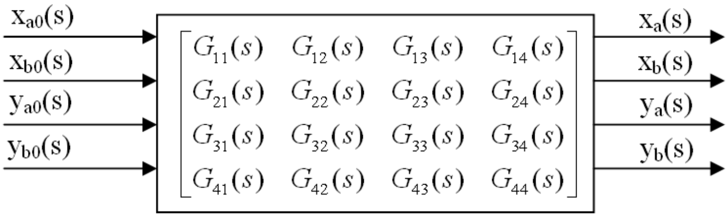
gdzie:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{zm}(s) &= (a+b)\Delta + k_i\left[(I_x + mac)s^2 - (c+b)lk_s\right]R_a + \\
&\quad + k_i\left[(I_x + mbd)s^2 - (a+d)lk_s\right]R_b + (d+c)k_i^2 R_a R_b l, \\
D_1(s) &= mcs^2 + (-2c + a - b)k_s + (d+c)k_i R_b, \\
D_2(s) &= mds^2 + (-2d - a + b)k_s + (d+c)k_i R_a.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Transmitancje układu zamkniętego w obu płaszczyznach *xz* i *yz* różnią się tylko znakiem. Wielomian Δ_{zm} porównywany do zera stanowi równanie charakterystyczne podukładu zamkniętego.

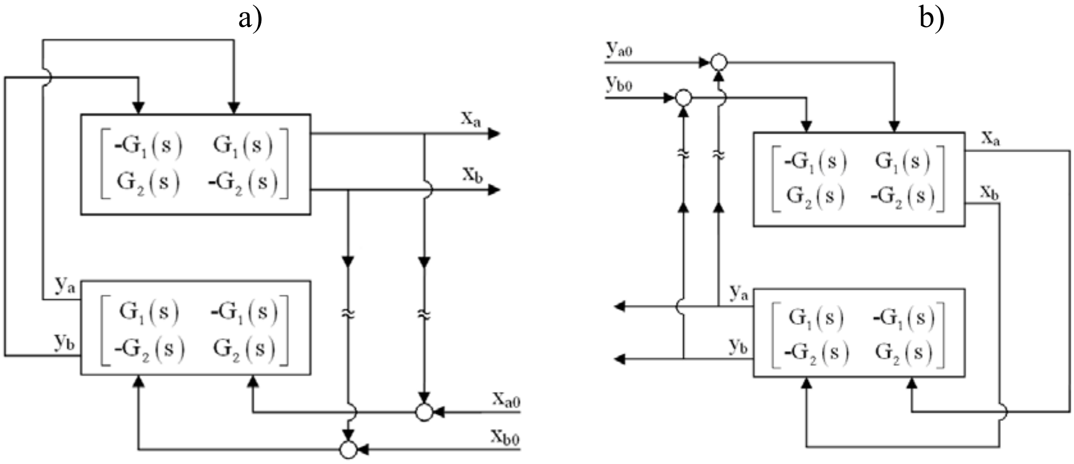
4. PEŁNY ZAMKNIĘTY UKŁAD

Pełny układ posiada cztery wejścia i cztery wyjścia, jak jest to ukazane na rys. 4.



Rys. 4. Pełny zamknięty układ.

Na podstawie powyższych rozważań pełny układ może zostać zastąpiony poprzez dwa układy o dwóch wejściach i dwóch wyjściach. Aby uzyskać pełny system modele (13) są łączone sprzężeniem zwrotnym w układ pokazany na rys. 5.



Rys. 5. Otwarty i zamknięty układ po rozprzężeniu dla: a) wejść i wyjść na płaszczyźnie *xz*, b) wejść i wyjść na płaszczyźnie *yz*.

Przerywano sprzężenie, w miejscach oznaczonych falkami, aby uzyskać układ otwarty. Transmitancja układu otwartego powstała w wyniku wymnożenia macierzy:

$$
\mathbf{H}_o = \begin{bmatrix} -H_1(s) & H_1(s) \\ H_2(s) & -H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1(D_1 + D_2) & D_1(D_1 + D_2) \\ D_2(D_2 + D_1) & -D_2(D_2 + D_1) \end{bmatrix},
\tag{16}
$$

gdzie:

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{\Omega G}{\Delta_z}\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)^2+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)\right],\\ H_2 &= \frac{\Omega G}{\Delta_z}\left[(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)^2\right],\end{aligned} \qquad (17)$$

Układ zamknięty, na podstawie rys. 5a, jest następujący:

$$\begin{bmatrix} x_a(s) \\ x_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_1(s) & H_1(s) \\ H_2(s) & -H_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(s)+x_{a0}(s) \\ x_b(s)+x_{b0}(s) \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

Po obliczeniach uzyskujemy:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{zc}} \begin{bmatrix} 1+H_2 & H_1 \\ H_2 & 1+H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H_1 & H_1 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a0} \\ x_{b0} \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta_{zc} &= (1+H_2)(1+H_1)-H_1H_2 = 1+H_1+H_2 = \\ &= \left\{\Delta^2{}_{zm}+\Omega^2G^2\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)\right]^2\right\}/\,\Delta^2{}_{zm},\end{aligned} \qquad (20$$

jest wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego. Ostatecznie, relacje wej ścia wyjścia zapisujemy:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\Omega^2G^2\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)^2+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)\right]}{\Delta^2{}_{zm}+\Omega^2G^2\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)\right]^2} & \dfrac{-\Omega^2G^2\left[(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)^2\right]}{\Delta^2{}_{zm}+\Omega^2G^2\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)\right]^2} \\ \dfrac{\Omega^2G^2\left[(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(B+k_iR_a)^2\right]}{\Delta^2{}_{zm}+\Omega^2G^2\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)\right]^2} & \dfrac{\Omega^2G^2\left[(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)^2+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)(t_{22}A+t_{12}B+k_iR_b)\right]}{\Delta^2{}_{zm}+\Omega^2G^2\left[(A+k_iR_b)+(t_{21}A+t_{11}B+k_iR_a)\right]^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a0} \\ x_{b0} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Z powyższych równań widocznym jest, że układ zamknięty jest 8-rzędu, a równanie (21) jest minimalną realizacją układu pełnego. W podobny sposób m ożemy uzyskać macierz transmitancji dla układu na rys. 5b:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix} &= \frac{1}{1+H_1+H_2} \begin{bmatrix} H_1 & -H_1 \\ -H_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{a0} \\ y_{b0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{G_1(G_1+G_2)}{1+(G_1+G_2)^2} & \dfrac{-G_1(G_1+G_2)}{1+(G_1+G_2)^2} \\ \dfrac{-G_2(G_2+G_1)}{1+(G_1+G_2)^2} & \dfrac{G_2(G_2+G_1)}{1+(G_1+G_2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{a0} \\ y_{b0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{a0} \\ y_{b0} \end{bmatrix},\end{aligned} \qquad (22)$$

Transmitancje drugiego poduk ładu (równania (22) i rys. 5b) s ą takie sam e jak pierwszego podukładu (równania (21) i rys. 5a), ale posiadają przeciwny znak.

5. STABILNOŚĆ

Pełny zamknięty podukład będzie stabilny, kiedy cz ęści rzeczywiste biegunów b ędą miały wartość ujemną. Zgodnie z równaniem (15) wielom ian charakterystyczny dla ka żdego z zamkniętych podukładów będzie miał postać:

$$\Delta_{zm} = (a+b)\frac{1}{l}\left\{mI_x s^4 - [2I_x + m(a^2+b^2)]k_s s^2 + l^2 k_s{}^2\right\} + k_i\left[(I_x + mac)s^2 - (c+b)lk_s\right](k_{da}s + k_{pa}) +$$
$$+ k_i\left[(I_x + mbd)s^2 - (d+a)lk_s\right](k_{db}s + k_{pb}) + (d+c)k_i^2(k_{da}s + k_{pa})(k_{db}s + k_{pb})l.$$

Tym samym równanie charakterystyczne można zapisać jako:

$$\Delta_{zm} = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0\,, \tag{23}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
a_4 &= mI_x,\\
a_3 &= k_i(I_x + mac)k_{da} + k_i(I_x + mbd)k_{db},\\
a_2 &= -[2I_x + m(a^2+b^2)]k_s + k_i(I_x + mac)k_{pa} + k_i(I_x + mbd)k_{pb} + (d+c)k_i^2 k_{da}k_{db}l,\\
a_1 &= -k_i(c+b)lk_s k_{da} - k_i(d+a)lk_s k_{db} + (d+c)k_i^2(k_{da}k_{pb} + k_{db}k_{pa})l,\\
a_0 &= l^2 k_s{}^2 - k_i(c+b)lk_s k_{pa} - k_i(d+a)lk_s k_{pb} + (d+c)k_i^2 k_{pa}k_{pb}l.
\end{aligned} \tag{24}$$

5.1. Układ kolokowany

W przypadku kolokowanego układu mamy: $c = a, \quad d = b$ i wówczas:

$$\begin{aligned}
a_4 &= mI_x,\\
a_3 &= k_i\left(I_x + ma^2\right)k_{da} + k_i\left(I_x + mb^2\right)k_{db},\\
a_2 &= -[2I_x + m(a^2+b^2)]k_s + k_i\left(I_x + ma^2\right)k_{pa} + k_i\left(I_x + mb^2\right)k_{pb} + k_i^2 k_{da}k_{db}l^2,\\
a_1 &= -k_i l^2 k_s(k_{db} + k_{da}) + k_i^2(k_{da}k_{pb} + k_{pa}k_{db})l^2,\\
a_0 &= l^2 k_s{}^2 - k_i l^2 k_s(k_{pb} + k_{pa}) + k_i^2 k_{pa}k_{pb}l^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Z koniecznych warunków kryterium Hurwitza wynika, iż dla identycznych praw sterowania $k_p = k_{pa} = k_{pb}$, $k_d = k_{da} = k_{db}$, układ jest stabilny dla nastaw regulatora: $k_p > \frac{k_s}{k_i}; \quad k_d > 0$. Dla zapewnienia odpowiedniej pracy układu zamkniętego, jako parametry początkowe regulatora PD przyjęto: $k_p = 1.5k_s / k_i$, $k_d = 0.001k_p$. Dostateczne warunki kryterium Hurwitza prowadzą do nierówności: $a_3a_2 - a_1a_4 > 0,\ a_3a_2a_1 - a_3^2a_0 - a_1^2a_4 > 0,$ które są spełnione dla układu kolokowanego.

Analiza stabilności pełnego modelu może zostać wykonana poprzez rozwiązanie równania charakterystycznego układu zamkniętego:

$$\Delta_{zc} = \left|\mathbf{I} + \mathbf{H_o}\right| = \Delta^2{}_{zm} + \Omega^2 G^2\left[(A + k_iR_b) + (B + k_iR_a)\right]^2 = 0 \tag{26}$$

Metoda Evansa (root locus) może zostać użyta do sprawdzenia stabilności układu. Z równania (26) widać, iż: $\mathrm{K} = \Omega^2$ może zostać użyte jako wzm ocnienie Evansa. Równanie charakterystyczne układu zamkniętego (26) może zostać zapisane w postaci:

$$1 + KG_o(s) = 0\,, \tag{27}$$

gdzie:

$$G_o(s) = \frac{G^2\left[(A+k_iR_b)+(B+k_iR_a)\right]^2}{\Delta^2_{zm}}, \tag{28}$$

jest modelem układu otwartego z pojedynczym wejściem i pojedynczym wyjściem. Stabilność takiego prostego system u może zostać w prosty sposób sprawdzona poprzez zastosowanie kryterium Nyquista bądź metody linii pierwiastkowych Evansa.

5.2. Układ niekolokowany

Zbadamy zmiany, jakie wprowadza niekolokacja p łaszczyzn pomiarowych i p łaszczyzn sterujących (łożyskowych). Niech jedna z p łaszczyzn pomiarowych (prawa) oddala si ę od prawej podpory łożyskowej. Tym samym zakładami, że: $c=a$, $d=b+\delta$, i wówczas współczynniki równania charakterystycznego przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
&a_4 = mI_x,\\
&a_3 = k_i(I_x+ma^2)k_{da} + k_i(I_x+mb(b+\delta)k_{db},\\
&a_2 = -[2I_x+m(a^2+b^2)]k_s + k_i(I_x+ma^2)k_{pa} + k_i(I_x+mb(b+\delta))k_{pb} + (b+a+\delta)k_i^2k_{da}k_{db}l,\\
&a_1 = -k_il^2k_sk_{da} - k_i(l+\delta)lk_sk_{db} + (l+\delta)k_i^2(k_{da}k_{pb}+k_{db}k_{pa})l,\\
&a_0 = l^2k_s{}^2 - k_il^2k_sk_{pa} - k_i(l+\delta)lk_sk_{pb} + (l+\delta)k_i^2k_{pa}k_{pb}l.
\end{aligned} \tag{29}$$

Gdy płaszczyzna ta oddala się, to równanie charakterystyczne można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{zm} = \Delta' + \delta\Delta'' = 0,\\
&\Delta' = a'_4s^4 + a'_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a'_0 = 0,\\
&\Delta'' = a''_3s^3 + a''_2s^2 + a''_1s + a''_0 = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Współczynniki wielomianu Δ' są identyczne z wspó łczynnikami wielomianu charakterystycznego układu kolokowanego (25), podczas gdy wielom ian Δ'' ma następujące współczynniki:

$$\begin{aligned}
&a''_3 = k_imbk_{db},\\
&a''_2 = k_imbk_{pb} + k_i^2k_{da}k_{db}l,\\
&a''_1 = -k_ilk_sk_{db} + k_i^2(k_{da}k_{pb}+k_{db}k_{pa})l,\\
&a''_0 = -k_ilk_sk_{pb} + k_i^2k_{pa}k_{pb}l.
\end{aligned} \tag{31}$$

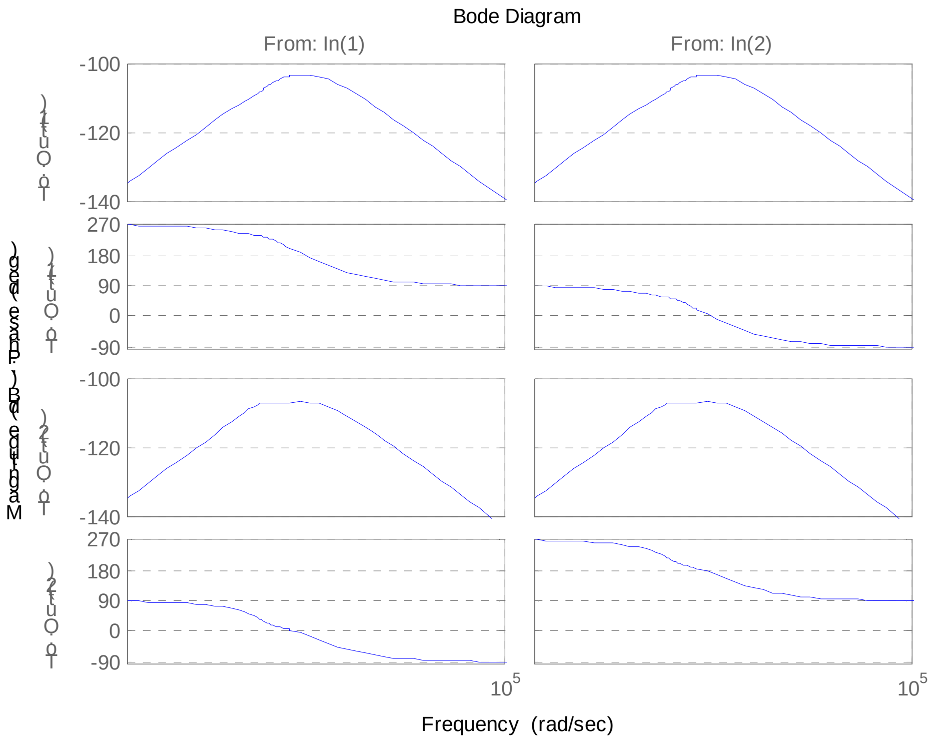
Równanie (30) dla rosnących δ (płaszczyzna pomiarowa przemieszcza się w prawo - dodatni kierunek osi z) może być przedstawione w postaci:

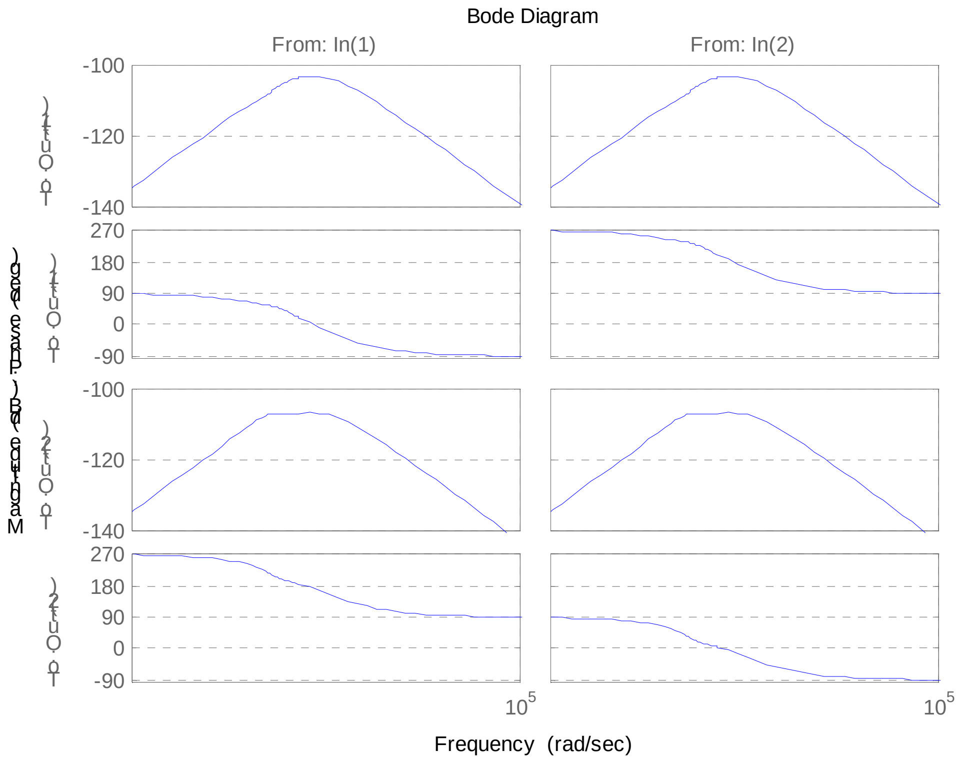
$$\Delta_{zm} = 1+\delta\frac{\Delta''}{\Delta'} = 0, \tag{32}$$

podczas gdy dla m alejących δ (płaszczyzna pomiarowa przemieszcza się w lewo – ujem ny kierunek osi z) w postaci:

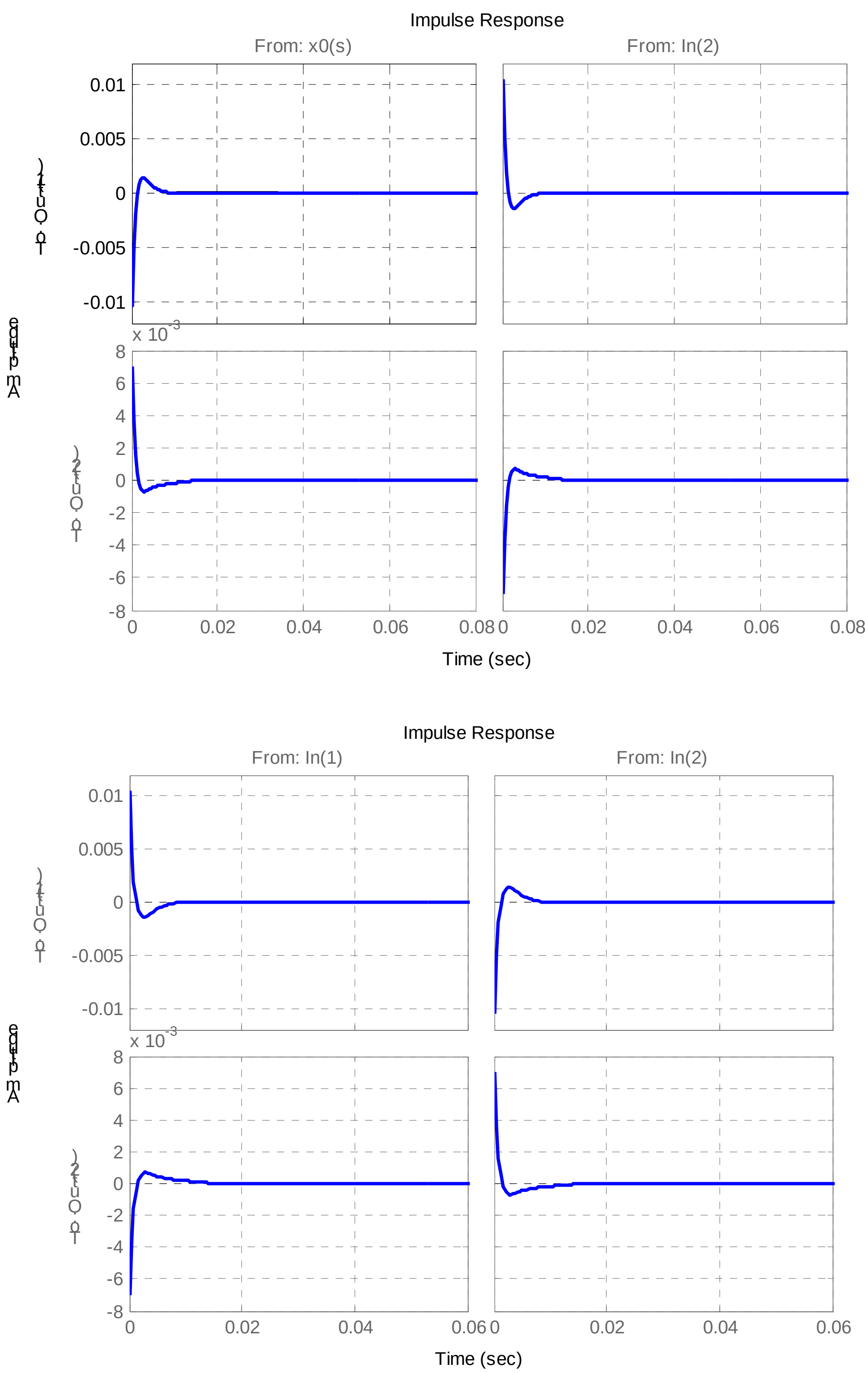
$$\Delta_{zm} = 1-\delta\frac{\Delta''}{\Delta'} = 0. \tag{33}$$

Taka prezentacja równania charakterystycznego u łatwi analizę wpływu położenia płaszczyzny pomiarowej na stabilność układu.





Rys. 6. Charakterystyki częstotliwościowe (amplituda i faza) dla a) podukładu zamkniętego na płaszczyźnie *xz*, b) podukładu zamkniętego na płaszczyźnie *yz*



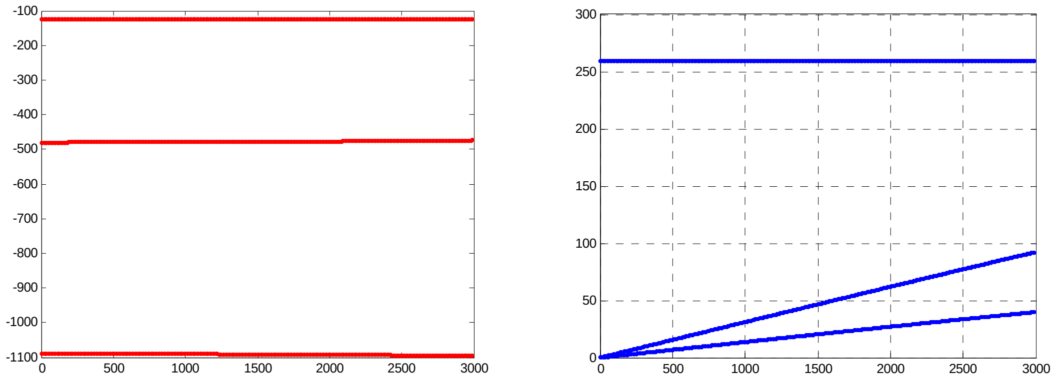
Rys. 7. Odpowiedzi impulsowe a) podukładu *xz*, b) podukładu *yz*.

6. SYMULACJE NUMERYCZNE

Symulacje komputerowe zostały przeprowadzone dla następujących parametrów wirnika oraz łożyska: m = 18,5 kg, J_z = 0,0115 kgm^2, J_x = 0,6525 kgm^2, k_s = 1,6024e + 06 N/m , k_i = 100,1483 A/m, l = 0,902 m, a = 0,6 l, b = -a. Takie parametry ma wirnik na stanowisku laboratoryjnym. Symulacje zostaną przeprowadzone dla zamkniętych układów kolokowanych i niekolokowanych z regulatorami PD.

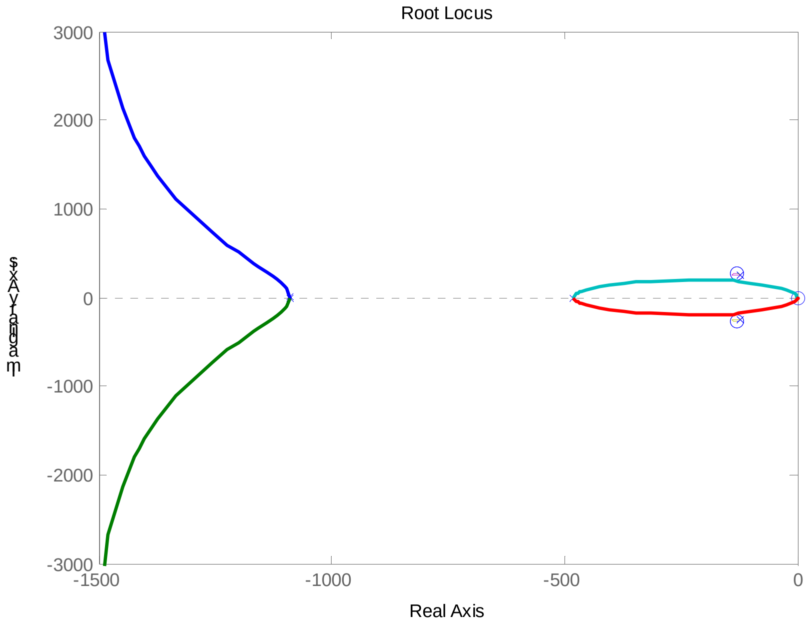
6.1. Układ kolokowany

Oba prawa sterowania mają te same nastawy: k_p=2,4e+04 N/A, k_D = 24 Ns/m. Charakterystyki Bodego zamkniętych podukładów opisanych równaniam i (14) pokazane s ą na rys. 6. Odpowiedzi impulsowe układu zamkniętego są stabilne, jak widzim y na rys. 7. W szystkie warunki kryterium Hurwitza zosta ły spełnione, co potwierdza stabilno ść podukładów. Aby sprawdzić stabilność pełnego systemu zamkniętego, części rzeczywiste i urojone zosta ły obliczone dla prędkości kątowej wirnika w zakresie od 0 do 3000 [rad/s] (0-31400[obr/m in]), a rezultaty zostały przedstawione na rys. 8.



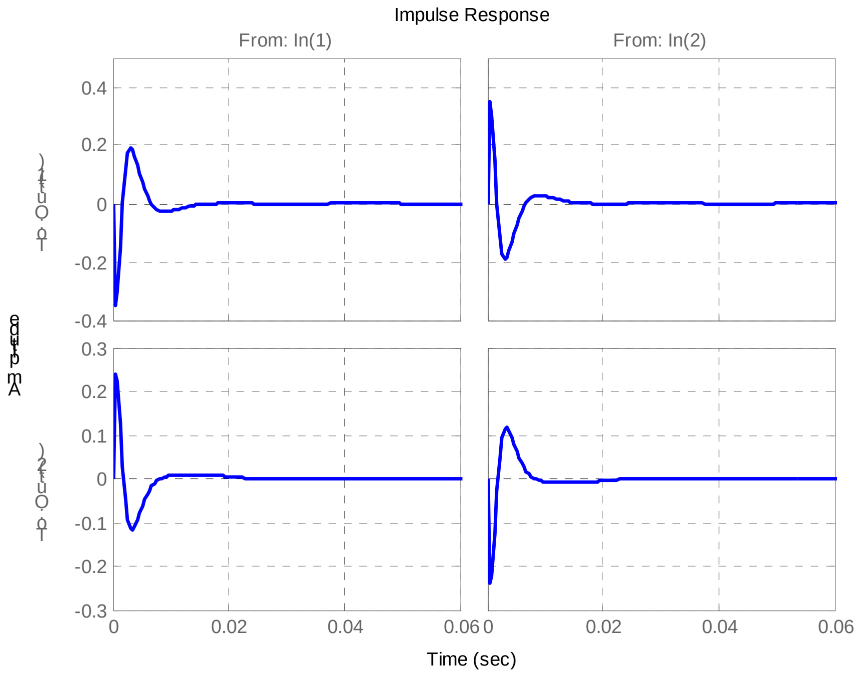
Rys. 8. Rzeczywiste i urojone cz ęści biegunów pe łnego układu zam kniętego w zakresie Ω = 0÷3000 rad/s.

Uzyskane rezultaty zostały potwierdzone metodą Evansa dla uk ładu (28) z wspó łczynnikiem wzmocnienia K = Ω^2 jak pokazano na rys. 9. Uk ład zamknięty jest stabilny dla wszystkich prędkości kątowych Ω.



Rys. 9. Linie pierwiastkowe pełnego układu zamkniętego - Ω^2 jako wzmocnienie Evansa.

Sprawdzono odpowiedź impulsową dla pełnego układu zamkniętego dla prędkości kątowej $\Omega = 3000$ rad/s. Ze względu na skrośną symetrię obu sterowanych płaszczyzn, obliczono tylko odpowiedzi impulsowe dla sygnałów wejścia/wyjścia w płaszczyźnie *xz*. Rezultaty ukazano na rys. 10.



Rys. 10. Odpowiedzi impulsowe układu zamkniętego w płaszczyźnie *xz* dla wirnika obracającego się z prędkością kątową Ω=3000[rad/s].

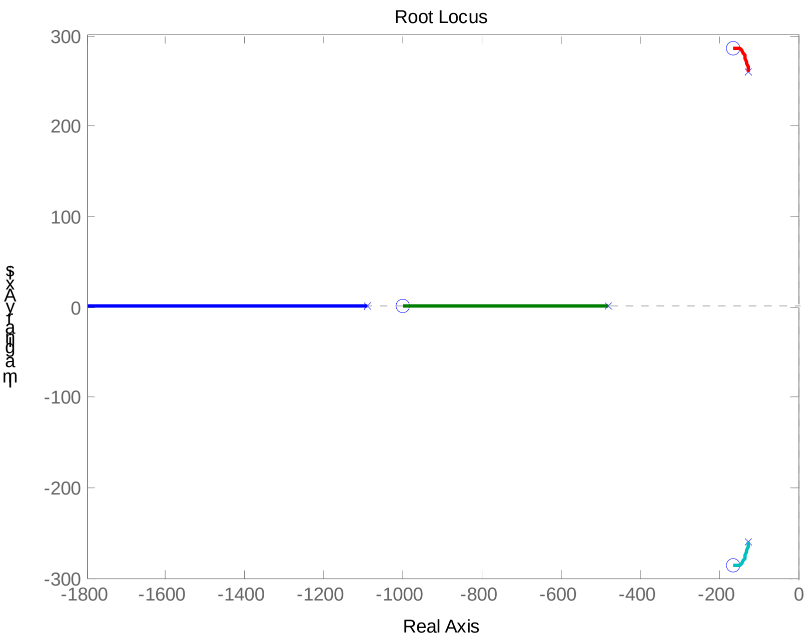
Odpowiedzi impulsowe wirnika wirującego z wysoką prędkością kątową (rys. 10) mają znacznie większe wartości niż odpowiedzi impulsowe wirnika w stanie spoczynku (rys. 9). Czas stabilizacji także się wydłużył. Jest to wynikiem oddziaływania efektu gyroskopowego. **WNIOSEK**. Lokalne regulatory PD w układzie kolokowanym nie destabilizują pełnego układu sterowania

6.2. Układ niekolokowany

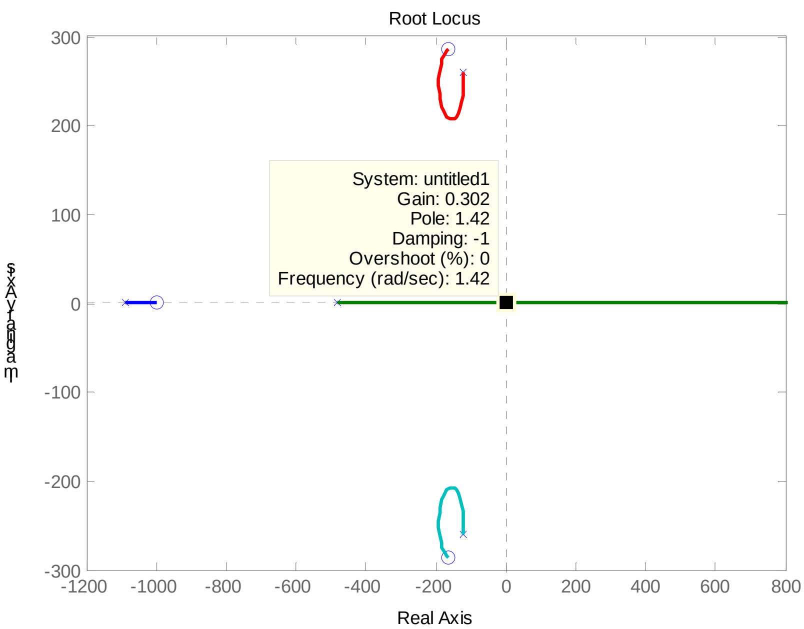
Zbadamy układ niekolokowany, gdy prawa płaszczyzna pomiarowa (odległość od środka masy wynosi $d = b + \delta$) oddala się od prawej płaszczyzny sterującej (łożyskowej). Przypomnijmy, że *b*=0.36[m]. W przypadku oddalania się w prawo korzystamy z zależności (32), aby wyznaczyć wartość parametru δ, dla której układ jest na granicy stabilności. Wykorzystamy do tego metodę linii pierwiastkowych. Wyniki dla nieobracającego się wirnika pokazane są na rys. 11. Jak wynika z rys. 11 układ nigdy nie utraci stabilności, więc możemy przesunąć tę płaszczyznę dowolnie daleko.

Korzystając z zależności (33) wyznaczymy obecnie granicę stabilności w przypadku przesuwania tej samej płaszczyzny pomiarowej na lewo od płaszczyzny sterowania (odległość od środka masy wynosi $d = b - \delta$). Wyniki dla nieobracającego się wirnika pokazane są na rys. 12. W ramce tekstowej podano wartość wzmocnienia Evansa na granicy stabilności, czyli $\delta = 0.302[m]$. Przyczyną utraty stabilności jest zbliżanie się elementu pomiarowego do węzła postaci rotacyjnej, który w przypadku wirnika sztywnego pokrywa się ze środkiem masy wirnika.

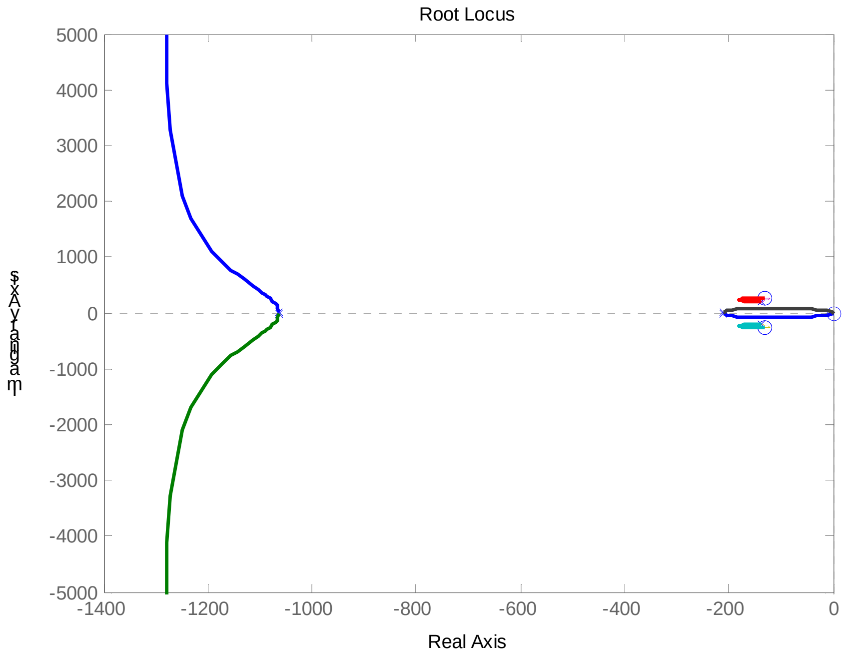
Następnie zbadano położenie biegunów układu zamkniętego dla obracającego się wirnika i przesuniętej płaszczyzny pomiarowej w lewo, odpowiednio o wartości: $\delta = 0.2[m]$ (rys. 13), $\delta = 0.4[m]$ (rys. 14). Wartość odległości płaszczyzny pomiarowej od środka masy wynosi odpowiednio $d = 0.16[m]$ i $d = -0.04[m]$. Znak minus oznacza, że płaszczyzna pomiarowa przeszła na drugą stronę względem płaszczyzny środka masy.



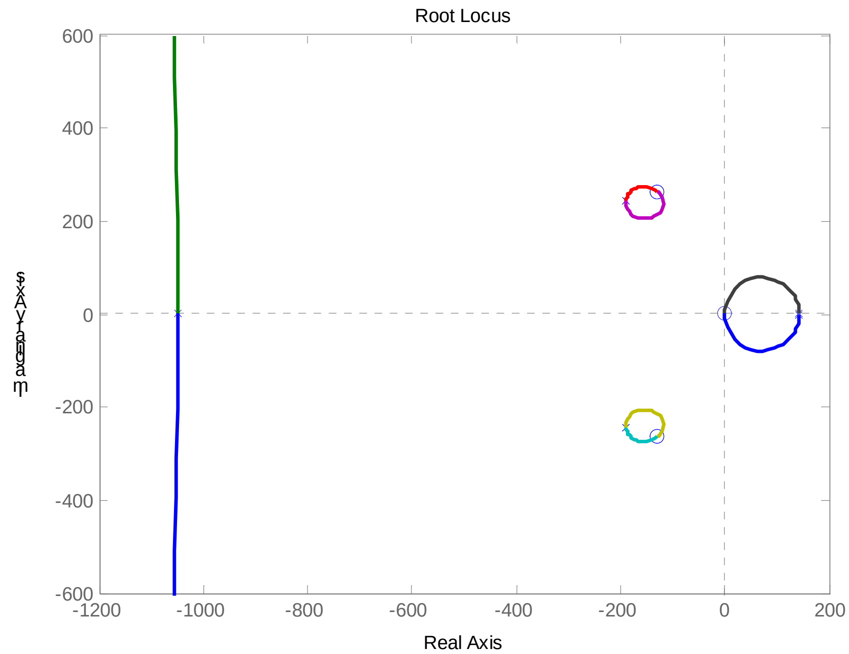
Rys.11. Linie pierwiastkowe układu zamkniętego (wirnik nie obraca się), gdy płaszczyznę pomiarową oddalamy w kierunku dodatnim osi z.



Rys.12. Linie pierwiastkowe układu zamkniętego (wirnik nie obraca się), gdy płaszczyznę pomiarową oddalamy w kierunku ujemnym osi z.



Rys. 13. Lokalizacja biegunów pełnego zamkniętego układu, gdy odległość pomiędzy płaszczyzną sterującą i pomiarową wynosi $\delta = 0.2[m]$ ($d = 0.16[m]$). Prędkość obrotowa Ω^2 jest wzmocnieniem Evansa.



Rys. 14. Lokalizacja biegunów pełnego zamkniętego układu, gdy odległość pomiędzy płaszczyzną sterującą i pomiarową wynosi $\delta = 0.4[m]$ ($d = -0.04[m]$). Prędkość obrotowa Ω^2 jest wzmocnieniem Evansa.

Okazuje się, że dla układów niekolokowanych o utracie stabilności decyduje wzajemne położenie płaszczyzn pomiarowych i sterujących. Zbliżanie się do węzła postaci prowadzi do pogorszenia jakości układu, a następnie do utraty stabilności. Prędkość obrotowa wpływa stabilizująco w przypadku zastosowania lokalnych regulatorów typu PD.

7. MODYFIKACJA SYGNA ŁÓW POMIAROWYCH NA POTRZ EBY STEROWANIA UKŁADAMI NIEKOLOKOWANYMI

Jak wiadomo [7], w przypadku konstrukcji mechanicznych nie pokrywanie się płaszczyzn pomiarowych i płaszczyzn sterujących prowadzi do sytuacji, że z punktu widzenia teorii sterowania taki obiekt jest układem nieminimalnofazowym. Jak wyżej wykazano, o stabilności układu decyduje położenie płaszczyzn. W płaszczyźnie łożyskowej przyłożone są siły sterujące – dlatego w tych płaszczyznach należy przyjąć współrzędne układu. Pozostaje więc oszacować przemieszczenia wirnika w tych płaszczyznach na podstawie pomiarów dokonanych w innych płaszczyznach, a więc dokonać transformacji przemieszczeń $x_c(s)$, $x_d(s)$ do przemieszczeń środka wału $x_a(s), x_b(s)$ w płaszczyznach łożyskowych. W tym celu na podstawie równań (2) znajdziemy:

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{p}_b = \mathbf{P}\mathbf{p}_b, \tag{34}$$

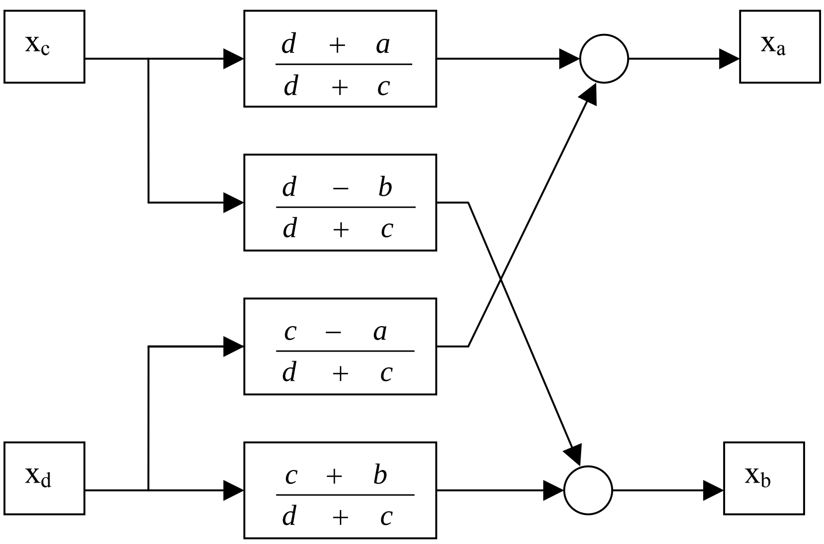
co w płaszczyźnie *yz* prowadzi do transformacji:

$$\begin{bmatrix} y_c \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b+c}{b+a} & \dfrac{a-c}{b+a} \\ \dfrac{b-d}{b+a} & \dfrac{a+d}{b+a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Można teraz przekształcić prawo sterowania do postaci:

$$\begin{bmatrix} i_{xa}(s) \\ i_{xb}(s) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_a(s) & 0 \\ 0 & R_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(s) \\ x_b(s) \end{bmatrix} \tag{36}$$

ale o wiele wygodniej jest zastosować bezpośrednio przekształcenie sygnałów pomiarowych według schematu pokazanego na rys. 15.



Rys. 15. Przekształcenie sygnałów pomiarowych w układzie niekolokowanym.

Taki układ (rys. 15) w przypadku wirników sztywnych jest wystarczający, aby układ niekolokowany przekształcić w układ kolokowany.

8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Jak wynika z powyższych rozważań, powinno dążyć się do minimalizacji prądu sterowania aby zredukować konsumpcję energii zużytej przez układ sterowania magnetycznym zawieszeniem wirnika. Zmniejszenie prądu sterowania pozwoli na redukcję prądu punktu pracy oraz wpłynie na redukcję strat sprzętowych powodowanych przez wzmacniacze prądowe, histerezy magnetyczne oraz prądy wirowe.

W celu zapewnienia właściwej pracy układu zamkniętego, jako parametry początkowe regulatorów typu PD powinny zostać uwzględnione następujące parametry: $k_P = 1.5 k_s / k_i$, $k_D = 0.001 k_P$. Taki układ sterowania jest stabilny i ma odpowiednią jakość, gdyż przeregulowanie nie przekracza 20%. Prąd sterowania zależy również od zewnętrznych obciążeń.

W artykule potwierdzono fakt, że kolokacja płaszczyzn pomiarowych i łożyskowych (wykonawczych) ułatwia zapewnienie minimalnofazowości układu, co z kolei ułatwia projektowanie prawa sterowania. Co więcej, lokalne dobrze dobrane regulatory typu PD nie destabilizują pełnego układu zamkniętego dla wszystkich prędkości obrotowych wirnika.

Gdy bada się stabilność układu i jego wrażliwość na zmianę dowolnego parametru, to wygodnie jest sprowadzić równanie charakterystyczne do postaci typowej dla metody linii pierwiastkowych. W ten sposób wykazano, wykorzystując metodę Evansa, że wzrost prędkości obrotowej stabilizuje ruch wirnika, natomiast przesuwanie płaszczyzny pomiarowej w kierunku węzła postaci destabilizuje ruch.

BIBLIOGRAFIA

[1] GOSIEWSKI Z., FALKOWSKI K.: Wielofunkcyjne łożyska magnetyczne (Multifunction magnetic bearings), Monografia nr 19, Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, 2003.

[2] GOSIEWSKI Z.: Analytical Approach to Rotor Vibration Control, Chapter in Monography "Dynamics of Steam and Gas Turbines", Editor R. Rzadkowski. IFFM Publishers, Gdańsk 2009. ANTILA M.: Electromagnetic Properties of Radial Active Magnetic Bearings, PhD Dis. Helsinki University of Technology, Helsinki, Finland, 1998.

[3] LANTTO E.: Robust Control of Magnetic Bearings in Subcritical Machines, PhD Dis. Helsinki University of Technology, Helsinki, Finland, 1999.

[4] SCHWEITZER G.: Active magnetic bearings – chances and limitations, 8^{th} Int. Symp. Magnetic Bearings, Mito, Japan, 2002.

[5] GOSIEWSKI Z.: Control-oriented modelling and control of rotor vibration, Acta Mechanica & Automatica, Vol. 2, No. 2, Białystok, 2008.

[6] PREUMONT A.: Vibration Control of Active Structures: An Introduction, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.