

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz  
Politechnika Białostocka  
Wydział Elektryczny

## KOMPUTEROWE METODY BADANIA STABILNOŚCI MODELI OGÓLNYCH LINIOWYCH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNÝCH

*Rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów dynamicznych ciągle-dyskretnych. Podano proste komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności dwóch modeli ogólnych takich układów. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.*

### COMPUTER METHODS FOR STABILITY ANALYSIS OF GENERAL MODELS OF LINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

*The problem of asymptotic stability of linear dynamic continuous-discrete systems is considered. Simple computer methods for asymptotic stability analysis of two general models of such systems are given. The considerations are illustrated by numerical examples.*

#### 1. WSTĘP

Układami ciągle-dyskretnymi (hybrydowymi) nazywamy takie układy dynamiczne, w których modelu matematycznym jedna część zmiennych stanu jest z czasem ciągłym zaś druga część jest z czasem dyskretnym, przy czym nie da się rozdzielić równań dynamiki opisujących część ciągłą oraz część dyskretną.

Układami hybrydowymi nazywa się też takie układy, których dynamika jest opisywana za pomocą skończonego zbioru modeli ciągłych, odpowiadających np. poszczególnym stanom pracy układu. W trakcie pracy układu następują przełączenia pomiędzy modelami ciągłymi, przy czym przełączenia następują w chwilach dyskretnych w sposób zależny lub też niezależny od aktualnego stanu procesu [4, 12].

Problemy modelowania oraz realizacji liniowych dodatnich układów ciągle-dyskretnych były analizowane w pracach [6 – 11, 13].

Problemowi badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów ciągle-dyskretnych są poświęcone prace [1, 2, 3, 14, 15, 16].

W pracy [2] zostały podane komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasini-Marchesini oraz modelu typu Roessera układów ciągle-dyskretnych. Wymagają one obliczania wartości własnych macierzy o zespolonych elementach (lub zer wielomianów o zespolonych współczynnikach) i z tego powodu nie są dogodne w stosowaniu.

W niniejszej pracy zostaną podane nowe komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności dwóch modeli ogólnych liniowych układów ciągle-dyskretnych. Proponowane metody wymagają obliczania wartości wielomianów charakterystycznych o zespolonych współczynnikach i dlatego są proste w stosowaniu. Metody te mogą być wykorzystane do badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasini-Marchesini oraz modelu typu Roessera.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia:  $\mathfrak{R}^{n \times m}$  - zbiór macierzy o wymiarach  $n \times m$ , przy czym  $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $Z_+$  - zbiór liczb całkowitych nieujemnych,  $\mathfrak{R}_+ = [0, \infty]$ .

## 2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę model ogólny układu ciągle-dyskretnego [6, 7]

$$\dot{x}(t, i+1) = A_0x(t, i) + A_1\dot{x}(t, i) + A_2x(t, i+1) + B_0u(t, i) + B_1\dot{u}(t, i) + B_2u(t, i+1), \quad (1a)$$

$$y(t, i) = Cx(t, i) + Du(t, i), \quad t \in \mathfrak{R}_+ = [0, \infty], \quad i \in Z_+, \quad (1b)$$

gdzie  $\dot{x}(t, i) = \partial x(t, i) / \partial t$ ,  $x(t, i) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t, i) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y(t, i) \in \mathfrak{R}^p$  zaś  $A_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_k \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  ( $k = 0, 1, 2$ ),  $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ .

Warunki brzegowe dla modelu (1) są następujące

$$x(t, 0) = x(t), \quad \dot{x}(t, 0) = \dot{x}(t), \quad t \in \mathfrak{R}_+, \quad (2a)$$

$$x(0, i) = x(i), \quad i \in Z_+. \quad (2b)$$

Stosując do obu stron równań (1) przekształcenie Laplace'a ze względu na zmienną  $t$  oraz przekształcenie  $Z$  ze względu na zmienną  $i$ , przy zerowych warunkach brzegowych (2) otrzymamy

$$szX(s, z) = A_0X(s, z) + A_1sX(s, z) + zA_2X(s, z) + B_0U(s, z) + sB_1U(s, z) + zB_2U(s, z), \quad (3a)$$

$$Y(s, z) = CX(s, z) + DU(s, z) \quad (3b)$$

oraz

$$Y(s, z) = C[szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2]^{-1}[B_0 + sB_1 + zB_2]U(s, z) + DU(s, z). \quad (4)$$

Ze wzoru (4) wynika, że macierz charakterystyczna modelu ogólnego (1) wyraża się wzorem

$$H(s, z) = szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2 \quad (5)$$

zaś funkcja charakterystyczna tego modelu

$$w(s, z) = \det H(s, z) = \det[szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2] \quad (6)$$

jest wielomianem dwóch zmiennych niezależnych  $s$  i  $z$ . Można ją napisać w ogólnej postaci

$$w(s, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_{kj} s^k z^j, \quad a_{nn} = 1. \quad (7)$$

Nowy model 2D (hybrydowy) układu ciągle-dyskretnego, zaproponowany w pracy [8], ma postać (dla  $t \in \mathfrak{R}_+$ ,  $i \in Z_+$ )

$$\dot{x}_1(t, i) = A_{11}x_1(t, i) + A_{12}x_2(t, i) + B_1u(t, i), \quad (8a)$$

$$x_2(t, i+1) = A_{21}x_1(t, i) + A_{22}x_2(t, i) + B_2u(t, i), \quad (8b)$$

$$y(t, i) = C_1x_1(t, i) + C_2x_2(t, i) + Du(t, i), \quad (8c)$$

gdzie  $\dot{x}(t, i) = \partial x(t, i) / \partial t$ ,  $x_1(t, i) \in \mathfrak{R}^{n_1}$ ,  $x_2(t, i) \in \mathfrak{R}^{n_2}$ ,  $u(t, i) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y(t, i) \in \mathfrak{R}^p$  zaś stałe macierze  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  i  $D$  mają odpowiednie wymiary.

Warunki brzegowe dla równań (8a) i (8b) mają postać

$$x_1(0, i) = x_1(i), \quad i \in Z_+ \quad \text{oraz} \quad x_2(t, 0) = x_2(t), \quad t \in \mathfrak{R}_+. \quad (9)$$

Model (8) można napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t,i) \\ x_2(t,i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t,i), \quad (10a)$$

$$y(t,i) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} + Du(t,i). \quad (10b)$$

Macierz charakterystyczną  $H(s,z)$  modelu ogólnego (8) wyraża się wzorem

$$H(s,z) = \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & zI_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

zaś funkcja charakterystyczna tego modelu ma ogólną postać

$$w(s,z) = \det H(s,z) = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{kj} s^k z^j, \quad a_{n_1 n_2} = 1. \quad (12)$$

Funkcję charakterystyczną (12) można obliczyć korzystając z jednego z poniższych wzorów, wynikających z dwóch metod obliczania wyznacznika macierzy blokowej [5],

$$w(s,z) = \det\{(zI_{n_2} - A_{22})\det(sI_{n_1} - A_{11}) - A_{21}(\text{adj}(sI_{n_1} - A_{11}))A_{12}\}, \quad (13a)$$

$$w(s,z) = \det\{(sI_{n_1} - A_{11})\det(zI_{n_2} - A_{22}) - A_{12}(\text{adj}(zI_{n_2} - A_{22}))A_{21}\}. \quad (13b)$$

Definicje stabilności rozpatrywanych modeli układów ciągle-dyskretnych można sformułować w sposób podany poniżej.

**Definicja 1.** Model ogólny (1) układu ciągle-dyskretnego będziemy nazywać asymptotycznie stabilnym, jeżeli przy  $u(t,i) \equiv 0$  oraz ograniczonych warunkach brzegowych (2) zachodzi zależność  $\lim_{i,t \rightarrow \infty} \|x(t,i)\| = 0$ , przy czym  $\|x(t,i)\|$  oznacza normę wektora  $x(t,i)$ .

**Definicja 2.** Model ogólny (8) układu ciągle-dyskretnego będziemy nazywać asymptotycznie stabilnym, jeżeli przy  $u(t,i) \equiv 0$  oraz ograniczonych warunkach brzegowych (9) zachodzą zależności  $\lim_{i,t \rightarrow \infty} \|x_1(t,i)\| = 0$  i  $\lim_{i,t \rightarrow \infty} \|x_2(t,i)\| = 0$ .

Uwzględniając rozważania podane w pracy [2] możemy sformułować poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 1.** Model ogólny (1) (lub (8)) układu ciągle-dyskretnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny (6) (lub wielomian charakterystyczny (13)) spełnia warunek

$$w(s,z) \neq 0, \quad \text{Re } s \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (14)$$

Wielomian  $w(s,z)$  dwóch zmiennych niezależnych spełniający warunek (14) będziemy nazywać wielomianem asymptotycznie stabilnym (w sensie Hurwitza-Schura).

Bezpośrednie sprawdzenie warunku (14) nie jest możliwe, ponieważ nie ma metod wyznaczania zer wielomianów wielu zmiennych. Warunek ten można sprawdzić pośrednio z wykorzystaniem m. in. obliczeń komputerowych.

Metody sprawdzania spełnienia warunku (14) dla modeli Fornasini-Marchesini oraz Roessera układów ciągle-dyskretnych zostały podane w pracy [2]. Wymagają one obliczania zer wielomianów o zespolonych współczynnikach (lub wartości własnych odpowiednich macierzy o zespolonych elementach) i z tego powodu są trudne w stosowaniu.

Celem pracy jest podanie nowych komputerowych metod badania asymptotycznej stabilności modeli ogólnych (1) oraz (8) układów ciągle-dyskretnych. Metody te wymagają obliczania tylko wartości odpowiednich funkcji i z tego powodu są proste w stosowaniu.

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

**Twierdzenie 2** [2]. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym  $w(s, z)$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, \exp(j\omega)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad (15)$$

czyli dla każdego ustalonego  $\omega \in [0, 2\pi]$  wielomian zespolony  $w(s, \exp(j\omega))$  ma tylko zera o ujemnych częściach rzeczywistych.

Sprawdzenie warunku (15) dla modeli (1) i (8) można przeprowadzić stosując obliczeniowe algorytmy podane w pracy [2]. Wymagają one obliczania zer wielomianów o zespolonych współczynnikach (lub wartości własnych macierzy o zespolonych elementach). Z tego powodu stosowanie tych algorytmów może być utrudnione w przypadku złego uwarunkowania numerycznego macierzy oraz wysokiego rzędu analizowanych modeli. Aby uniknąć wyżej wymienionej niedogodności, do badania stabilności modeli ogólnych układów ciągle-dyskretnych zastosujemy metody częstotliwościowe, wymagające obliczania wartości wielomianów o zespolonych współczynnikach.

Dla  $z = \exp(j\omega)$  macierz charakterystyczną (5) modelu (1) napiszemy w postaci

$$H(s, e^{j\omega}) = s(I_n e^{j\omega} - A_1) - A_0 - A_2 e^{j\omega}. \quad (16)$$

Jeżeli  $A_1 \neq I_n$ , to macierz  $I_n e^{j\omega} - A_1$  jest nieosobliwa dla każdego  $\omega \in [0, 2\pi]$ . Wtedy

$$\begin{aligned} s(I_n e^{j\omega} - A_1) - A_0 - A_2 e^{j\omega} &= [I_n e^{j\omega} - A_1][sI_n - (I_n e^{j\omega} - A_1)^{-1}(A_2 e^{j\omega} + A_0)] \\ &= [sI_n - (A_2 e^{j\omega} + A_0)(I_n e^{j\omega} - A_1)^{-1}][I_n e^{j\omega} - A_1] \end{aligned}$$

i ze wzoru (6) dla  $z = \exp(j\omega)$  mamy

$$w(s, e^{j\omega}) = \det(I_n e^{j\omega} - A_1) \det(sI_n - S_1(e^{j\omega})), \quad (17)$$

gdzie

$$S_1(e^{j\omega}) = (I_n e^{j\omega} - A_1)^{-1}(A_2 e^{j\omega} + A_0) = (A_2 e^{j\omega} + A_0)(I_n e^{j\omega} - A_1)^{-1}. \quad (18)$$

Z powyższego wynika, że w przypadku modelu (1) zerami wielomianu  $w(s, e^{j\omega})$  są wartości własne macierzy (18). Są one miejscami zerowymi wielomianu charakterystycznego

$$\tilde{w}_1(s, e^{j\omega}) = \det(sI_n - S_1(e^{j\omega})). \quad (19)$$

Oznacza to, jeżeli  $A_1 \neq I_n$ , to przy badaniu stabilności modelu ogólnego (1) możemy rozpatrywać wielomian (19) zamiast wielomianu (17).

Słuszne jest więc poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3.** Model ogólny (1) przy  $A_1 \neq I_n$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego  $\omega \in [0, 2\pi]$  wielomian zespolony (19) ma tylko zera o ujemnych częściach rzeczywistych, czyli

$$\tilde{w}_1(s, \exp(j\omega)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]. \quad (20)$$

Rozpatrzmy teraz model ogólny (8).

Podstawiając  $z = \exp(j\omega)$  do wzoru (11) otrzymamy

$$H(s, \exp(j\omega)) = \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Jeżeli  $A_{22} \neq I_{n_2}$ , to macierz  $I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22}$  jest nieosobliwa dla każdego  $\omega \in [0, 2\pi]$ . W takim przypadku [2]

$$w(s, e^{j\omega}) = \det H(s, e^{j\omega}) = \det(I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22}) \det(sI_{n_1} - S_2(e^{j\omega})), \quad (22)$$

gdzie

$$S_2(e^{j\omega}) = A_{11} + A_{12}(I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22})^{-1}A_{21}. \quad (23)$$

Zatem w przypadku modelu ogólnego (8) zerami wielomianu  $w(s, \exp(j\omega))$  są wartości własne macierzy (23). Są one miejscami zerowymi wielomianu charakterystycznego

$$\tilde{w}_2(s, e^{j\omega}) = \det(sI_n - S_2(e^{j\omega})). \quad (24)$$

Z powyższego wynika, że jeżeli  $A_{22} \neq I_{n_2}$ , to przy badaniu stabilności modelu ogólnego (8) możemy rozpatrywać wielomian (24) zamiast wielomianu (22).

Udowodniliśmy więc poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 4.** Model ogólny (8) przy  $A_{22} \neq I_{n_2}$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego  $\omega \in [0, 2\pi]$  wielomian zespolony (24) ma tylko zera o ujemnych częściach rzeczywistych, czyli

$$\tilde{w}_2(s, \exp(j\omega)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]. \quad (25)$$

Podamy teraz komputerowe metody sprawdzania warunków (20) i (25).

Warunek (20) dla  $\omega = 0$  przyjmuje postać

$$\tilde{w}_1(s, 1) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \quad (26)$$

Warunek (26) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera wielomianu

$$\tilde{w}_1(s, 1) = \det(sI_n - S_1), \quad S_1 = (I_n - A_1)^{-1}(A_0 + A_2), \quad (27)$$

mają ujemne części rzeczywiste (wielomian (27) jest stabilny w sensie Hurwitza).

Do sprawdzenia warunku (26) możemy stosować np. kryterium stabilności Hurwitza lub kryterium Michajłowa.

Jeżeli zachodzi (26), to warunek (20) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian zespolony (19) nie ma zer na osi urojonej dla każdego  $\omega \in [0, 2\pi]$ . Wynika to z ciągłej zależności zer wielomianu (19) od parametru  $\omega$ .

Z powyższych rozważań wynika zatem, że model ogólny (1) przy  $A_1 \neq I_n$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (26) i jest spełniony warunek

$$\tilde{w}(j\tau, \exp(j\omega)) \neq 0 \quad \text{dla } \forall \tau \in \mathfrak{R} \text{ i } \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad (28)$$

tj. wielomian zespolony  $\tilde{w}_1(s, \exp(j\omega))$  dla każdego ustalonego  $\omega \in [0, 2\pi]$  nie ma zer na osi urojonej.

Jeżeli jest spełniony warunek (26), to zgodnie z zasadą argumentu, wykres funkcji  $\tilde{w}_1(j\tau, 1)$  przy  $\tau$  zmieniającym się od 0 do nieskończoności (hodograf Michajłowa), nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, okrąży go  $n/2$  razy w kierunku matematycznie dodatnim, gdzie  $n$  jest stopniem wielomianu  $\tilde{w}_1(s, 1)$ .

Na bazie powyższych warunków możemy sformułować następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.** Jeżeli wielomian (27) jest stabilny w sensie Hurwitza, to model ogólny (1) przy  $A_1 \neq I_n$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego  $\tau \geq 0$  wykres funkcji

$$\phi_1(j\tau, \exp(j\omega)) = \frac{\tilde{w}_1(j\tau, \exp(j\omega))}{\tilde{w}_1(j\tau, 1)}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (29)$$

nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego, przy czym  $\tilde{w}_1(j\tau, \exp(j\omega))$  oraz  $\tilde{w}_1(j\tau, 1)$  mają postaci (19) i (27), odpowiednio, dla  $s = j\tau$ .

**Dowód.** Dla każdego ustalonego  $\omega \in \Omega$  wykres funkcji  $\tilde{w}_1(j\tau, \exp(j\omega))$  sporządzony w funkcji parametru  $\tau \in [0, \infty)$ , obejmuje tyle samo razy początek płaszczyzny zmiennej zespolonej co wykres funkcji  $\tilde{w}_1(j\tau, 1)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{\tau \in [0, \infty)} \arg \phi_1(j\tau, \exp(j\omega)) = 0. \quad (30)$$

Jeżeli zatem wielomian  $\tilde{w}_1(s, 1)$  jest stabilny w sensie Hurwitza, to (30) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności w sensie Hurwitza wielomianu zespolonego (19) dla każdego  $\omega \in \Omega$ . Dowód wynika zatem z twierdzenia 3. ■

Zauważmy, że dla każdego ustalonego  $\tau \in [0, \infty)$  wykresem funkcji (29) jest krzywa zamknięta. Rozpoczyna się ona przy  $\omega = 0$  i kończy się przy  $\omega = 2\pi$  w punkcie  $\phi_1(j\tau, 1) = 1$ .

Z twierdzenia 5 wynika następująca metoda postępowania przy badaniu asymptotycznej stabilności modelu ogólnego (1) przy  $A_1 \neq I_n$ .

#### Metoda postępowania 1.

**Krok 1.** Badamy stabilność w sensie Hurwitza wielomianu (27) (macierzy  $S_1$ ). Jeżeli jest on stabilny, przechodzimy do kroku 2. W przeciwnym przypadku model ogólny (1) nie jest asymptotycznie stabilny.

**Krok 2.** Przyjmujemy odpowiednio duży przedział  $T = [0, \tau_{kon}]$  wartości parametru  $\tau$ . Dla każdego ustalonego  $\tau \in T$ , wyznaczonego z odpowiednio małym krokiem  $\Delta\tau$ , sporządzamy wykres funkcji (29). Dokonujemy w tym celu dyskretyzacji przedziału  $\Omega = [0, 2\pi]$  z odpowiednio małym krokiem  $\Delta\omega$  i dla każdego ustalonego  $\omega \in \Omega$  obliczamy wartość funkcji (29). Wartość  $\tau_{kon}$  należy przyjąć odpowiednią dużą, taką aby na podstawie wyznaczonych wykresów stwierdzić spełnienie (lub niespełnienie) warunku (30) dla wszystkich  $\tau \geq 0$ .

**Krok 3.** Jeżeli na podstawie sporządzonych wykresów stwierdzimy spełnienie (niespełnienie) warunku (30), to model ogólny (1) jest asymptotycznie stabilny (niestabilny).

Przejdziemy teraz do rozwiązania problemu badania asymptotycznej stabilności modelu ogólnego (8). Postępując podobnie w przypadku modelu ogólnego (1) otrzymamy poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 6.** Jeżeli wielomian

$$\tilde{w}_2(s,1) = \det(sI_n - S_2), \quad S_2 = A_{11} + A_{12}(I_{n_2} - A_{22})^{-1}A_{21}, \quad (31)$$

jest stabilny w sensie Hurwitza, to model ogólny (8) przy  $A_{22} \neq I_{n_2}$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego  $\tau \geq 0$  wykres funkcji

$$\phi_2(j\tau, \exp(j\omega)) = \frac{\tilde{w}_2(j\tau, \exp(j\omega))}{\tilde{w}_2(j\tau, 1)}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (32)$$

nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego, przy czym  $\tilde{w}_2(j\tau, \exp(j\omega))$  oraz  $\tilde{w}_2(j\tau, 1)$  mają postaci (24) i (31), odpowiednio, dla  $s = j\tau$ .

Do sprawdzenia warunku twierdzenia 6, który można napisać w postaci

$$\Delta_{\tau \in [0, \infty)} \arg \phi_2(j\tau, \exp(j\omega)) = 0, \quad (33)$$

możemy wykorzystać Metodę postępowania 1 uwzględniając poniższą uwagę.

**Uwaga 1.** Stosując Metodę postępowania 1 do badania stabilności modelu ogólnego (8) należy przyjąć wielomian (31) zamiast wielomianu (27), warunek (33) zamiast (30) oraz funkcję (32) zamiast funkcji (29).

Podobnie jak w przypadku modelu ogólnego (1), dla każdego ustalonego  $\tau \in [0, \infty)$  wykresem funkcji (32) jest krzywa zamknięta. Rozpoczyna się ona przy  $\omega = 0$  i kończy się przy  $\omega = 2\pi$  w punkcie  $\phi_2(j\tau, 1) = 1$ .

#### 4. PRZYKŁADY

**Przykład 1.** Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu ogólnego (1) układu ciągło-dyskretnego o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0.4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 2 \\ 0 & -0.2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Do badania stabilności zastosujemy twierdzenie 5 i Metodę postępowania 1.

**Krok 1.** Obliczając macierz  $S_1 = (I_n - A_1)^{-1}(A_0 + A_2)$  i jej wielomian charakterystyczny otrzymamy

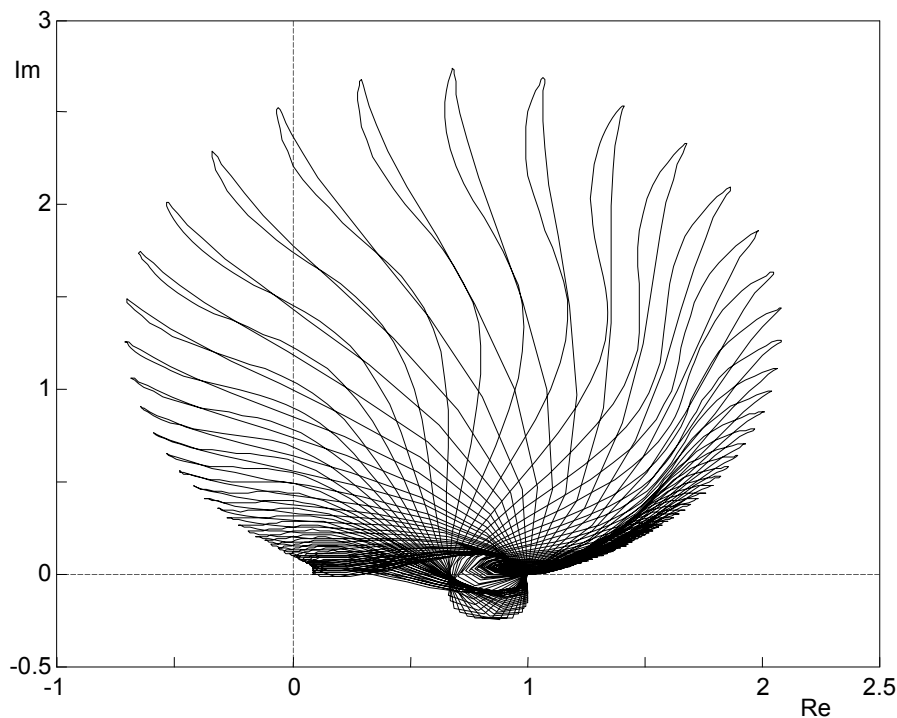
$$\tilde{w}_1(s,1) = \det(sI_n - S_1) = s^3 + 2.42s^2 + 14.5667s + 13.4667. \quad (35)$$

Łatwo sprawdzić stosując np. kryterium Hurwitza, że wielomian (35) jest stabilny.

**Krok 2.** Wykresy funkcji (29) są pokazane na rysunku 1. Zostały one sporządzone dla wartości parametru  $\tau \in T = [0, \tau_{kon}] = [0, 10]$  zmieniającego z krokiem  $\Delta\tau = 0.1$ . Dla każdego ustalonego  $\tau \in T$  przyjmowano dyskretyzację przedziału  $\Omega = [0, 2\pi]$  z krokiem  $\Delta\omega = 0.05\pi$ .



**Krok 3.** Z rysunku 1 wynika, że warunek (30) jest spełniony dla każdego ustalonego  $\Omega = [0, 2\pi]$ . Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 5, że rozpatrywany model ogólny (1) o macierzach (34) jest asymptotycznie stabilny.



Rys 1. Wykresy funkcji (29)

**Przykład 2.** Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu ogólnego (8) układu ciągło-dyskretnego o macierzach

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 5 & 2.4 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Do badania stabilności zastosujemy twierdzenie 6 oraz Metodę postępowania 1 i uwagę 1.

**Krok 1.** Obliczając macierz  $S_2 = A_{11} + A_{12}(I_{n_2} - A_{22})^{-1}A_{21}$  i jej wielomian charakterystyczny otrzymamy

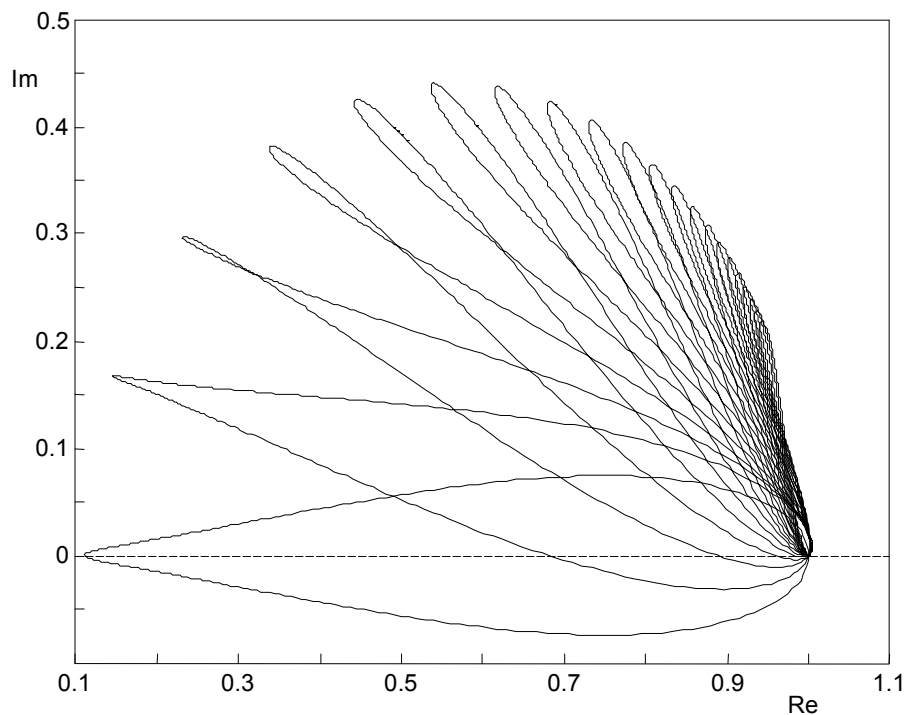
$$\tilde{w}_2(s,1) = \det(sI_{n_2} - S_2) = s^2 + 3.8714s + 3.1414. \quad (37)$$

Wszystkie współczynniki wielomianu (37) drugiego stopnia są dodatnie, co oznacza, zgodnie z twierdzeniem Hurwitza, że wielomian (37) jest stabilny.

**Krok 2.** Wykresy funkcji (32) są pokazane na rysunku 2. Zostały one sporządzone dla wartości parametru  $\tau \in T = [0, \tau_{kon}] = [0, 10]$  zmieniającego z krokiem  $\Delta\tau = 0.5$ . Dla każdego ustalonego  $\tau \in T$  przyjmowano dyskretyzację przedziału  $\Omega = [0, 2\pi]$  z krokiem  $\Delta\omega = 0.01\pi$ .

**Krok 3.** Z rysunku 2 wynika, że warunek (33) jest spełniony dla każdego ustalonego  $\Omega = [0, 2\pi]$ . Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 6, że rozpatrywany model ogólny (8) o macierzach (34) jest asymptotycznie stabilny.





Rys 2. Wykresy funkcji (32)

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów hybrydowych ciągle-dyskretnych. Podano komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności (w sensie Hurwitza-Schura) dwóch modeli ogólnych układów ciągle-dyskretnych.

W szczególności pokazano, że:

- model ogólny (1) przy  $A_1 \neq I_n$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ustalonego  $\tau \geq 0$  wykres funkcji (29) nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego (twierdzenie 5),
- model ogólny (8) przy  $A_{22} \neq I_{n_2}$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego  $\tau \geq 0$  wykres funkcji (32) nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego (twierdzenie 6).

Proponowane metody mogą być wykorzystane do badania asymptotycznej stabilności innych modeli układów ciągle-dyskretnych, takich jak model Fornasiniiego-Marchesiniego oraz model typu Roessera [6, 7].

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

**LITERATURA**

1. Bistritz Y.: A stability test for continuous-discrete bivariate polynomials, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 3, pp. III682-685, 2003.
2. Busłowicz M.: Stabilność modeli liniowych układów ciągle-dyskretnych, Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2/2009, str. 425-434 (CD-ROM).
3. Busłowicz M., Sokólski M.: Odporna stabilność układów ciągle-dyskretnych o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru, Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2/2009, str. 435-444 (CD-ROM).
4. Czornik A.: Dynamika układów hybrydowych, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, ser. Automatyka, z. 151, str. 31-36, 2008.
5. Kaczorek T.: Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice, WNT, Warszawa 1998.
6. Kaczorek T.: Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
7. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London 2002.
8. Kaczorek T.: Positive 2D hybrid linear systems, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, Vol. 55, No. 4, pp. 351-358, 2007.
9. Kaczorek T.: Realization problem for positive 2D hybrid systems, COMPEL, vol. 27, no. 3, pp. 613-623, 2008.
10. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski Ł.: Solvability of 2D hybrid linear systems - comparison of the different methods, Acta Mechanica et Automatica, vol. 2, no. 2, pp. 59-66, 2008.
11. Kaczorek T., Sajewski Ł.: Wyznaczanie dodatniej realizacji na podstawie schematu zmiennych stanu liniowych układów hybrydowych. Pomiary Automatyka Robotyka nr 2/2007 (CD-ROM).
12. Liberzon D.: Switching in Systems and Control, Birkhauser, Boston 2002.
13. Sajewski Ł.: Solution of 2D singular hybrid linear systems, Kybernetes, vol. 38, no. 7/8, pp. 1079-1092, 2009.
14. Xiao Y.: Stability test for 2-D continuous-discrete systems, Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3649-3654, 2001.
15. Xiao Y.: Robust Hurwitz-Schur stability conditions of polytopes of 2-D polynomials, Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3643-3648, 2001.
16. Xiao Y.: Stability, controllability and observability of 2-D continuous-discrete systems, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 4, pp. IV468-IV471, 2003.