prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
mgr inż. Tomasz Kalinowski
Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

BADANIE METODAMI FUNKCJI TESTUJĄCYCH ODPORNEJ STABILNOŚCI CIĄGŁYCH UKŁADÓW UŁAMKOWEGO RZĘDU WSPÓŁMIERNEGO O FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ ZALEŻNEJ LINIOWO OD NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

W pracy podano komputerowe metody (zwane metodami funkcji testujących) badania odpornej stabilności ciągłych liniowych układów dynamicznych, których wielomian charakterystyczny jest wielomianem ułamkowego stopnia współmiernego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Proponowane metody są uogólnieniem metod znanych z teorii odpornej stabilności układów naturalnego rzędu. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

TESTING FUNCTIONS METHODS FOR ROBUST STABILITY ANALYSIS OF CONTINUOUS-TIME FRACTIONAL SYSTEMS OF COMMENSURATE ORDER WITH CHARACTERISTIC FUNCTION LINEARLY DEPENDENT ON UNCERTAIN PARAMETERS

The paper gives simple computational methods (called the testing function methods) for robust stability checking of continuous-time linear fractional systems with linearly dependent coefficient perturbations in characteristic polynomial of fractional commensurate order. The proposed methods are generalizations of the method known from the robust stability theory of natural order systems. The considerations are illustrated by a numerical example.

1. WSTĘP

W ostatnich latach teoria analizy i syntezy liniowych układów ułamkowego rzędu (nazywanych taż układami niecałkowitego rzędu) jest intensywnie rozwijana w literaturze światowej, patrz np. monografie [8 - 13] i cytowaną tam literaturę.

Problem badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów ułamkowych był rozpatrywany w wielu pracach, patrz np. prace [2 - 7] i cytowaną tam literaturę.

W pracy [7] zostało pokazane, że do badania odpornej stabilności układów ułamkowych rzędu współmiernego, których funkcja charakterystyczna zależy liniowo od niepewnych parametrów można stosować tzw. twierdzenie krawędziowe, znane z teorii odpornej stabilności układów naturalnego rzędu. Twierdzenie krawędziowe sprowadza zadanie badania odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych do badania odpornej stabilności skończonej liczby wielomianów krawędziowych (wypukłych liniowych kombinacji dwóch znanych wielomianów). Liczba tych wielomianów szybko rośnie wraz ze wzrostem liczby niepewnych parametrów. Z tego powodu bezpośrednie stosowanie twierdzenia krawędziowego jest trudnym i złożonym obliczeniowo problemem przy dużej liczbie niepewnych parametrów.

Aby uniknąć tej niedogodności, w przypadku wielomianów naturalnego stopnia stosuje się metody funkcji testujących [1]. Pozwalają one na jednoczesne badanie odpornej stabilności wszystkich wielomianów krawędziowych.

Celem niniejszej pracy jest podanie metod funkcji testujących służących do badania odpornej stabilności układu dynamicznego, którego wielomian charakterystyczny stopnia ułamkowego współmiernego zależy liniowo od niepewnych parametrów.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę liniowy dynamiczny układ ciągły ułamkowego rzędu współmiernego, którego wielomian charakterystyczny ma współczynniki liniowo zależne od niepewnych parametrów, o postaci

$$w(s,\boldsymbol{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\boldsymbol{q}) s^{i\alpha}, \quad \boldsymbol{q} \in Q, \tag{1}$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$, $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, ..., q_m]^{\mathrm{T}}$ jest wektorem odchyłek q_k $(k = 1,2...,m)$ niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, m jest liczbą niepewnych parametrów, $a_i(\boldsymbol{q})$, $i = 0,1,...,n,$ są liniowymi ciągłymi funkcjami swoich argumentów zaś

$$Q = \{\boldsymbol{q} : q_k \in [b_k, c_k], b_k \le 0, c_k \ge 0, k = 1,2,...,m\} \tag{2}$$

jest zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że $a_n(\boldsymbol{q}) > 0$, $\forall \boldsymbol{q} \in Q$. Oznacza to, że $w(s,\boldsymbol{q})$ jest wielomianem stałego stopnia $n\alpha$.

Rodzinę wielomianów (1) można zapisać w równoważnej postaci

$$w(s,\boldsymbol{q}) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + ... + q_m w_m(s), \ \boldsymbol{q} \in Q, \tag{3}$$

gdzie $w_i(s)$, $i = 0,1,...,n,$ są to znane wielomiany, przy czym $w_0(s) = w(s,0)$ jest wielomianem nominalnym.

Twierdzenie 1 ([7]). Ułamkowy układ dynamiczny, którego wielomian charakterystyczny ma postać (1) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian (1) ułamkowego stopnia jest stabilny dla każdego $\boldsymbol{q} \in Q$, tzn. jest spełniony warunek

$$w(s,\boldsymbol{q}) \ne 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \ge 0, \ \forall \boldsymbol{q} \in Q. \tag{4}$$

Zbiór (2) jest m-wymiarowym hiperprostopadłościanem. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków i $L = m2^{m-1}$ krawędzi. Każdemu wierzchołkowi $\boldsymbol{q}_k$ $(k = 1,2...,m)$ zbioru Q odpowiada wielomian wierzchołkowy $p_k(s) = w(s,\boldsymbol{q}_k)$. Każdej krawędzi $\boldsymbol{q}_{rk} = (1-\beta)\boldsymbol{q}_r + \beta\,\boldsymbol{q}_k$, $\beta \in [0,1]$, zbioru (2), łączącej wierzchołki $\boldsymbol{q}_r$ i $\boldsymbol{q}_k$ odpowiada wielomian krawędziowy

$$p_{rk}(s,\beta) = (1-\beta) p_r(s) + \beta\, p_k(s), \ \beta \in [0,1], \tag{5}$$

gdzie $p_r(s) = w(s,\boldsymbol{q}_r)$ i $p_k(s) = w(s,\boldsymbol{q}_k)$ są to wielomiany wierzchołkowe.

W pracy [7] pokazano, że do badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (1) (lub równoważnie rodziny wielomianów (3)) można stosować twierdzenie krawędziowe, znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów naturalnego stopnia.

Twierdzenie 2 (twierdzenie krawędziowe) [7]. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie stabilny. Rodzina (1) wielomianów ułamkowych stałego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne wszystkie jej wielomiany krawędziowe (5), odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q, tzn. dla każdego wielomianu krawędziowego (5) jest spełniony warunek:

$$p_{rk}(s,\beta) \neq 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \ \forall \beta \in [0,1]. \tag{6}$$

Do badania odpornej stabilności wielomianu krawędziowego (5) możemy wykorzystać poniższy lemat.

Lemat 1 [7]. Niech wielomian wierzchołkowy $p_r(s)$ będzie stabilny. Wielomian krawędziowy (5) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\vartheta_{rk}(j\omega) = p_k(j\omega)/p_r(j\omega), \quad \omega \in \Omega = [0, \infty), \tag{7}$$

nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Do badania stabilności znanego wielomianu (np. $w_0(s)$ lub $p_r(s)$) możemy stosować komputerową metodę podaną w pracach [3, 5, 7].

Twierdzenie krawędziowe 5 sprowadza zadanie badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (1) do badania odpornej stabilności skończonej liczby wielomianów krawędziowych, których jest $L = m2^{m-1}$. Liczba tych wielomianów szybko rośnie wraz ze wzrostem liczby niepewnych parametrów. Jeżeli np. $m = 4$, to wtedy $L = 4 \cdot 2^3 = 32$. Jeżeli natomiast $m = 5$, to $L = 5 \cdot 2^4 = 80$. Z tego powodu bezpośrednie stosowanie twierdzenia krawędziowego przy $m \geq 4$ jest trudnym i złożonym obliczeniowo problemem.

Aby uniknąć tej niedogodności, w przypadku wielomianów naturalnego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów stosuje się metody funkcji testujących [1]. Pozwalają one na jednoczesne badanie odpornej stabilności wszystkich wielomianów krawędziowych.

Celem niniejszej pracy jest podanie metod funkcji testujących służących do badania odpornej stabilności układu ułamkowego rzędu współmiernego o wielomianie charakterystycznym (1).

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Obszarem stabilności ciągłych układów ułamkowego rzędu (podobnie jak rzędu naturalnego) jest otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ zbiorem wartości rodziny wielomianów (1) jest wypukły wielobok na płaszczyźnie zmiennej zespolonej

$$w(j\omega, Q) = \operatorname{conv}\{p_1(j\omega), \ldots, p_K(j\omega)\}, \tag{8}$$

rozpięty na punktach $p_k(j\omega)$, $k = 1, 2, \ldots, K = 2^m$, będących dla ustalonego $s = j\omega$ wartościami wielomianów wierzchołkowych $p_k(s) = w(s, \boldsymbol{q}_k)$.

Uwzględniając rozważania podane w monografii [1], podamy trzy metody funkcji testujących, które mogą być wykorzystane do badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (1) ułamkowego stopnia.

3.1. Metoda funkcji testującej $d(\omega)$

Niech $R(\omega)$ będzie dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ najmniejszym prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej, w którym leży zbiór wartości (8).

Oznaczmy przez

$$(U^-(\omega),V^-(\omega))\,;\;\;(U^+(\omega),V^-(\omega))\,;\;\;(U^+(\omega),V^+(\omega))\,;\;\;(U^-(\omega),V^+(\omega)) \qquad (9)$$

współrzędne wierzchołków prostokąta $R(\omega)$.

Z definicji prostokąta $R(\omega)$ oraz ze wzoru (8) wynika, że

$$U^-(\omega) = \min\{\operatorname{Re} p_i(j\omega),\, i = 1,2,...,K\}, \quad U^+(\omega) = \max\{\operatorname{Re} p_i(j\omega),\, i = 1,2,...,K\}, \qquad (10)$$

$$V^-(\omega) = \min\{\operatorname{Im} p_i(j\omega),\, i = 1,2,...,K\}, \quad V^+(\omega) = \max\{\operatorname{Im} p_i(j\omega),\, i = 1,2,...,K\}. \qquad (11)$$

Twierdzenie 3. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie stabilny. Rodzina wielomianów (1) stałego stopnia ułamkowego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli

$$d(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega, \qquad (12)$$

gdzie funkcję testującą $d(\omega)$ wyznacza się ze wzoru

$$d(\omega) = \max\{U^-(\omega),\, -U^+(\omega),\, V^-(\omega),\, -V^+(\omega)\}. \qquad (13)$$

Dowód. Jeżeli warunek (12) jest spełniony, to dla każdego $\omega \in \Omega$ prostokąt $R(\omega)$ nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Ponieważ zbiór wartości (8) zawsze leży wewnątrz tego prostokąta, powyższe zachodzi też dla tego zbioru wartości. Jeżeli zatem zachodzi (12) i wielomian nominalny $w_0(s)$ jest stabilny, to jest spełniony warunek wykluczenia zera (np. [7]) i rodzina wielomianów (1) jest odpornie stabilna.

3.2. Metoda funkcji testującej $T(\omega)$

Rozpatrzmy unormowany (względem wielomianu nominalnego) zbiór wartości

$$\widetilde{w}(j\omega,Q) = \operatorname{conv}\{\widetilde{p}_1(j\omega),...,\widetilde{p}_K(j\omega)\}, \qquad (14)$$

gdzie

$$\widetilde{p}_k(j\omega) = p_k(j\omega)/w_0(j\omega), \quad k = 1,2,...,K = 2^m, \qquad (15)$$

a $w_0(s)$ jest stabilnym wielomianem nominalnym.

Wprowadźmy funkcję testującą $B(\omega)$, którą dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ oblicza się ze wzoru

$$B(\omega) = \min\{\mathrm{Re}\,\widetilde{p}_k(j\omega),\ k = 1,2,...,K\}. \tag{16}$$

Zauważmy, że

$$B(\omega) = \min\{\mathrm{Re}\,\widetilde{w}(j\omega,\boldsymbol{q}) : \boldsymbol{q} \in Q\}, \tag{17}$$

gdzie zgodnie ze wzorem (3)

$$\widetilde{w}(j\omega,\boldsymbol{q}) = 1 + q_1\widetilde{w}_1(j\omega) + ... + q_m\widetilde{w}_m(j\omega), \tag{18}$$

przy czym

$$\widetilde{w}_k(s) = w_k(s)/w_0(s),\ k = 1,2,...,m. \tag{19}$$

Ze wzoru (18) wynika, że unormowany zbiór wartości (14) zawsze zawiera w swoim wnętrzu punkt $(1, j0)$, a więc leży on częściowo lub całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Jeżeli dla każdego $\omega \in \Omega$ leży on całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie, to jest spełniony warunek wykluczenia zera [7] i rodzina wielomianów (1) jest odpornie stabilna.

Lemat 2. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie stabilny. Rodzina wielomianów (1) stałego stopnia ułamkowego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli jest spełniony warunek

$$B(\omega) > 0,\ \forall\omega \in \Omega, \tag{20}$$

gdzie funkcja testująca $B(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (16) (lub (17)).

Załóżmy, że dla ustalonego $\omega \in \Omega$ wartość minimalna (17) zastała osiągnięta dla $\boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{q}}$, tj. $B(\omega) = \mathrm{Re}\,\widetilde{w}(j\omega),\hat{\boldsymbol{q}})$ i wprowadźmy oznaczenie

$$C(\omega) = \mathrm{Im}\,\widetilde{w}(j\omega),\hat{\boldsymbol{q}}). \tag{21}$$

Wprowadźmy zespoloną funkcję testującą

$$T(\omega) = B(\omega) + jC(\omega), \tag{22}$$

gdzie $B(\omega)$ i $C(\omega)$ są zdefiniowane wzorami 16 (lub (17)) i (21), odpowiednio (dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$).

Wykres zespolonej funkcji testującej $T(\omega)$ tworzy się w ten sposób, że (dla każdego ustalonego ω) ze zbioru punktów $\widetilde{p}_k(j\omega),\ k = 1,2,...,K = 2^m$, wybiera się punkt o najmniejszej części rzeczywistej. Wykres funkcji $T(\omega)$ składa się więc z fragmentów wykresów funkcji (15). Jest on kawałkami ciągły i gładki. Mogą w nim wystąpić przeskoki od wartości $\widetilde{p}_k(j\omega)$ do wartości $\widetilde{p}_r(j\omega),\ k \neq r$.

Funkcję testującą $T(\omega)$ można wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (16) lub (17). Można ją też wyznaczyć w ten sam sposób jak w przypadku rodziny wielomianów naturalnego stopnia [1], tj. ze wzoru

$$T(\omega) = 1 + t_1(\omega) + \cdots + t_m(\omega), \tag{23}$$

gdzie (dla $k = 1,2,...,m$)

$$t_k(\omega) = b_k \widetilde{w}_k(j\omega), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{Re} \widetilde{w}_k(j\omega) \geq 0, \tag{24}$$

$$t_k(\omega) = c_k \widetilde{w}_k(j\omega), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{Re} \widetilde{w}_k(j\omega) < 0. \tag{25}$$

Wyznaczanie funkcji testującej $T(\omega)$ na postawie powyższych wzorów wymaga znajomości tylko (m+1) wielomianów $w_k(s)$, $k = 0,1,...,m,$ występujących we wzorze (3). Znajomość wielomianów wierzchołkowych $p_k(s)$, $k = 1,2,...,K,$ nie jest konieczna.

Uwzględniając lemat 2 i postępując podobnie jak w przypadku rodziny wielomianów naturalnego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie stabilny.

1) Jeżeli

$$B(\omega) = \operatorname{Re} T(\omega) > 0, \ \forall \omega \in \Omega, \tag{26}$$

   to rodzina wielomianów (1) stałego stopnia ułamkowego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna.

2) Jeżeli wykres funkcji $T(\omega)$ ma ciągły kawałek, który przecina niedodatnią część osi rzeczywistej, to rodzina (1) nie jest odpornie stabilna.

Metoda funkcji testującej $T(\omega)$, podobnie jak i metoda funkcji testującej $d(\omega)$, bazuje na warunku dostatecznym odpornej stabilności. Są to metody bardzo proste w stosowaniu (szczególnie metoda funkcji testującej $T(\omega)$). Jeżeli jednakże na podstawie tych metod nie uzyskamy zadowalającego wyniku, należy skorzystać z metody bazującej na warunku koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności. Taką metodą jest metoda funkcji testującej $F(\omega)$.

3.3. Metoda funkcji testującej $F(\omega)$

Metoda funkcji testującej $F(\omega)$ służy do pośredniego sprawdzenia, czy dla każdego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz wypukłego wieloboku (14).

Uogólniając metodę podaną w pracy [1] otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie stabilny. Rodzina wielomianów (1) stałego stopnia ułamkowego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(\omega) > 0, \ \forall \omega \in \Omega, \tag{27}$$

gdzie $F(\omega)$ jest funkcją testującą, którą dla ustalonego $\omega \in \Omega$ oblicza się ze wzoru

$$F(\omega) = \pi - \max_{r,k}\{|\arg \widetilde{p}_r(j\omega) - \arg \widetilde{p}_k(j\omega)|\}, \tag{28}$$

przy czym $\widetilde{p}_k(j\omega)$ jest zdefiniowane wzorem (15), maksimum liczy się uwzględniając wszystkie wielomiany krawędziowe (5), odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q, zaś $\arg z \in [-\pi, \pi)$ jest argumentem liczby zespolonej z.

4. PRZYKŁAD

Stosując metody funkcji testujących należy zbadać stabilność układu regulacji automatycznej, którego wielomian charakterystyczny ma postać [7]

$$w(s, \boldsymbol{q}) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + q_2 w_2(s), \quad \boldsymbol{q} \in Q, \tag{29}$$

gdzie

$$w_0(s) = 0.8s^{2.2} + 3.7343s^{1.15} + 0.5s^{0.9} + 21.5 \tag{30}$$

jest stabilnym wielomianem nominalnym zaś

$$w_1(s) = 0.1s^{2.2} + 0.25, \quad w_2(s) = 0.2s^{0.9} + 0.1, \tag{31}$$

przy czym

$$Q = \{\boldsymbol{q} = [q_1, q_2]^{\mathrm{T}} : q_1 \in [-0.5, 1], q_2 \in [-0.4, 1]\}. \tag{32}$$

Zbiór (32) jest prostokątem na płaszczyźnie (q_1, q_2) o wierzchołkach

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{q}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Krawędzie $\boldsymbol{q}_{rk} = (1-\beta)\boldsymbol{q}_r + \beta\,\boldsymbol{q}_k$, $\beta \in [0, 1]$, zbioru (32) tworzą pary wierzchołków o indeksach (1,3), (3,2), (2,4) i (1,4).

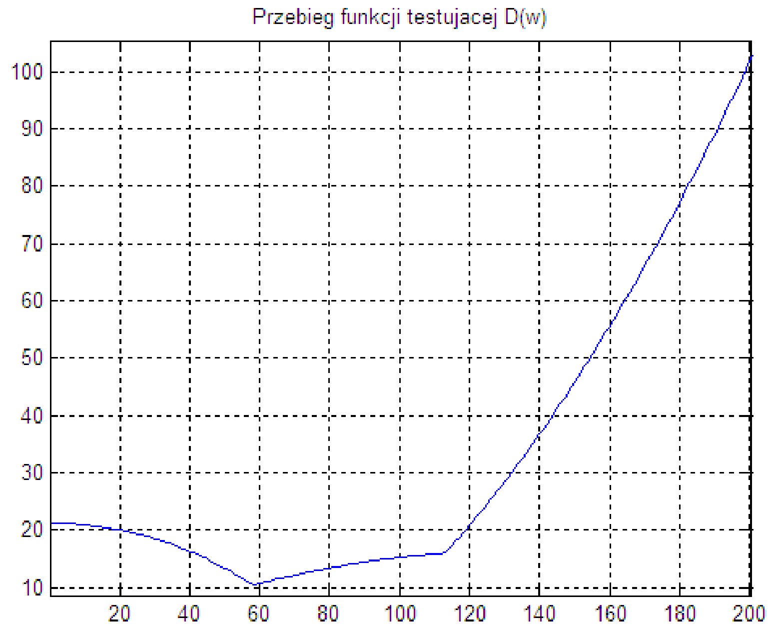
Wielomiany wierzchołkowe odpowiadające poszczególnym wierzchołkom (33) zbioru (32) wyznacza się ze wzorów

$$p_1(s) = w_0(s) - 0.5w_1(s) - 0.4w_2(s), \quad p_2(s) = w_0(s) + w_1(s) + w_2(s),$$

$$p_3(s) = w_0(s) - 0.5w_1(s) + w_2(s), \quad p_4(s) = w_0(s) + w_1(s) - 0.4w_2(s).$$

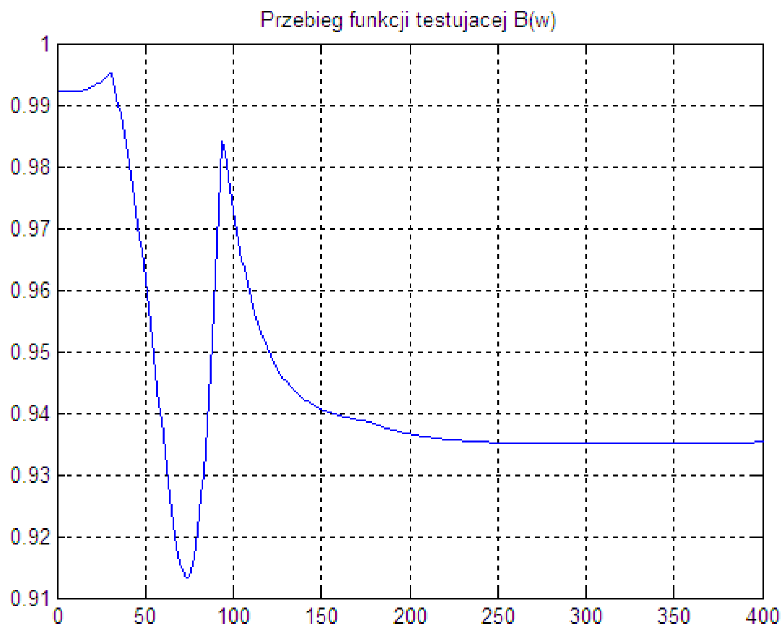
Wielomianami krawędziowymi są wielomiany $p_{rk}(s, \beta)$ o postaci (5), przy czym $(r, k) =$ (1,3), (3,2), (2,4) i (1,4).

Wykres funkcji testującej $d(\omega)$, wyznaczony ze wzorów (13), (10), (11) dla wartości parametru $\omega \in [0, 10]$ zmieniającego się z krokiem $\Delta\omega = 0.05$ jest pokazany na rysunku 1. Z rysunku 1 wynika, że warunek (12) jest spełniony i rozpatrywany układ jest odpornie stabilny, zgodnie z twierdzeniem 3.



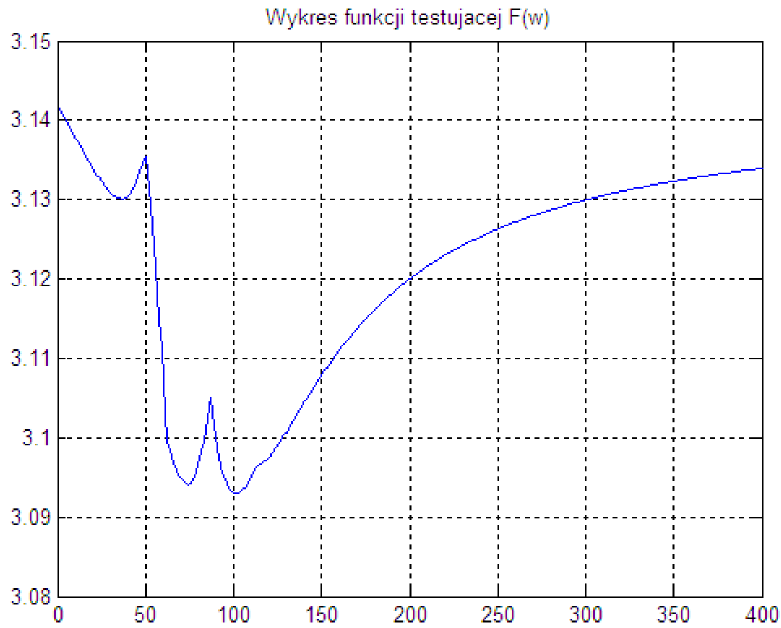
Rys. 1. Wykres funkcji testującej $d(\omega)$

Na rysunku 2 jest pokazany wykres funkcji testującej $B(\omega)$. Został on wyznaczony ze wzoru (16) przy $\omega \in [0, 15]$ zmieniającego się z krokiem $\Delta\omega = 0.05$. Ponieważ warunek (20) jest spełniony, rozpatrywany układ jest odpornie stabilny, zgodnie z lematem 2. Ze względu na spełnienie warunku (20) (i też (26)) wyznaczanie funkcji testującej $T(\omega)$ nie jest konieczne.



Rys. 2. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$

Wykres funkcji testującej $F(\omega)$, wyznaczony ze wzoru (28) dla wartości parametru $\omega \in [0, 20]$ zmieniającego się z krokiem $\Delta\omega = 0{,}05$ jest pokazany na rysunku 3. Z tego rysunku wynika, że warunek (27) jest spełniony i rozpatrywany układ jest odpornie stabilny, zgodnie z twierdzeniem 5.



Rys. 3. Wykres funkcji testującej $F(\omega)$

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania odpornej stabilności liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego, którego wielomian charakterystyczny (1) zależy liniowo od niepewnych parametrów.

Podano trzy metody funkcji testujących, służące do badania odpornej stabilności. Są to dogodne do obliczeń komputerowych metody częstotliwościowe. Ich stosowanie może znacznie ułatwić badanie odpornej stabilności rozpatrywanej klasy układów ułamkowych przy dużej liczbie niepewnych parametrów.

Proponowane metody badania odpornej stabilności są uogólnieniem na klasę układów ułamkowych rzędu współmiernego metod podanych w monografii [1] w przypadku układów rzędu naturalnego.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
2. Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems. W: Malinowski K., Rutkowski L. (Eds): Recent Advances in Control and Automation, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, pp. 83-92.
3. Busłowicz M.: Stabilność liniowych ciągłych układów ułamkowych rzędu współmiernego. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2008, str. 475-484 (CD-ROM).
4. Busłowicz M.: Robust stability of convex combination of two fractional degree characteristic polynomials. Acta Mechanica et Automatica, 2008, vol. 2, No. 2, pp. 5-10.
5. Busłowicz M.: Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, 2009, vol. 3, No. 1, pp. 16-21.
6. Busłowicz M.: Kalinowski T.: Odporna stabilność liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru. Pomiary Automatyka Robotyka, 2 (2008), str. 465-474 (CD-ROM).
7. Busłowicz M., Kalinowski T.: Odporna stabilność ciągłych układów ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od niepewnych parametrów. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2009, str. 388-397 (CD-ROM).
8. Das. S.: Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer, Berlin 2008.
9. Podlubny I., Fractional order systems and fractional order controllers. The Academy of Sciences Institute of Experimental Physis, Kosice, Slovak Republic, 1994.
10. Podlubny I.: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego 1999.
11. Kaczorek T.: Dodatnie układy 1D i 2D niecałkowitego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009 (w druku).
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam 2006.
13. Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T. (Eds): Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, London 2007.