

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
mgr inż. Michał Sokółski
Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

ODPORNA STABILNOŚĆ UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH O FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ ZALEŻNEJ LINIOWO OD NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

Rozpatrzono problem badania odpornej stabilności liniowego układu hybrydowego ciągło-dyskretnego, którego wielomian charakterystyczny dwóch zmiennych zależy liniowo od niepewnych parametrów. Pokazano, że do badania odpornej stabilności takich układów można stosować twierdzenie krawędziowe, znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych jednej zmiennej. Podano komputerową metodę służącą do sprawdzania warunków tego twierdzenia. Rozważania zilustrowano przykładem.

ROBUST STABILITY OF CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS WITH CHARACTERISTIC FUNCTION LINEARLY DEPENDENT ON UNCERTAIN PARAMETERS

The problem of robust stability of linear continuous-discrete systems with characteristic polynomial (in two independent variables) linearly dependent on uncertain parameters is considered. It is shown that the Edge Theorem known from the theory of robust stability of families of polynomials in one variable can be applied to robust stability checking of the systems. Computer methods for checking of the conditions of this theorem are given. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

Układami hybrydowymi ciągło-dyskretnymi nazywamy takie układy dynamiczne, w których modelu matematycznym jedna część zmiennych stanu jest z czasem ciągłym zaś druga część jest z czasem dyskretnym, przy czym nie da się rozdzielić równań dynamiki opisujących część ciągłą oraz część dyskretną.

Zagadnienia stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów hybrydowych ciągło-dyskretnych były rozpatrywane np. w pracach [5, 8 - 12]. W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem badania odpornej stabilności liniowego układu ciągło-dyskretnego, którego funkcja charakterystyczna (wielomian dwóch niezależnych zmiennych s i z) zależy liniowo od niepewnych parametrów.

W pracy zostanie pokazane, że do badania odpornej stabilności rozpatrywanych układów ciągło-dyskretnych o niepewnych parametrach można stosować tzw. twierdzenie krawędziowe. Problem analizy odpornej stabilności rodzin wielomianów jednej zmiennej był tematem wielu publikacji, patrz np. monografie [1- 4, 6] w przypadku wielomianów naturalnego stopnia oraz pracę [7] w przypadku wielomianów stopnia ułamkowego. W pracy [11] sformułowano ogólne warunki odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów dwóch zmiennych niezależnych. Nie podano jednak metod ich sprawdzania. Takie metody, dogodne do obliczeń komputerowych, będące rozszerzeniem pracy [9] zostaną podane w niniejszej pracy.

2. WPROWADZENIE

Funkcja charakterystyczna liniowych układów ciągle-dyskretnych jest wielomianem dwóch zmiennych niezależnych o rzeczywistych współczynnikach o ogólnej postaci

$$w(s, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} s^i z^k, \quad a_{nm} \neq 0. \quad (1)$$

Z pracy [8] wynikają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 1. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (2)$$

Wielomian (1) dwóch zmiennych niezależnych spełniający warunek (2) będziemy nazywać wielomianem stabilnym w sensie Hurwitza-Schura.

Twierdzenie 2. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym $w(s, z)$ jest asymptotycznie stabilny (zachodzi (2)) wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) $w(s, 1) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$
- 2) $w(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad |z| \geq 1.$

Warunek 2) twierdzenia 2 można napisać w postaci

$$w(jy, z) \neq 0, \quad y \in Y = (-\infty, \infty), \quad |z| \geq 1, \quad (3)$$

przy czym możemy ograniczyć się do przedziału $Y = [0, \infty)$.

Z twierdzenia 2 wynika, że układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- rzeczywisty wielomian $w(s, 1)$ jest stabilny w sensie Hurwitza (wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste),
- wielomian zespolony $w(jy, z)$ dla każdego $y \in Y$ jest stabilny w sensie Schura (wszystkie jego zera mają wartości bezwzględne mniejsze od 1).

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Wartości współczynników wielomianu charakterystycznego (1) zależą od wartości parametrów układu ciągle-dyskretnego. Jeżeli te wartości nie są dokładnie znane, to również nie są dokładnie znane wartości współczynników wielomianu (1).

W pracy rozpatrzmy przypadek, w którym wielomian charakterystyczny o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów ma postać

$$w(s, z, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik}(\mathbf{q}) s^i z^k, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (4)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_p]^T$ jest wektorem odchyłek q_l ($l = 1, 2, \dots, p$) niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, p jest liczbą niepewnych parametrów,

$$a_{ik}(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^p q_l a_{ikl} + a_{ik0} \quad (5)$$

są to liniowe ciągle funkcje swoich argumentów (a_{ikl} są to znane współczynniki), zaś

$$Q = \{\mathbf{q} : q_l \in [b_l, c_l], \quad b_l \leq 0, \quad c_l \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, p\} \quad (6)$$

jest zbiorem wartości niepewnych parametrów.

Będziemy zakładać, że wielomian (4) jest stałego stopnia (tj. $\forall \mathbf{q} \in Q$ ma on stopień n ze względu na zmienną s i stopień m ze względu na zmienną z).

Wielomian (4) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można napisać w postaci

$$w(s, z, \mathbf{q}) = w_0(s, z) + q_1 w_1(s, z) + \dots + q_p w_p(s, z), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (7)$$

gdzie

$$w_l(s, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ikl} s^i z^k, \quad l = 0, 1, \dots, p, \quad (8)$$

są to znane wielomiany, przy czym $w_0(s, z) = w(s, z, 0)$ jest stabilnym wielomianem nominalnym stopnia n ze względu na zmienną s i stopnia m ze względu na zmienną z .

Na podstawie teorii odpornej stabilności układów dynamicznych o niepewnych parametrach (np. [6]) możemy sformułować poniższą definicję.

Definicja 1. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (4) nazywamy odpornie stabilnym, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdej ustalonej wartości niepewnego parametru z zadanego zbioru, tj. dla każdego $\mathbf{q} \in Q$.

Z powyższej definicji i twierdzeń 1, 2 wynikają bezpośrednio następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. Układ ciągle-dyskretny, którego wielomian charakterystyczny ma postać (4) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, z, \mathbf{q}) \neq 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0, |z| \geq 1, \mathbf{q} \in Q. \quad (9)$$

Twierdzenie 4. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (4) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) $w(s, 1, \mathbf{q}) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, \mathbf{q} \in Q,$
- 2) jest spełniony warunek

$$w(jy, z, \mathbf{q}) \neq 0, \quad y \in Y, |z| \geq 1, \mathbf{q} \in Q. \quad (10)$$

Wielomian (4) spełniający warunek (9) (równoważnie, warunki 1) i 2) twierdzenia 4) będziemy nazywać wielomianem odpornie stabilnym w sensie Hurwitza-Schura.

Zadanie badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (4) dla każdego $\mathbf{q} \in Q$ jest równoważne z badaniem odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów

$$W(s, z, Q) = \{w(s, z, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (11)$$

gdzie wielomian $w(s, z, \mathbf{q})$ ma postać (4) lub równoważnie (7).

Celem pracy jest podanie komputerowych metod badania odpornej stabilności układu ciągle-dyskretnego o wielomianie charakterystycznym (4). Ponieważ odporna stabilność tego układu jest równoważna z odporną stabilnością w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (11), podane metody będą bezpośrednio dotyczyły rodziny wielomianów (11).

Przy formułowaniu metod badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (11) wykorzystamy teorię dotyczącą odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych jednej zmiennej, podaną w monografii [6].

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Metody badania odpornej stabilności rodziny wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów są podane w pracy [6].

Są to metody częstotliwościowe bazujące na tzw. warunku wykluczenia zera. Możliwości ich uogólnienia na rodziny wielomianów dwóch zmiennych niezależnych o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów są podane w pracy [11]. Jedną z nich, bazującą na twierdzeniu krawędziowym, podamy poniżej po krótkim wprowadzeniu.

Zbiór Q zdefiniowany wzorem (6) jest p -wymiarowym prostopadłością. Ma on $K = 2^p$ wierzchołków i $L = p2^{p-1}$ krawędzi. Oznaczmy przez $\mathbf{q}_k = [q_1^k, q_2^k, \dots, q_p^k]^T$, gdzie $q_i^k = b_i$ lub $q_i^k = c_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, k -ty wierzchołek zbioru Q . Każdemu wierzchołkowi \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, K$, zbioru Q odpowiada w zbiorze wielomianów (4) wielomian wierzchołkowy

$$p_k(s, z) = w(s, z, \mathbf{q}_k) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik}(\mathbf{q}_k) s^i z^k. \quad (12)$$

Każdej krawędzi

$$\mathbf{q}_{rk}(\lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{q}_r + \lambda\mathbf{q}_k, \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (13)$$

zbioru Q , będącej odcinkiem linii prostej łączącym wierzchołki \mathbf{q}_r i \mathbf{q}_k , w zbiorze wielomianów (4) odpowiada tzw. wielomian krawędziowy o postaci

$$p_{rk}(s, z, \lambda) = (1 - \lambda)p_r(s, z) + \lambda p_k(s, z), \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (14)$$

gdzie $p_r(s, z)$ i $p_k(s, z)$ są to wielomiany wierzchołkowe (12), odpowiadające wierzchołkom \mathbf{q}_r i \mathbf{q}_k zbioru Q odpowiednio.

Uwzględniając teorię odpornej stabilności rodziny wielomianów naturalnego stopnia o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów oraz pracę [11] możemy sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5 (twierdzenie krawędziowe). Rodzina (11) wielomianów stałego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odporne stabilna w sensie Hurwitza-Schura wtedy i tylko wtedy, gdy są odporne stabilne w sensie Hurwitza-Schura wszystkie wielomiany krawędziowe $p_{rk}(s, z, \lambda)$, odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q .

Zauważmy, iż sprawdzenie warunków twierdzenia 5 sprowadza się do zbadania stabilności skończonej liczby wielomianów krawędziowych (14), które są wypukłymi kombinacjami dwóch wielomianów wierzchołkowych $p_r(s, z)$ i $p_k(s, z)$.

Metody badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura wypukłej kombinacji dwóch wielomianów dwóch zmiennych niezależnych zostały podane w pracy [9]. Wynika z niej następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. Wielomian krawędziowy (14) jest odporne stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $p_{rk}(s, 1, \lambda) \neq 0$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$,

2) jest spełniony warunek

$$p_{rk}(jy, z, \lambda) \neq 0, y \in Y, |z| \geq 1, \lambda \in \Lambda.$$

Warunek 1) twierdzenia 6 jest warunkiem odpornej stabilności w sensie Hurwitza wielomianu krawędziowego (14) przy $z = 1$. Natomiast warunek 2) tego twierdzenia jest warunkiem odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu krawędziowego (14) przy $s = jy$.

Metody sprawdzania warunków 1) i 2) twierdzenia 6 rozpatrzemy oddzielnie, uwzględniając rezultaty pracy [9].

4.1. Sprawdzanie warunku 1) twierdzenia 6

Warunek 1) twierdzenia 6 można napisać postaci

$$p_{rk}(s,1,\lambda) = (1-\lambda)p_r(s,1) + \lambda p_k(s,1) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1]. \quad (15)$$

Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmiemy, że wielomian $p_r(s,1)$ jest wielomianem nominalnym (odniesienia) wielomianu $p_{rk}(s,1,\lambda)$. Musi on być wielomianem stabilnym w sensie Hurwitza, aby wypukła kombinacji dwóch wielomianów $p_r(s,1)$ i $p_k(s,1)$ była stabilna w sensie Hurwitza. Stabilność w sensie Hurwitza wielomianu $p_r(s,1)$ można łatwo sprawdzić stosując np. kryterium stabilności Hurwitza.

Twierdzenie 7. Niech wielomian nominalny $p_r(s,1)$ będzie stabilny w sensie Hurwitza. Warunek 1) twierdzenia 6 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\phi_{rk}(jy) = p_k(jy,1) / p_r(jy,1), \quad y \in Y = [0, \infty), \quad (16)$$

nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

4.2. Sprawdzanie warunku 2) twierdzenia 6

Warunek 2) twierdzenia 6 można napisać w postaci

$$p_{rk}(jy, z, \lambda) = (1-\lambda)p_r(jy, z) + \lambda p_k(jy, z) \neq 0, \quad y \geq 0, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1]. \quad (17)$$

Za wielomian nominalny wielomianu $p_{rk}(jy, z, \lambda)$ możemy przyjąć np. wielomian $p_r(jy, z)$. Musi on być wielomianem stabilnym w sensie Schura dla każdego $y \in Y = [0, \infty)$, aby był spełniony warunek (17).

Wielomian zespolony $p_r(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$ jest stabilny w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p_r(jy, z) \neq 0, \quad y \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (18)$$

Twierdzenie 8. Wielomian zespolony $p_r(jy, z)$ jest stabilny w sensie Schura dla każdego $y \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji

$$\tilde{w}_r(jy, \exp(j\omega)) = \frac{p_r(jy, \exp(j\omega))}{w_{od}(y, \exp(j\omega))}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (19)$$

nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego.

Wielomian odniesienia $w_{od}(y, z)$ można przyjąć w postaci

$$w_{od}(y, z) = w_0(z), \quad (20)$$

gdzie $w_0(z)$ jest stabilnym w sensie Schura rzeczywistym wielomianem tego samego stopnia co wielomian $p_r(s, z)$ ze względu na zmienną z .

Przy sprawdzaniu warunku twierdzenia 8 należy dla każdego ustalonego $y \in Y = [0, y_{kon}]$, wyznaczonego z odpowiednio małym krokiem Δy , wyznaczyć wykres funkcji (19) i sprawdzić, czy nie obejmuje on początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Wartość y_{kon} należy przyjąć odpowiednią dużą, taką aby na podstawie wyznaczonych wykresów stwierdzić spełnienie (lub niespełnienie) powyższego warunku dla wszystkich $y \geq 0$.

Twierdzenie 9. Niech wielomian nominalny $p_r(jy, z)$ będzie stabilny w sensie Schura dla każdego ustalonego $y \in Y$. Warunek (17) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej ustalonej wartości $y \in Y$ wykres funkcji

$$\psi(jy, \omega) = p_k(jy, \exp(j\omega)) / p_r(jy, \exp(j\omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad (21)$$

nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Przy sprawdzaniu warunku twierdzenia 9 (podobnie jak przy sprawdzaniu twierdzenia 8) należy dla każdego ustalonego $y \in Y = [0, y_{kon}]$, wyznaczonego z odpowiednio małym krokiem Δy , wyznaczyć wykres funkcji (21) i sprawdzić, czy nie przecina on niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. Wartość y_{kon} należy przyjąć odpowiednią dużą, taką aby na podstawie wyznaczonych wykresów można było stwierdzić spełnienie (lub niespełnienie) powyższego warunku dla wszystkich $y \geq 0$.

Z powyższych rozważań wynika następujący sposób postępowania przy badaniu odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (11).

Sposób postępowania:

Krok 1. Wyznaczamy wszystkie wierzchołki \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, K = 2^p$, zbioru Q i pary tych wierzchołków $(\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_k)$, $r, k = 1, 2, \dots, K$ ($r \neq k$), tworzących krawędzie zbioru Q .

Krok 2. Wyznaczamy wielomiany wierzchołkowe $p_k(s, z) = w(s, z, \mathbf{q}_k)$ (12) odpowiadające poszczególnym wierzchołkom \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, K = 2^p$, zbioru Q oraz pary tych wielomianów tworzące wielomiany krawędziowe $p_{rk}(s, z, \lambda)$ (14).

Krok 3. Sprawdzamy stabilność w sensie Hurwitza wielomianów wierzchołkowych $p_k(s, 1)$, $k = 1, 2, \dots, K = 2^p$, stosując np. kryterium stabilności Hurwitza.

Krok 4. Stosując twierdzenie 7 badamy odporną stabilność w sensie Hurwitza wypukłych kombinacji wielomianów $p_r(s, 1)$ i $p_k(s, 1)$. Jeżeli są one odpornie stabilne w sensie Hurwitza, to przechodzimy do kroku 5.

Krok 5. Stosując twierdzenie 8 badamy stabilność w sensie Schura wielomianów zespolonych $p_r(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$. Jeżeli są one stabilne w sensie Schura, to przechodzimy do kroku 6.

Krok 6. Stosując twierdzenie 9 badamy odporną stabilność w sensie Schura wypukłych kombinacji wielomianów $p_r(jy, z)$ i $p_k(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$. Jeżeli są one odpornie stabilne, to jest spełniony warunek 2) twierdzenia 6 dla każdego wielomianu krawędziowego i rodzina wielomianów (11) jest odpornie stabilna w sensie Hurwitza-Schura, zgodnie z twierdzeniem krawędziowym 5.

5. PRZYKŁAD

Należy zbadać odporną stabilność układu ciągle-dyskretnego, którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$w(s, z, \mathbf{q}) = w_0(s, z) + q_1 w_1(s, z) + q_2 w_2(s, z), \quad (22)$$

gdzie $w_0(s, z) = 0.5sz + 0.3s + 1.5z + 0.1$, $w_1(s, z) = 0.24sz + 0.21s - 0.32z + 0.21$,

$w_2(s, z) = 0.72sz + 0.63s - 0.66z + 0.63$,

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [-0.3, 0.4], q_2 \in [0.1, 0.5]\}.$$

Badanie odpornej stabilności przeprowadzimy zgodnie z opisanym powyżej sposobem postępowania.

Krok 1. Zbiór Q jest prostokątem na płaszczyźnie (q_1, q_2) o wierzchołkach

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Krawędzie zbioru Q tworzą pary wierzchołków o indeksach (1,3), (3,2), (2,4) i (1,4).

Krok 2. Wielomiany wierzchołkowe odpowiadające poszczególnym wierzchołkom (23) zbioru Q wyznacza się ze wzorów

$$p_1(s, z) = w_0(s, z) - 0.3w_1(s, z) + 0.5w_2(s, z), \quad p_2(s, z) = w_0(s, z) + 0.4w_1(s, z) + 0.5w_2(s, z), \\ p_3(s, z) = w_0(s, z) + 0.4w_1(s, z) + 0.1w_2(s, z), \quad p_4(s, z) = w_0(s, z) - 0.3w_1(s, z) + 0.1w_2(s, z).$$

Wielomiany krawędziowe są wielomianami $p_{rk}(s, z, \lambda)$ o postaci (14), przy czym $(r, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4)$ i $(1, 4)$.

Krok 3. Podstawiając $z = 1$ w wielomianach wierzchołkowych otrzymamy

$$p_1(s, 1) = 1.34s + 1.618, \quad p_2(s, 1) = 1.655s + 1.541, \\ p_3(s, 1) = 1.115s + 1.553, \quad p_4(s, 1) = 0.8s + 1.63.$$

Wszystkie współczynniki powyższych wielomianów są dodatnie, co oznacza, że są one stabilne w sensie Hurwitza.

Krok 4. Sporządzamy wykresy funkcji

$$\phi_{12}(jy) = \frac{p_2(jy, 1)}{p_1(jy, 1)} = \frac{1.655jy + 1.541}{1.34jy + 1.618}, \quad \phi_{23}(jy) = \frac{p_3(jy, 1)}{p_2(jy, 1)} = \frac{1.115jy + 1.553}{1.655jy + 1.541}, \quad (24a)$$

$$\phi_{34}(jy) = \frac{p_4(jy, 1)}{p_3(jy, 1)} = \frac{0.8jy + 1.63}{1.115jy + 1.553}, \quad \phi_{41}(jy) = \frac{p_1(jy, 1)}{p_4(jy, 1)} = \frac{1.34jy + 1.618}{0.8jy + 1.63}. \quad (24b)$$

Wykresy funkcji $\phi_{rk}(jy)$, $y \in [0, 100]$ są pokazane na rysunku 1. Nie przecinają one niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$, co oznacza, że warunek 1) twierdzenia 6 jest spełniony dla wszystkich wielomianów krawędziowych.

Krok 5. Badamy stabilność sensie Schura wielomianów zespolonych $p_r(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$. Sporządzamy w tym celu wykresy funkcji (19) dla każdego wielomianu wierzchołkowego przy wielomianie odniesienia $w_{od}(z) = z + 0.1$. Funkcje (19) mają zatem postaci

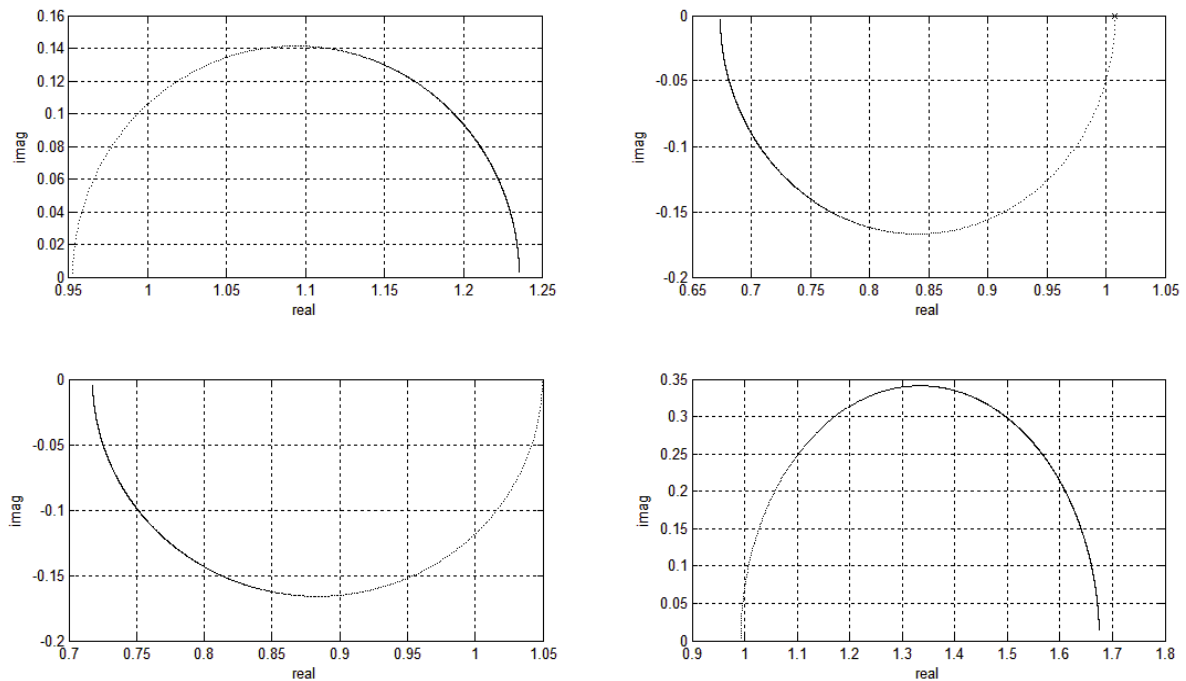
$$\tilde{w}_1(jy, \exp(j\omega)) = \frac{(0.788jy + 1.266)\exp(j\omega) + (0.552jy + 0.352)}{\exp(j\omega) + 0.1}, \quad (25a)$$

$$\tilde{w}_2(jy, \exp(j\omega)) = \frac{(0.956jy + 1.042)\exp(j\omega) + (0.699jy + 0.499)}{\exp(j\omega) + 0.1}, \quad (25b)$$

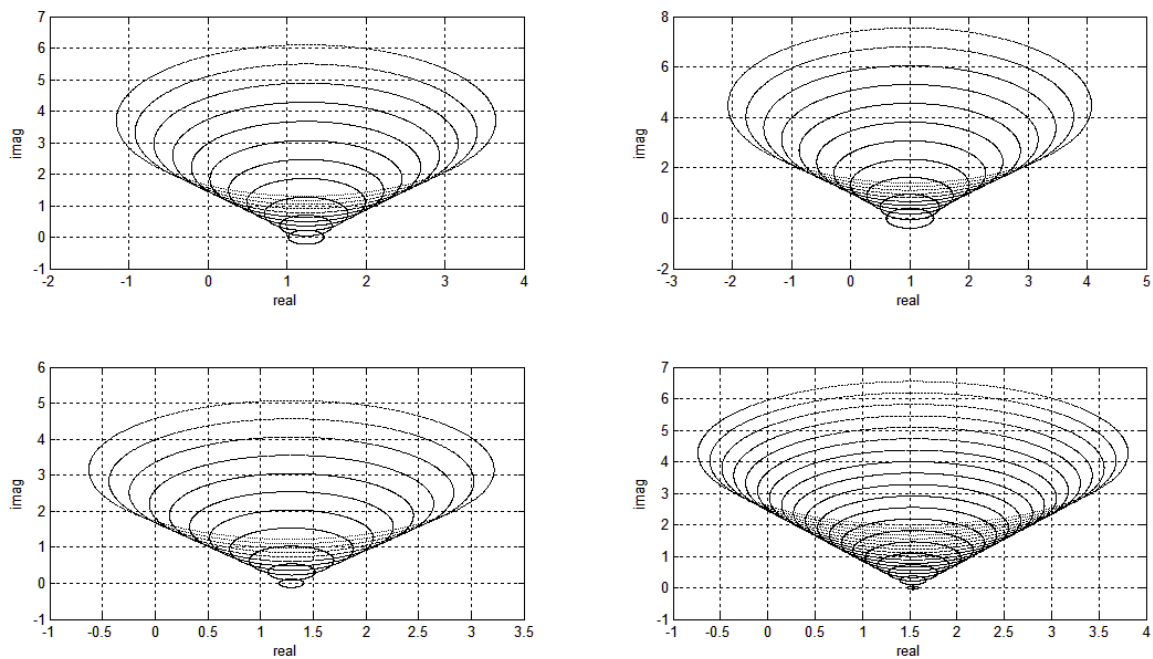
$$\tilde{w}_3(jy, \exp(j\omega)) = \frac{(0.668jy + 1.306)\exp(j\omega) + (0.447jy + 0.247)}{\exp(j\omega) + 0.1}, \quad (25c)$$

$$\tilde{w}_4(jy, \exp(j\omega)) = \frac{(0.500jy + 1.530)\exp(j\omega) + (0.300jy + 0.100)}{\exp(j\omega) + 0.1}. \quad (25d)$$

Wykresy funkcji (25) są pokazane na rysunku 2. Dla rosnących wartości parametru $y > 0$ oddalają się one od początku układu współrzędnych. Zatem nie obejmują one początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 8, że wielomiany zespolone $p_r(jy, z)$ są stabilne w sensie Schura.

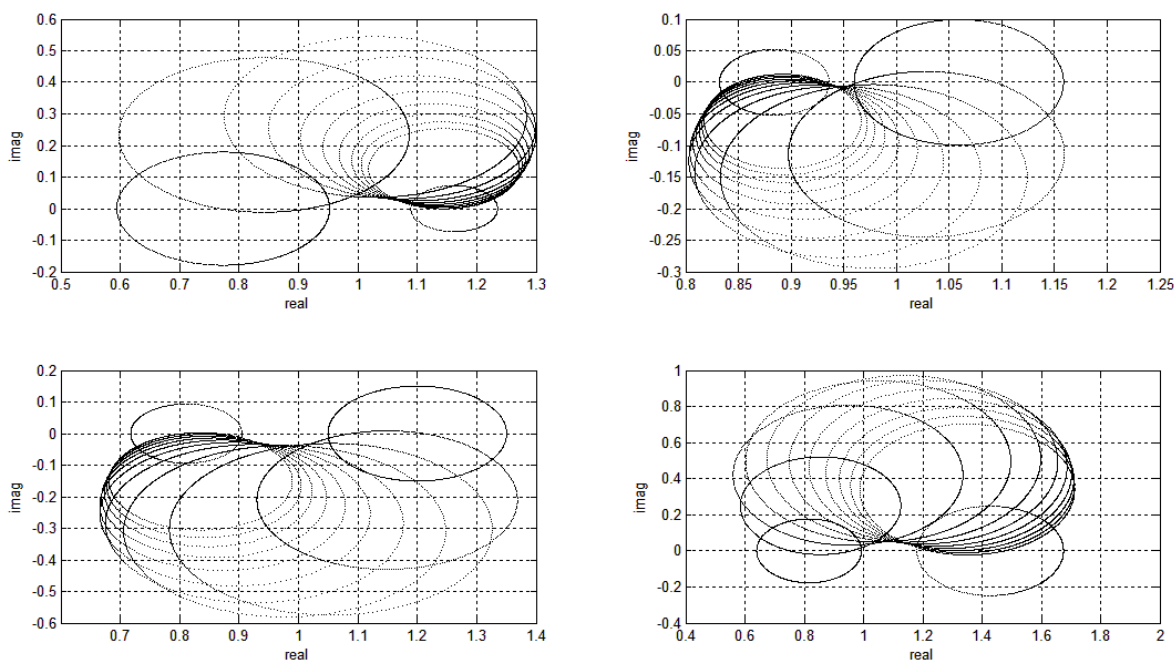


Rys. 1. Wykresy funkcji (24), $y \in [0, 100]$



Rys. 2. Wykresy funkcji (25)

Krok 6. Badamy odporną stabilność w sensie Schura wypukłych kombinacji wielomianów $p_r(jy, z)$ i $p_k(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$. Wykresy funkcji (21) są pokazane na rysunku 3. Przy ustalonym $y \geq 0$ wykresem funkcji (21) linia krzywa zamknięta. Jeżeli wartości parametru $y > 0$ rosną, to wykresy są coraz mniejszymi liniami zamkniętymi. Najmniejsza linia krzywa odpowiada wartości $y = 10^{10}$. Z rysunku 3 wynika, że wykresy funkcji (21) nie przecinają niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$ dla każdego $y \geq 0$. Oznacza to, że jest spełniony warunek 2) twierdzenia 6 dla każdego wielomianu krawędziowego i rozpatrywana rodzina wielomianów (22) jest odpornie stabilna w sensie Hurwitza-Schura, zgodnie z twierdzeniem krawędziowym 5.



Rys. 3. Wykresy funkcji (21) przy $y \in [0, 10]$ i $y = 10^{10}$

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania odpornej stabilności liniowego układu ciągle-dyskretnego, którego wielomian charakterystyczny zależy liniowo od niepewnych parametrów. Analizowany problem jest równoważny z problemem badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (11). Warunki konieczne i wystarczające odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura tej rodziny zostały sformułowane w twierdzeniu krawędziowym 5. Ich sprawdzenie wymaga stosowania obliczeń komputerowych. W pracy zostały podane komputerowe metody służące do sprawdzania warunków twierdzenia 5 oraz sposób postępowania przy badaniu odpornej stabilności.

Proponowane warunki i metody badania odpornej stabilności należą do grupy warunków częstotliwościowych. Są one istotnym rozszerzeniem na klasę rozpatrywanych układów ciągle-dyskretnych metod podanych w monografii [6] w przypadku układów ciągłych oraz dyskretnych.

Oryginalnym osiągnięciem pracy jest podanie komputerowych metod służących do sprawdzania warunków twierdzenia 5. Warunki zawarte w twierdzeniu 5, są podobne do zaproponowanych w pracy [11]. Nie podano tam jednak metod ich sprawdzania.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Ackermann J. (in co-operation with Bartlett A., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R.): Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. Springer-Verlag, London 1994.
2. Barmish B. R.: New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Company, New York 1995.
3. Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.: Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall PTR, New York 1995.
4. Białas S.: Odporna stabilność wielomianów i macierzy. Uczelniane Wyd. Nauk.-Techn. AGH, Kraków 2002.
5. Bistritz Y.: A stability test for continuous-discrete bivariate polynomials, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 3, pp. III682-685, 2003.
6. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
7. Busłowicz M., Kalinowski T.: Odporna stabilność ciągłych układów ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od niepewnych parametrów. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2009, str. 388-397.
8. Busłowicz M.: Stabilność modeli liniowych układów ciągle-dyskretnych. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2008, str. 465-474.
9. Busłowicz M., Sokólski M.: Odporna stabilność układów ciągle-dyskretnych o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2009, str. 425-434.
10. Xiao Y.: Stability test for 2-D continuous-discrete systems. Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3649-3654, 2001.
11. Xiao Y.: Robust Hurwitz-Schur stability conditions of polytopes of 2-D polynomials. Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3643-3648, 2001.
12. Xiao Y.: Stability, controllability and observability of 2-D continuous-discrete systems. Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 4, pp. IV468-IV471, 2003.