

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz  
Katedra Automatyki i Elektroniki  
Wydział Elektryczny Politechniki Białostockiej

## WYBRANE ZAGADNIENIA Z ZAKRESU LINIOWYCH CIĄGŁYCH UKŁADÓW NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

*W pracy dokonano przeglądu wybranych zagadnień z zakresu rachunku niecałkowitego rzędu oraz teorii ciągłych układów liniowych stacjonarnych rzędu niecałkowitego, takich jak metody opisu, synteza regulatorów niecałkowitego rzędu, ich modelowanie oraz realizacja praktyczna, a także badanie stabilności układów regulacji. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.*

### SELECTED PROBLEMS OF CONTINUOUS-TIME LINEAR SYSTEMS OF NON-INTEGGER ORDER

*The paper gives the review of the selected problems from calculus of non-integer order and theory of continuous-time linear systems of non-integer order such as description methods, synthesis of non-integer controllers, their modelling and practical realization and also stability checking of the control systems. The considerations are illustrated by examples.*

#### 1. WSTĘP

Początki rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów sięgają XVII wieku. Za wydarzenie o historycznym znaczeniu uważa się list Leibniza do L'Hospitala z 30 września 1695 r., w którym Leibnitz na pytanie o wynik operacji różniczkowania rzędu  $1/2$  odpowiedział „Dostrzegalny paradoks, który pewnego dnia zostanie rozwiązany” [31].

Rachunek różniczkowo-całkowy, w którym rozpatruje się nie tylko całkowite rzędy pochodnych i całek, w języku francuskim nosi nazwę *derivation non entiere*. Odpowiada jej nazwa w języku angielskim *fractional calculus*, przy czym słowo *fractional* zazwyczaj należy rozumieć jako *non-integer* [57]. Uwzględniając powyższe, a także podane w monografii [32] rozważania dotyczące nazwy rachunku, w niniejszej pracy będzie stosowana nazwa *rachunek niecałkowitego rzędu*.

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu był rozwijany głównie w XIX wieku. Jego podstawy zostały stworzone przez takich matematyków jak Liouville, Grunwald, Letnikov, Riemann. Pierwsza monografia [31] z zakresu tego rachunku ukazała się w 1974 r. Wzrost zainteresowania zastosowaniem praktycznym rachunku niecałkowitego rzędu nastąpił w drugiej połowie XX wieku. Wynikało to z jego przydatności do konstrukcji dokładniejszych, czyli bliższych rzeczywistym obserwacjom, modeli matematycznych różnorodnych zjawisk fizycznych.

Dotychczas ukazało się wiele prac z zakresu rachunku niecałkowitego rzędu oraz jego zastosowań, np. monografie [13, 25, 26, 31, 32, 33, 41, 42, 48] oraz materiały konferencyjne [59]. Przegląd zastosowań praktycznych tego rachunku jest podany np. w pracach [14, 28, 48]. Według informacji zawartej we wstępie pracy [48], można w niej znaleźć odpowiedź na często zadawane pytanie o obszary zastosowań rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu.

Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu wykorzystuje się na przykład do modelowania: superkondensatorów (o pojemnościach dochodzących do wartości rzędu 5 F) [15, 18, 45, 50, 59], nieskończenie długiego kabla o pomijalnej indukcyjności [14, 25], linii długiej  $R, C$  zasilanej ze źródła napięcia o indukcyjności wewnętrznej  $L$  [51], zjawiska relaksacji dielektryków organicznych [46], zjawiska lepko sprężystości [14, 48], zjawiska dyfuzji [39, 48], procesu nagrzewania oraz przewodzenia ciepła [42, 48], w fizyce cząstek elementarnych [48].

Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu znalazł szerokie zastosowanie w automatyce i robotyce, zarówno w procesie identyfikacji jak i sterowania, patrz np. monografie [13, 32, 33, 41, 42, 48], prace doktorskie [50, 52], materiały konferencyjne [59] oraz prace [17, 28]. Krótka informacja dotycząca wybranych publikacji z zakresu syntezy układów regulacji automatycznej jest podana w punkcie 4 niniejszej pracy.

Nową klasę liniowych ciągłych (i też dyskretnych) układów niecałkowitego rzędu, a mianowicie klasę dodatnich układów 1D i 2D, wprowadzono w pracach prof. T. Kaczorka, np. [20-25]. Podano w nich wiele oryginalnych rezultatów zakresie analizy i syntezy takich układów.

Celem niniejszej pracy jest podanie podstawowych wiadomości z zakresu rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz wybranych jego zastosowań w automatyce i robotyce. W rozważaniach ograniczymy się tylko do układów z czasem ciągłym. Zostaną omówione dwie równoważne sobie definicje różniczko-całek niecałkowitego rzędu, metody opisu ciągłych układów niecałkowitego rzędu, badanie ich stabilności, synteza regulatorów niecałkowitego rzędu, ich modelowanie oraz realizacja praktyczna.

Przedstawienie zagadnień z zakresu analizy i syntezy dyskretnych układów niecałkowitego rzędu wymaga odrębnego opracowania. Tym zagadnieniom jest poświęcona praca doktorska [50] oraz obszerna część monografii [25].

## 2. RÓŻNICZKOWANIE I CAŁKOWANIE NIECAŁKOWITYCH RZĘDÓW

Przy definiowaniu operacji różniczkowania i całkowania niecałkowitych rzędów korzysta się z funkcji gamma oraz z funkcji Mittag-Lefflera.

### 2.1. Funkcja gamma

Funkcja gamma jest uogólnieniem silni dla argumentów rzeczywistych lub zespolonych. Ma ona dwie definicje: w postaci całki oraz w postaci granicy.

Definicje funkcji gamma ( $x$  jest liczbą zespoloną w przypadku ogólnym):

a) w postaci całki (Eulera)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad (1a)$$

b) w postaci granicy

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad (1b)$$

Podstawowe właściwości funkcji  $\Gamma(x)$ :

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  dla  $x$  zespolonego
- $\Gamma(x+1) = x!$  dla  $x$  naturalnego.

Funkcja gamma nie ma miejsc zerowych. Jest nieciągła dla  $x \leq 0$ , zaś dla  $x > 0$  jest ciągła i dodatnia.

## 2.2. Funkcja Mittag-Lefflera

Funkcja Mittag-Lefflera (wprowadzona w 1903 r.) jest uogólnieniem funkcji  $\exp(x)$ .

Jednoparametrową funkcją Mittag-Lefflera zmiennej zespolonej  $x$  nazywa się funkcję

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Dla  $\alpha = 1$  funkcja (2) przyjmuje postać funkcji wykładniczej

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. \quad (3)$$

Dwuparametrowa funkcja Mittag-Lefflera jest określona wzorem

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (4)$$

Dla  $\beta = 1$  ze wzoru (4) otrzymujemy jednoparametrową funkcję Mittag-Lefflera (2).

Transformaty Laplace'a funkcji Mittag-Lefflera (2) [13] ( $L$  jest operatorem przekształcenia Laplace'a):

$$L\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \quad L\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}. \quad (5)$$

## 2.3. Definicje pochodno-całek niecałkowitych rzędów

Oznaczmy przez  ${}_a D_t^\alpha$  operator różniczko-całki, przy czym  $a$  i  $t$  są to granice operacji, zaś  $\alpha \in \mathfrak{R}$  jest rzędem. Operator ten jest zdefiniowany następująco:

$${}_a D_t^\alpha = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \text{ dla } \alpha > 0 \quad \text{oraz} \quad {}_a D_t^\alpha = \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} \text{ dla } \alpha < 0, \quad (6a)$$

przy czym

$${}_a D_t^\alpha = 1 \text{ dla } \alpha = 1 \text{ oraz } {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (6b)$$

Znanych jest kilka definicji pochodno-całek niecałkowitych rzędów, np. [13, 25, 32]. Poniżej omówimy dwie z nich.

**Definicja 1.** (Riemanna-Liouville'a) Pochodno-całką niecałkowitego rzędu  $\alpha > 0$  nazywamy funkcję zdefiniowaną następująco

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-p}} d\tau, \quad (7)$$

gdzie  $\Gamma(\cdot)$  jest funkcją gamma Eulera,  $p$  jest zaś dodatnią liczbą całkowitą spełniającą nierówność  $p-1 < \alpha < p$ . W przypadku szczególnym  $p=1$ , ze wzoru (7) otrzymamy

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (7a)$$

Transformata Laplace'a pochodno-całki Riemanna-Liouville'a (7) przy  $a=0$  ma postać

$$\mathbf{L}\{{}_0 D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^p s^{k-1} f^{(\alpha-k)}(0^+), \quad (8)$$

gdzie  $F(s)$  jest transformatą Laplace'a funkcji  $f(t)$ , tj.  $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$ .

**Definicja 2.** (Caputo) Pochodno-całką niecałkowitego rzędu  $\alpha > 0$  nazywamy funkcję

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(p)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-p}} d\tau, \quad (9)$$

przy czym  $f^{(p)}(t) = (d^p / dt^p) f(t)$ ,  $p-1 < \alpha < p$ . W przypadku szczególnym  $p=1$  ze wzoru (9) mamy

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (9a)$$

Transformata Laplace'a pochodno-całki Caputo (9) przy  $a=0$  ma postać

$$\mathbf{L}\{{}_0 D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^p s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0^+). \quad (10)$$

Wyznaczanie transformaty Laplace'a pochodno-całki Caputo nie wymaga obliczania pochodnych niecałkowitych rzędów funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t=0^+$ , jak ma to miejsce w przypadku pochodno-całki Riemanna-Liouville'a.

Weźmy pod uwagę funkcję  $f(t) = C \cdot 1(t)$ , gdzie  $1(t)$  jest funkcją skoku jednostkowego,  $C$  zaś jest stałą. Ze wzorów (9) i (7) wynika, że pochodno-całka Caputo tej funkcji przy  $\alpha > 0$  jest równa zero, natomiast pochodno-całka Riemanna-Liouville'a jest równa zero tylko dla całkowitych rzędów. Dla rzędów niecałkowitych  $\alpha > 0$  i skończonej dolnej granicy  $a=0$ , ze wzoru (7) otrzymamy

$${}_0 D_t^\alpha [C \cdot 1(t)] = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (11)$$

Ze wzoru (11) wynika, że pochodno-całka Riemanna-Liouville'a rzędu niecałkowitego funkcji stałej jest niezerowa dla dowolnego  $\alpha > 0$  i zawsze dąży ona do zera przy  $t \rightarrow \infty$ .

Pochodno-całki Riemanna-Liouville'a kilku wybranych funkcji dla  $0 < \alpha < 1$  [13]:

- ${}_0 D_t^\alpha \delta(t) = \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ ,  $\delta(t)$  – pseudo-funkcja delta Diraca,
- ${}_0 D_t^\alpha t^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1-\alpha)} t^{v+\alpha}$ ,  $v > -1$ ,
- ${}_0 D_t^\alpha e^{\lambda t} = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$ .

### 3. METODY OPISU CIĄGŁYCH LINIOWYCH UKŁADÓW NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

#### 3.1. Opis za pomocą transmitancji operatorowej

Liniowy stacjonarny ciągły układ dynamiczny rzędu niecałkowitego o jednym wejściu i jednym wyjściu (zwany krótko układem niecałkowitego rzędu) opisuje się równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu o postaci

$$\sum_{i=0}^n a_i D_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D_t^{\beta_k} u(t), \quad (12)$$

gdzie  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$ ,  $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 \geq 0$  są to liczby rzeczywiste,  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) oraz  $b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ ) są to rzeczywiste współczynniki, natomiast  $D_t^{\delta} \equiv {}_0 D_t^{\delta}$  jest pochodno-całką Riemanna-Liouville'a lub Caputo niecałkowitego rzędu  $\delta > 0$ .

Stosując przekształcenie Laplace'a do obu stron równania (12) przy zerowych warunkach początkowych, otrzymamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}. \quad (13)$$

Równanie różniczkowe (12) oraz transmitancja (13) opisują w przypadku ogólnym układy niecałkowitego rzędu niewspółmiernego o funkcji charakterystycznej

$$w(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}. \quad (14)$$

Funkcję (14) nazywa się wielomianem niecałkowitego stopnia lub wielomianem ułamkowym. W przypadku układów niecałkowitego rzędu współmiernego są spełnione warunki

$$\alpha_i = i\alpha \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad \text{oraz} \quad \beta_k = k\alpha \quad (k = 0, 1, \dots, m), \quad (15)$$

przy czym

- jeżeli  $\alpha > 0$  jest liczbą wymierną, tzn.  $\alpha = 1/q$  ( $q$  jest liczbą całkowitą dodatnią), to układ opisany równaniem (12) (transmitancją (13)) nazywamy układem rzędu współmiernego wymiernego,
- jeżeli liczba rzeczywista  $\alpha > 0$  nie jest liczbą wymierną, to rozpatrywany układ nazywamy układem rzędu współmiernego niewymiernego.

W dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać układy (12) rzędu współmiernego wymiernego, o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{b_m s^{m\alpha} + b_{m-1} s^{(m-1)\alpha} + \dots + b_1 s^{\alpha} + b_0}{a_n s^{n\alpha} + a_{n-1} s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_1 s^{\alpha} + a_0}. \quad (16)$$

Stosując w (16) podstawienie  $\lambda = s^{\alpha}$  otrzymamy stowarzyszoną transmitancję operatorową rzędu naturalnego

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0}{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0}. \quad (17)$$

Funkcja charakterystyczna liniowych układów niecałkowitego rzędu współmiernego ma postać

$$w(s) = a_n s^{n\alpha} + a_{n-1} s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0. \quad (18)$$

Z wielomianem charakterystycznym (18) niecałkowitego stopnia jest stowarzyszony wielomian stopnia naturalnego

$$\tilde{w}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad (19)$$

będący mianownikiem transmitancji (17).

Założmy, że wielomian (19) ma jednokrotne miejsca zerowe  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Rozkładając transmitancję (17) na ułamki proste i stosując podstawienie  $\lambda = s^\alpha$ , transmitancję (16) napiszemy w postaci

$$G(s) = K \cdot \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s^\alpha + \lambda_i}, \quad K, A_i \ (i = 1, 2, \dots, n) \text{ - stałe współczynniki.} \quad (20)$$

Z powyższego wynika, że w przypadku jednokrotnych biegunów transmitancji (17) odpowiedź impulsową układu (12) rzędu współmiernego wymiernego oblicza się ze wzoru

$$g(t) = \mathbf{L}^{-1}\{G(s)\} = K \cdot \mathbf{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s^\alpha + \lambda_i}\right\} = K \cdot \sum_{i=1}^n A_i t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha), \quad (21)$$

przy czym

$$E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_i t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \quad (22)$$

jest dwuparametrową funkcją Mittag-Lefflera (4).

Przy wyznaczaniu odwrotnej transformaty Laplace'a w (21) wykorzystano wzór

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda_i}\right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-\lambda_i t^\alpha) \quad (23)$$

dla  $\alpha = \beta$ , wynikający z pierwszego wzoru (5) dla  $a = -\lambda_i$ .

Charakterystyka skokowa tego układu wyraża się wzorem

$$h(t) = \mathbf{L}^{-1}\{G(s)/s\} = K \cdot \mathbf{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s(s^\alpha + \lambda_i)}\right\} = K \sum_{i=1}^n A_i t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_i t^\alpha). \quad (24)$$

Przy wyprowadzaniu (24) wykorzystano wzór (23) dla  $\beta = \alpha + 1$ .

**Przykład 1.** Należy wyznaczyć odpowiedź skokową członu inercyjnego niecałkowitego rzędu opisanego transmitancją

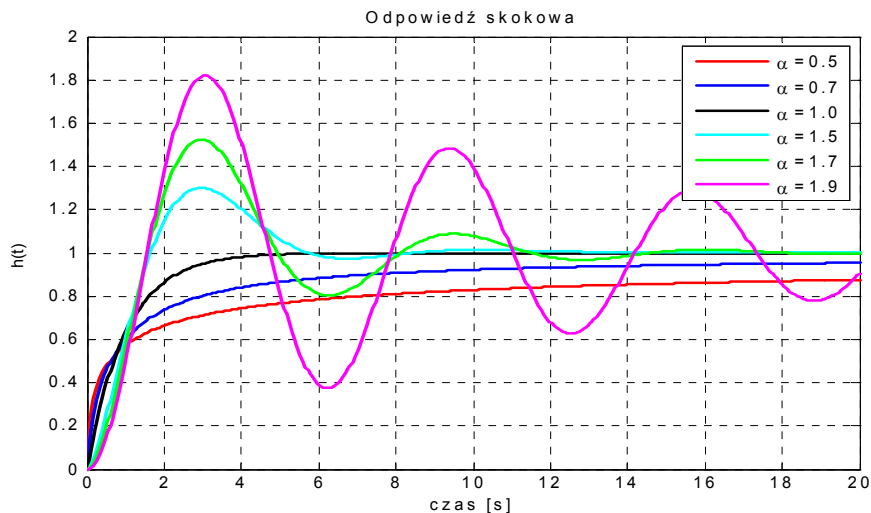
$$G(s) = \frac{k}{s^\alpha T + 1}, \quad k = T = 1, \quad \alpha > 0. \quad (25)$$

Dokonując obliczeń zgodnie ze wzorem (24) otrzymamy

$$h(t) = \mathbf{L}^{-1}\{G(s)/s\} = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha). \quad (26)$$

Odpowiedź skokowa układu (25), wyznaczona ze wzoru (26) dla kilku wartości rzędu  $\alpha > 0$  jest pokazana na rys. 1. Dla  $\alpha \leq 1$  ma ona charakter aperiodyczny, przy czym dla  $\alpha = 1$  jest to charakterystyka klasycznego członu inercyjnego pierwszego rzędu. Natomiast dla  $\alpha > 1$  charakterystyka skokowa ma charakter oscylacyjny, przy czym amplituda oscylacji rośnie wraz ze wzrostem niecałkowitego rzędu  $\alpha$ .

Zauważmy, że człon (25) przy  $\alpha > 1$  zachowuje się jak klasyczny człon oscylacyjny.



Rys. 1. Odpowiedź skokowa układu (25) wyznaczona dla kilku wartości rzędu  $\alpha > 0$

### 3.2. Opis za pomocą równań stanu

Liniowy stacjonarny ciągły układ dynamiczny rzędu niecałkowitego niewspółmiernego opisuje się równaniami stanu o postaci

$${}_0D_t^{\bar{\alpha}}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (27a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (27b)$$

gdzie  ${}_0D_t^{\bar{\alpha}}x(t) = [{}_0D_t^{\alpha_1}x_1(t), \dots, {}_0D_t^{\alpha_n}x_n(t)]^T$ , przy czym  ${}_0D_t^{\alpha_i}x_i(t)$  jest pochodno-całką Riemanna-Liouville'a lub Caputo rzędu  $\alpha_i$ ,  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^p$  oraz  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times p}$ .

W przypadku układów rzędu niecałkowitego współmiernego mamy  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$  i równania (27) można napisać w postaci

$${}_0D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (28a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (28b)$$

gdzie  ${}_0D_t^{\alpha}x(t) = [{}_0D_t^{\alpha}x_1(t), \dots, {}_0D_t^{\alpha}x_n(t)]^T$ . W takim przypadku stosuje się oznaczenie  $(d^{\alpha}/dt^{\alpha})x(t) \equiv {}_0D_t^{\alpha}x(t)$ .

Macierz transmitancji operatorowych układu (28) wyznacza się ze wzoru

$$G(s) = C(Is^{\alpha} - A)^{-1}B + D, \quad I - \text{macierz jednostkowa.} \quad (29)$$

Rozwiązanie równania stanu (28a) ma postać [21, 25]

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad x(0) = x_0, \quad (30)$$

gdzie

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(A t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}. \quad (31)$$

Dla  $\alpha = 1$  zachodzi równość  $\Phi_0(t) = \Phi(t) = e^{At}$ .

Wielomian charakterystyczny układu (28) oraz stowarzyszony z nim wielomian stopnia naturalnego oblicza się ze wzorów

$$w(s) = \det(s^\alpha I - A), \quad \tilde{w}(\lambda) = \det(\lambda I - A), \quad \lambda = s^\alpha. \quad (32)$$

**Przykład 2.** Wyznaczyć odpowiedź na wymuszenie  $u(t) = 1(t)$  układu (28) o niżej podanych macierzach oraz warunku początkowym

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Dokonując obliczeń zgodnie ze wzorami (31), (30) i (28b) otrzymamy

$$\Phi_0(t) = I_2 + \frac{At^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \Phi(t) = I_2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{At^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)},$$

$$y(t) = C \left\{ x_0 + Ax_0 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + B \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + AB \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\} = 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}. \quad (34)$$

We wzorze (34) występuje skończona suma elementów ze względu na fakt, że macierz  $A$  jest nilpotentna, tj.  $A^k = 0$  dla  $k = 2, 3, \dots$

W pracy [21] wprowadzono pojęcie dodatniego układu (28) niecałkowitego rzędu i podano warunek dodatniości.

**Definicja 3.** Układ (28) niecałkowitego rzędu  $0 < \alpha < 1$  nazywamy układem dodatnim, jeżeli zmienne stanu i odpowiedzi tego układu dla każdego  $t \geq 0$  przyjmują wartości nieujemne dla wszystkich nieujemnych wymuszeń i wszystkich nieujemnych warunków początkowych.

**Twierdzenie 1.** Układ (28) niecałkowitego rzędu  $0 < \alpha < 1$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest macierzą Metzlera (wszystkie jej elementy leżące poza główną przekątną są nieujemne) i wszystkie elementy macierzy  $B$ ,  $C$  i  $D$  są nieujemne, tj.

$$A \in M_n, \quad B \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathfrak{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathfrak{R}_+^{p \times m}, \quad (35)$$

gdzie  $M_n$  jest zbiorem macierzy Metzlera o wymiarach  $n \times n$ .

Zauważmy, że układ niecałkowitego rzędu o macierzach (33) jest układem dodatnim.

Dodatnie układy niecałkowitego rzędu (zarówno ciągłe jak i dyskretne) były rozpatrywane w wielu pracach prof. T. Kaczorka. Kilka z nich jest wymienionych w spisie literatury ([21]–[24]). Podsumowaniem aktualnego etapu badań w tym zakresie jest monografia [25].



#### 4. REGULATORY NIECAŁKOWITYCH RZĘDÓW

Pierwszą pracą, w której pokazano możliwość wykorzystania rachunku niecałkowitego rzędu (choć nie stosowano tam terminu *ułamkowy* lub *niecałkowitego rzędu*) w układach ze sprzężeniem zwrotnym, jest praca Bodego [4]. Jednym z zagadnień w niej rozpatrywanych był problem projektowania takiego sprzężenia zwrotnego w układzie ze wzmacniaczem operacyjnym, aby jakość pracy układu zamkniętego nie zależała od wartości wzmocnienia wzmacniacza. Bode pokazał, że rozwiązanie postawionego problemu uzyskuje się wtedy, gdy transmitancja układu otwartego ma postać

$$K(s) = (\omega_c / s)^\alpha, \quad (36)$$

gdzie  $\omega_c$  jest pulsacją odcięcia modułu, tj.  $|K(j\omega_c)|=1$  zaś  $\alpha$  jest liczbą rzeczywistą.

Podstawiając  $s = j\omega$  w (36) i korzystając ze wzoru  $(j\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha \exp(\alpha\pi/2)$  otrzymamy

$$K(j\omega) = \left| \frac{\omega_c}{\omega} \right|^\alpha e^{-j\alpha\pi/2} = \left| \frac{\omega_c}{\omega} \right|^\alpha \left[ \cos \frac{\alpha\pi}{2} - j \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right]. \quad (37)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa (37) jest linią prostą przechodzącą przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej o nachyleniu do osi rzeczywistej pod kątem  $-\alpha\pi/2$ . Dla  $1 < \alpha < 2$  charakterystyka ta leży w trzeciej ćwiartce płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Transmitancja operatorowa (36) opisuje człon różniczkujący niecałkowitego rzędu dla  $\alpha < 0$  zaś dla  $\alpha > 0$  opisuje ona człon całkujący niecałkowitego rzędu. Transmitancję (36) nazywa się często w literaturze idealną transmitancją Bodego.

Jeżeli  $1 < \alpha < 2$ , to logarytmiczna charakterystyka modułu układu (36) jest linią prostą o nachyleniu  $-20\alpha$  dB/dek zaś logarytmiczna charakterystyka fazy jest linią poziomą o rzędnej równej  $-0,5\alpha\pi$ . Układ zamknięty, którego transmitancji układu otwartego ma postać (36) ma stały zapas fazy  $\Delta\phi = \pi(1-0,5\alpha)$ . Jest on niewrażliwy na zmiany wartości wzmocnienia w układzie otwartym. Szersza analiza rozpatrywanego układu (w tym w dziedzinie czasu) jest podana w pracy [3].

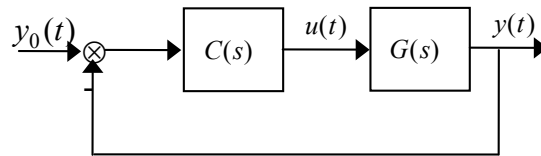
Opisana powyżej właściwość idealnej transmitancji Bodego została wykorzystana w pracach [6, 11, 36] do syntezy układów regulacji z kompensatorami niecałkowitego rzędu. Wykorzystano ją też przy projektowaniu regulatorów typu CRONE (skrót od nazwy w języku francuskim *Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, co oznacza *sterowanie odporne niecałkowitego rzędu*), zaproponowanych w pracy [33]. Aktualnie istnieje już trzecia generacja regulatorów typu CRONE [34, 32].

Idea syntezy regulatora typu CRONE dla znanej transmitancji obiektu  $G(s)$  polega na wyznaczeniu fizycznie realizowalnej transmitancji regulatora  $C(s)$  takiej, aby dla wartości pulsacji bliskiej pulsacji odcięcia modułu charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego  $K(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$  miała przebieg podobny do charakterystyki amplitudowo-fazowej członu o transmitancji (36).

Procedura projektowania regulatora typu CRONE drugiej generacji wraz z przykładem jest podana w monografii [32]. Regulator typu CRONE został wykorzystany między innymi w układzie aktywnego zawieszenia samochodu [1, 40, 48, 59].

#### 4.1. Regulatory PID niecałkowitych rzędów

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rys. 2, składający się z obiektu rzędu naturalnego lub niecałkowitego o transmitancji  $G(s)$  oraz regulatora  $C(s)$  rzędu niecałkowitego lub naturalnego.



Rys. 2. Układ regulacji automatycznej

Uogólnienie pojęcia klasycznego regulatora PID na pojęcie regulatora zawierającego integrator niecałkowitego rzędu  $\lambda$  i człon różniczkujący niecałkowitego rzędu  $\mu$ , zostało podane w pracach Podlubnego [41–43]. Zostało tam też pokazane, że regulatory niecałkowitego rzędu zapewniają lepszą jakość regulacji w porównaniu z regulatorami konwencjonalnymi.

Zaproponowany przez Podlubnego idealny regulator PID niecałkowitego rzędu, oznaczany też jako regulator  $PI^\lambda D^\mu$ , opisuje się transmitancją o postaci

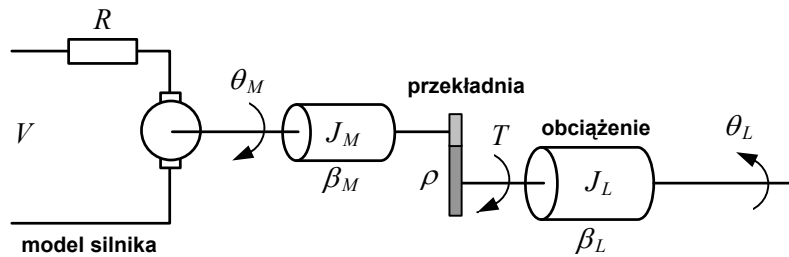
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu, \quad (38)$$

gdzie  $k_p$ ,  $k_i$  i  $k_d$  są to współczynniki wzmocnień części proporcjonalnej, całkującej oraz różniczkującej, odpowiednio, zaś  $\lambda$  oraz  $\mu$  są to liczby rzeczywiste będące niecałkowitymi rzędami całkowania oraz różniczkowania. Zauważmy, że w przypadkach szczególnych (z całkowitymi wartościami rzędów  $\lambda$  i  $\mu$ ) transmitancja (38) opisuje klasyczne regulatory, tj. regulator typu P przy  $\lambda = \mu = 1$ , typu PD przy  $\lambda = 0$  i  $\mu = 1$ , typu PI przy  $\lambda = 1$  i  $\mu = 0$  oraz typu PID przy  $\lambda = \mu = 1$ .

Regulator PID niecałkowitego rzędu ma pięć parametrów wymagających strojenia, tj.  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  oraz  $\lambda$  i  $\mu$ , a więc o dwa więcej niż regulator klasyczny. Pozwala to z jednej strony na uwzględnienie na etapie projektowania większej liczby wymagań projektowych w porównaniu z regulatorami konwencjonalnymi zaś z drugiej strony prowadzi do znacznego utrudnienia tego procesu. Wymagania projektowe mają bowiem postać nieliniowych równań, których rozwiązanie nie jest proste.

Problem doboru nastaw regulatorów PID niecałkowitego rzędu oraz ich zastosowań był rozpatrywany np. w pracach [5, 12, 16, 29, 30, 32, 41, 42, 43, 47, 48, 52, 53, 57, 58, 59].

**Przykład 3.** Weźmy pod uwagę problem regulacji kąta obrotu sprężystego wału obciążenia, który jest obracany przez silnik prądu stałego za pośrednictwem przekładni mechanicznej. Schemat silnika z przekładnią i obciążeniem jest pokazany na rys. 3. Jest to tzw. problem wzorcowy serwomechanizmu położenia w pakiecie oprogramowania Matlab, nazywany jako *DC-motor with elastic shaft*. Sterowaniem jest napięcie zasilające silnik zaś wielkością regulowaną jest kąt obrotu wału, na którym jest zamocowane obciążenie. Model matematyczny tego układu w postaci równań stanu jest podany w [57].



Rys. 3. Schemat silnika z przekładnią i obciążeniem

Przyjmując dane liczbowe jak w [57] i wyznaczając transmitancję operatorową otrzymamy

$$G(s) = \frac{2,5604}{s^4 + 11,2s^3 + 67,809s^2 + 528,7226s}. \quad (39)$$

W pracy [57] (patrz też [12]) dla rozpatrywanego układu regulacji zostały dobrane nastawy regulatorów PID i PI, klasycznych oraz niecałkowitego rzędu. Nastawy dobrano stosując metody optymalizacyjne. Jako kryteria optymalizacji zastosowano minimum całki z modułu uchybu regulacji pomnożonego przez czas (tzw. kryterium ITAE – *Integral of Time-weighted Absolute Error*) oraz minimum całki z kwadratu uchybu (tzw. kryterium ISE – *Integral of Squared Error*).

Otrzymano następujące transmitancje klasycznych regulatorów PID i PI:

- kryterium ITAE

$$C_{PID}(s) = 41,94 + \frac{21,13}{s} - 8,26s; \quad C_{PI}(s) = 107,35 + \frac{0,14}{s}, \quad (40)$$

- kryterium ISE

$$C_{PID}(s) = 110,09 + \frac{10,65}{s} + 30,97s; \quad C_{PI}(s) = 106,82 + \frac{3,36}{s}, \quad (41)$$

oraz transmitancje regulatorów PID i PI niecałkowitego rzędu:

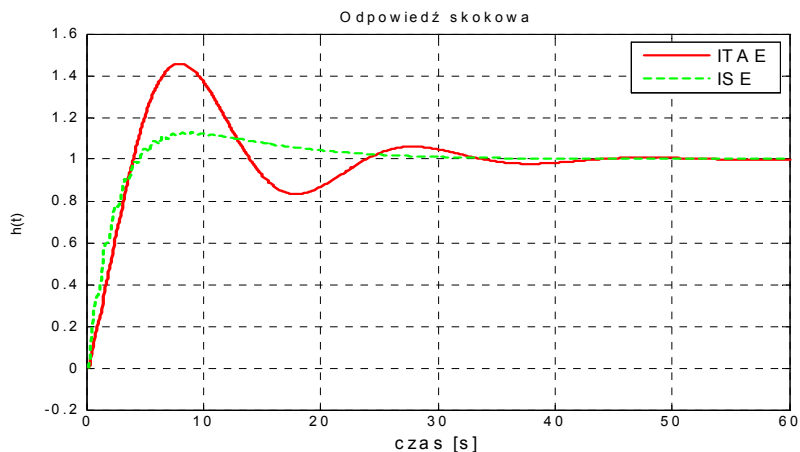
- kryterium ITAE

$$C_{fPID}(s) = 135,12 + \frac{0,01}{s^{0,7}} - 31,6s^{0,6}; \quad C_{fPI}(s) = 39,82 + \frac{72,3}{s^{0,05}}, \quad (42)$$

- kryterium ISE

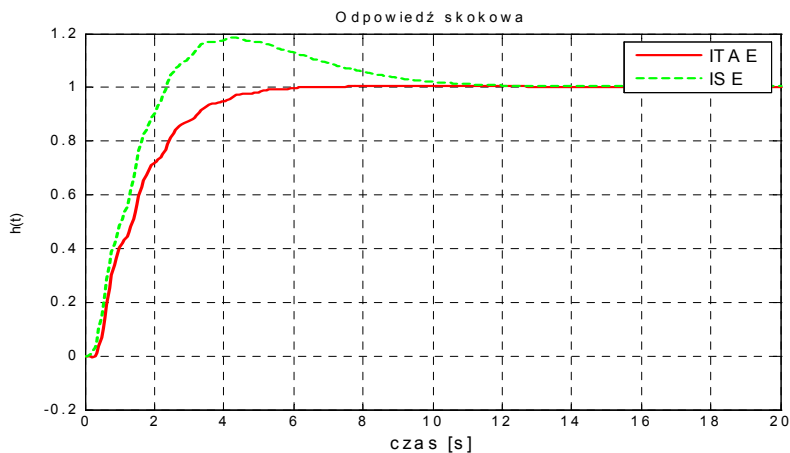
$$C_{fPID}(s) = 61,57 + \frac{91,95}{s^{0,5}} + 2,33s^{0,6}; \quad C_{fPI}(s) = -48,38 + \frac{198,26}{s^{0,2}}. \quad (43)$$

Wartości niecałkowitych rzędów całkowania oraz różniczkowania regulatora PID zostały wyznaczone w ten sposób, że przyjmowano dyskretne wartości  $\lambda$  i  $\mu$  zmieniające się od 0.5 do 1.5 z krokiem 0.1 i dla każdej ustalonej pary tych wartości wyznaczono optymalne nastawy regulatorów według kryterium ITAE oraz oddzielnie ISE, obliczając jednocześnie wartości tych kryteriów. Za optymalne przyjęto nastawy odpowiadające najmniejszym wartościom kryteriów. W przypadku regulatora PI niecałkowity rząd całkowania wyznaczono w ten sam sposób przyjmując wartości  $\lambda$  zmieniające się od 0.05 do 1.9 z krokiem 0.05.

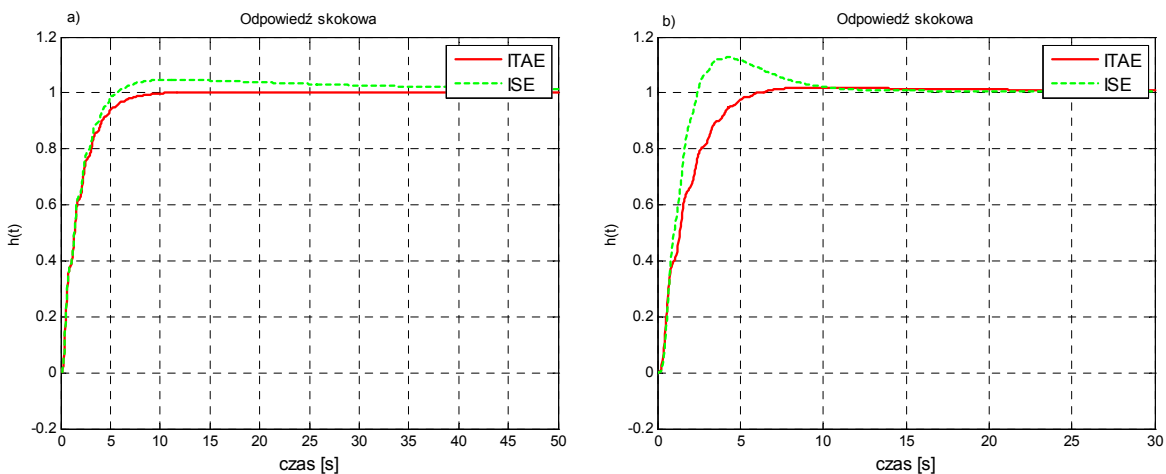


Rys. 4. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z klasycznym regulatorem PID

Odpowiedzi skokowe rozpatrywanego układu regulacji z klasycznym regulatorem PID są pokazane na rysunku 4, z regulatorem PID niecałkowitego rzędu na rysunku 5 zaś z regulatorami PI (klasycznym i niecałkowitego rzędu) na rys. 6.



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z regulatorem PID niecałkowitego rzędu



Rys. 6. Odpowiedzi skokowe układu z regulatorem PI: a) klasycznym, b) niecałkowitego rzędu

Optymalizacyjną metodę doboru nastaw regulatorów PID niecałkowitego rzędu zastosowano też w pracy [30]. Zapewnia ona spełnienie pięciu wymagań projektowych (przy pięciu strojonych parametrach). Tymi wymaganiami są: zadana pulsacja odcięcia modułu, zadany zapas fazy, odporność na zmiany wzmocnienia obiektu, zadane wartości (nie większe) funkcji wrażliwości oraz tłumienia zakłóceń. W pracy [30] podano też metodę samostrojenia regulatorów PID niecałkowitego rzędu i wyniki badań eksperymentalnych w układach z regulatorami o dobranych nastawach.

#### 4.2. Modelowanie układów i regulatorów niecałkowitego rzędu

Transmitancja (13) (i też (16)) układu niecałkowitego rzędu jest funkcją niewymierną zmiennej  $s$ . Z tego powodu nie jest możliwa realizacja tej transmitancji za pomocą układu złożonego z pasywnych elementów  $R, L, C$  czy też z elementów aktywnych i pasywnych, z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego. Nie jest więc też możliwa fizyczna dokładna realizacja członu całkującego niecałkowitego rzędu o transmitancji

$$G(s) = s^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (44)$$

Dokładna realizacja członu (44) jest możliwa tylko w postaci nieskończonego układu drabinkowego złożonego elementów  $R, L, C$  lub w postaci układu wzmacniacza operacyjnego z nieskończonym układem drabinkowym  $R, L, C$  w pętli sprzężenia zwrotnego [13].

Aby móc zrealizować technicznie człon (44) i transmitancje układów niecałkowitego rzędu, dokonuje się najpierw aproksymacji transmitancji (44) za pomocą funkcji wymiernych, a następnie wyznacza się realizację wymiernej transmitancji aproksymującej. Przy wyznaczaniu transmitancji wymiernej stosuje się rozwinięcie transmitancji niewymiernej w ułamek łańcuchowy (i przyjęcie skończonej liczby elementów tego rozwinięcia) oraz metody interpolacyjne. Dokładność aproksymacji zależy od rzędu aproksymującej transmitancji wymiernej.

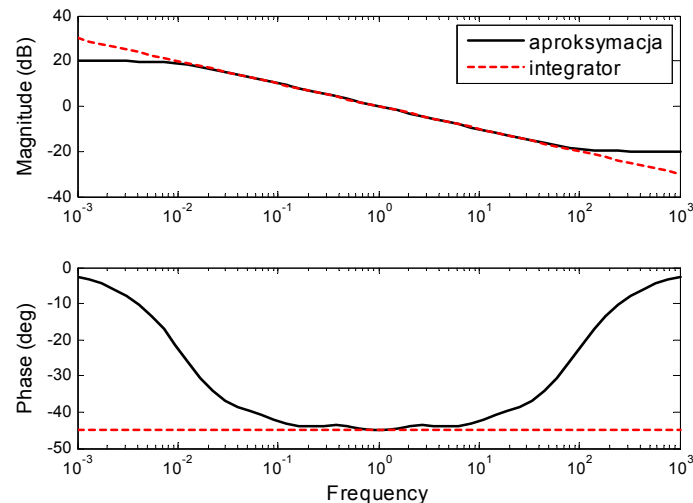
Wyznaczona wymierna transmitancja aproksymująca może być transmitancją opisującą układ całkownego rzędu ciągły lub dyskretny (przy zadanym okresie dyskretyzacji (impulsowania)). W tym ostatnim przypadku z transmitancji dyskretny wynika natychmiast komputerowa metoda realizacji transmitancji aproksymującej człon niecałkowitego rzędu.

Istnieje wiele metod wyznaczania aproksymacji transmitancji niecałkowitego rzędu. Są one opisane w pracach [32, 52, 56].

Zgodnie z pracą [56], transmitancja wymierna rzędu  $n = 5$  aproksymująca transmitancję (44) integratora niecałkowitego rzędu  $\alpha = 0.5$ , wyznaczona metodą Oustaloupa (czasami nazywana metodą CRONE [52]) dla  $\omega \in [0.01, 100]$ , ma postać

$$G_{apr}(s) = \frac{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10}{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}. \quad (45)$$

Celem porównania w dziedzinie częstotliwości transmitancji (44) przy  $\alpha = 0.5$  i transmitancji (45), na rysunku 7 pokazano logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy tych transmitancji.



Rys. 7. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe integratora (44) niecałkowitego rzędu  $\alpha = 0.5$  i członu aproksymującego (45)

Bazując na przedstawionym powyżej postępowaniu, polegającym na wyznaczaniu aproksymującej transmitancji wymiernej, zostały podane realizacje techniczne integratora (44): realizacja przy  $\alpha = 0.5$  pasywna za pomocą układu złożonego z elementów  $R$ ,  $C$  oraz aktywna z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego [27], realizacja aktywna w przypadku ogólnym [54]. Zostały też podane metody realizacji technicznych regulatorów niecałkowitego rzędu: podejście w przypadku ogólnym [44], realizacja z wykorzystaniem sieci neuronowych [2], realizacja z wykorzystaniem programowalnych sterowników logicznych PLC [37] oraz z wykorzystaniem mikroprocesora [38].

## 5. STABILNOŚĆ UKŁADÓW NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

W przypadku ogólnym wielomian charakterystyczny (14) układu niecałkowitego rzędu jest wieloznaczną funkcją zmiennej zespolonej  $s$ , której dziedziną jest powierzchnia Riemanna [32, 35, 55]. Powierzchnia ta ma nieskończoną liczbę liści, przy czym z punktu widzenia stabilności istotny jest liść główny, dla którego jest spełniony warunek  $-\pi < \arg s < \pi$ .

Powierzchnia Riemanna ma skończoną liczbę liści tylko w przypadku wielomianu (18) stopnia współmiernego wymiernego, czyli przy  $\alpha = 1/q$ .

Przy analizie stabilności układu niecałkowitego rzędu (12) stopnia współmiernego (i też niewspółmiernego) istotne są zera jego wielomianu charakterystycznego niecałkowitego stopnia położone na liściu głównym, dla których jest spełniony warunek  $-\pi < \arg s < \pi$ . Zera tego wielomianu położone na pozostałych liściach płaszczyzny Riemanna mają wpływ tylko na te składowe rozwiązania równania (12), które monotonicznie zanikają do zera przy  $t \rightarrow \infty$ , np. [35, 55].

**Twierdzenie 2** [32, 35]. Układ niecałkowitego rzędu współmiernego jest stabilny (w sensie ograniczone wejście - ograniczone wyjście) wtedy i tylko wtedy, gdy jego wielomian charakterystyczny (18) niecałkowitego stopnia jest stabilny, tzn. wszystkie jego zera leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie zespolonej płaszczyzny Riemanna, tj.

$$w(s) \neq 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (47)$$

lub równoważnie, wszystkie zera  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) stowarzyszonego z nim wielomianu  $\tilde{w}(\lambda)$  o postaci (19) spełniają warunek

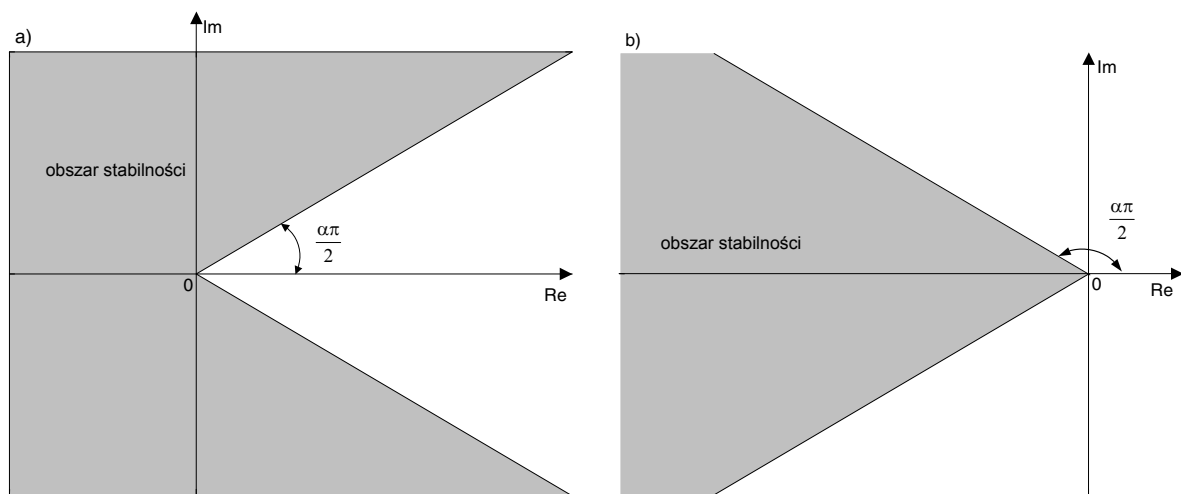
$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

W dalszych rozważaniach stabilność w sensie ograniczone wejście - ograniczone wyjście będziemy nazywać krótko stabilnością.

Jeżeli  $0 < \alpha \leq 1$ , to warunek (48) jest spełniony dla zer leżących w obszarze stabilności pokazanym na rysunku 8a). Obszar ten redukuje się do otwartej lewej półpłaszczyzny przy  $\alpha = 1$ . Jeżeli natomiast  $1 < \alpha < 2$ , to obszarem stabilności jest obszar zaznaczony szarym kolorem na rysunku 8b).

Z twierdzenia 2 wynika, że badanie stabilności układu (12) niecałkowitego rzędu współmiernego przy  $0 < \alpha \leq 1$  można sprowadzić do problemu badania położenia zer wielomianu (19) w obszarze stabilności pokazanym na rysunku 8a). Obszarem tym jest część płaszczyzny zmiennej zespolonej, która nie zawiera stożka o kącie rozwarcia  $\alpha\pi$  położonego w prawej półpłaszczyźnie.

Zauważmy, że rozpatrywany układ niecałkowitego rzędu może być stabilny w przypadku, gdy wielomian (19) naturalnego stopnia nie jest stabilny, tzn. ma zera o dodatniej części rzeczywistej.



Rys. 8. Obszary stabilności wielomianu (18) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\lambda$ : a) dla  $0 < \alpha \leq 1$ ; b) dla  $1 < \alpha < 2$

**Lemat 1.** Układ (12) niecałkowitego rzędu współmiernego przy  $0 < \alpha \leq 1$  jest stabilny, jeżeli wielomian (19) jest asymptotycznie stabilny, tj. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste.

Badanie stabilności układu (12) niecałkowitego rzędu współmiernego metodą bezpośredniego sprawdzania spełnienia warunku (48) dla wszystkich zer wielomianu (19) stopnia naturalnego może być niedogodne ze względu na wysoki stopień tego wielomianu w pewnych przypadkach. Ilustruje to podany poniżej przykład 4.

Metody badania stabilności układów niecałkowitych rzędów są opisane w pracach [32, 35]. W pracach [48, 49] zaproponowano stosowanie LMI do badania stabilności.

Prostą komputerową metodę badania stabilności układów niecałkowitego rzędu współmiernego podano w pracach [10, 8]. Została ona uogólniana dla układów niewspółmiernego rzędu w [7, 8] oraz w pracy [9] dla układów z opóźnieniami rzędu niecałkowitego współmiernego.

Niech

$$\psi(s) = \frac{w(s)}{w_0(s)}, \quad (49)$$

gdzie  $w(s)$  jest wielomianem charakterystycznym układu niecałkowitego rzędu o postaci (18) zaś  $w_0(s)$  jest wielomianem odniesienia niecałkowitego stopnia równego stopniowi wielomianu (18). Będziemy zakładać, że wielomian odniesienia  $w_0(s)$  jest stabilny, tj. spełnia warunek  $w_0(s) \neq 0$  dla  $\operatorname{Re} s \geq 0$ .

Wielomian odniesienia można wybrać np. w postaci  $w_0(s) = d(s+c)^{an}$ , gdzie stałe  $c$  i  $d$  są dodatnie. Można np. przyjąć  $d = a_n$  ( $a_n$  jest współczynnikiem wielomianu (18)) oraz  $c = 1$ . Zauważmy, że dla  $c > 0$  wielomian  $w_0(s)$  jest stabilny, zgodnie z twierdzeniem 2.

**Twierdzenie 3** [10]. Wielomian (18) niecałkowitego stopnia jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{\omega \in (-\infty, \infty)} \arg \psi(j\omega) = 0, \quad (50)$$

gdzie  $\psi(j\omega) = \psi(s)$  dla  $s = j\omega$ .

Warunek (50) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy przy  $\omega$  zmieniającym się od  $-\infty$  do  $\infty$  wykres funkcji  $\psi(j\omega)$  (który można nazwać uogólnionym zmodyfikowanym hodografem Michajłowa) nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego.

Jeżeli wielomian odniesienia ma postać  $w_0(s) = d(s+c)^{an}$  przy  $d = a_n$ , to ze wzorów (18) i (49) mamy

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \psi(j\omega) = 1, \quad \psi(j0) = \frac{a_0}{a_n c^{an}}. \quad (51)$$

Z powyższego i twierdzenia 3 wynika, że wykres funkcji  $\psi(j\omega)$  przy  $\omega \in (-\infty, \infty)$  okrąży początek płaszczyzny zmiennej zespolonej lub przechodzi przez niego, jeżeli  $a_0/a_n \leq 0$ .

Słuszny jest więc poniższy lemat.

**Lemat 2.** Wielomian (18) niecałkowitego stopnia nie jest stabilny jeżeli  $a_0/a_n \leq 0$ .

**Przykład 4** [10]. Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej złożony z obiektu o transmitancji  $G(s) = 1/D_0(s)$ , gdzie [41, 58]

$$D_0(s) = 0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1 \quad (52)$$

i regulatora PD niecałkowitego rzędu o transmitancji



$$C(s) = 20.5 + 3.7343s^{1.15}. \quad (53)$$

Wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji ma postać

$$w(s) = D_0(s) + C(s) = 0.8s^{2.2} + 3.7343s^{1.15} + 0.5s^{0.9} + 21.5. \quad (54)$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 układ zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian (54) nie ma zer w prawej domkniętej półpłaszczyźnie zespolonej płaszczyzny Riemanna, tj.  $w(s) \neq 0$  dla  $\operatorname{Re} s \geq 0$ .

Stosując w (54) podstawienia  $\alpha = 1/20$  oraz  $\lambda = s^\alpha = s^{1/20}$  otrzymamy stowarzyszony wielomian naturalnego stopnia

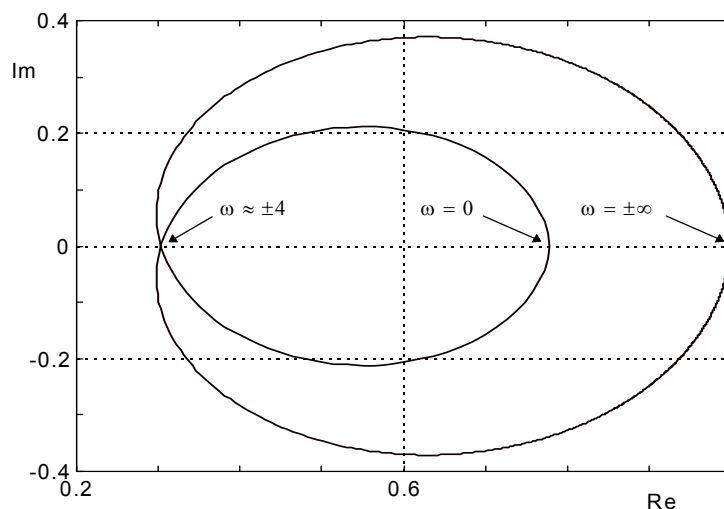
$$\tilde{w}(\lambda) = 0.8\lambda^{44} + 3.7343\lambda^{23} + 0.5\lambda^{18} + 21.5. \quad (55)$$

Zauważmy, że wielomian (55) jest 44 stopnia i tylko cztery niezerowe wyrazy.

Rozpatrywany układ jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera wielomianu (55) leżą w obszarze pokazanym na rysunku 8a) przy  $\alpha = 1/20$  (wtedy  $\alpha\pi/2 = \pi/40$ ).

Zauważmy, że dla wielomianu (55) nie jest spełniony warunek konieczny Hurwitza, zgodnie z którym wielomian ten może mieć wszystkie zera o ujemnych częściach rzeczywistych tylko wtedy, gdy wszystkie jego współczynniki są niezerowe i mają ten sam znak.

Wykres funkcji  $\psi(j\omega) = w(j\omega)/w_0(j\omega)$ , gdzie  $w(s)$  ma postać (54) zaś  $w_0(s) = 0.8(s+5)^{2.2}$  jest wielomianem odniesienia, którego wszystkie zera leżą w obszarze stabilności, jest pokazany na rysunku 9, przy czym  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \psi(j\omega) = 1$ ;  $\psi(j0) = 0.7791$ .



Rys. 9. Wykres funkcji  $\psi(j\omega)$

Z rysunku 9 wynika, że uogólniony zmodyfikowany hodograf Michajłowa  $\psi(j\omega)$  nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani nie przechodzi przez niego, co oznacza zgodnie z twierdzeniem 3, że rozpatrywany układ regulacji niecałkowitego rzędu jest stabilny.

Rozpatrzmy teraz dodatni układ niecałkowitego rzędu opisany równaniami stanu (28) o macierzach spełniających warunki (35).

Z lematu 1 i pracy [19] wynika następujący prosty warunek dostateczny stabilności.

**Twierdzenie 4.** Dodatni układ niecałkowitego rzędu opisany równaniami stanu (28), spełniający warunki (35), jest stabilny dla dowolnego  $0 < \alpha \leq 1$ , jeżeli są dodane wszystkie współczynniki stowarzyszonego wielomianu charakterystycznego

$$\tilde{w}(\lambda) = \det(\lambda I - A). \quad (56)$$

**Dowód.** Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego (56) macierzy Metzlera  $A$  są dodatnie, to wszystkie zera tego wielomianu mają ujemne części rzeczywiste [19], a więc dla każdego  $0 < \alpha \leq 1$  leżą w obszarze stabilności pokazanym na rysunku 8a).

**Przykład 5.** Weźmy pod uwagę dodatni układ niecałkowitego rzędu opisany równaniami stanu (28) o macierzach (33).

Dla rozpatrywanego układu warunek twierdzenia 4 nie jest spełniony, bowiem  $\tilde{w}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2$ . Wielomian  $\tilde{w}(\lambda) = \lambda^2$  ma podwójne zero w początku układu współrzędnych. Nie leży ono w obszarze stabilności pokazanym na rysunku 8a) dla dowolnego  $0 < \alpha \leq 1$ , co oznacza, że rozpatrywany układ (podwójny integrator niecałkowitego rzędu  $\alpha$ ) nie jest stabilny.

## 6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano podstawowe wiadomości z zakresu rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz wybranych jego zastosowań w automatyce i robotyce. W rozważaniach ograniczono się do układów z czasem ciągłym.

Na bazie literatury (w tym własnych publikacji) zostały omówione dwie równoważne sobie definicje różniczko-całek niecałkowitego rzędu (Riemanna-Liouville'a i Caputo) oraz takie zagadnienia, jak: metody opisu ciągłych układów niecałkowitego rzędu (równanie różniczkowe niecałkowitego rzędu, transmitancja operatorowa, równania stanu), badanie stabilności ciągłych układów niecałkowitego rzędu współmiernego, opis i synteza regulatorów niecałkowitego rzędu, ich modelowanie oraz realizacja praktyczna.

Pomocnym narzędziem w procesie analizy i syntezy układów dynamicznych całkowitego rzędu jest pakiet oprogramowania MATLAB/SIMULINK. Z powodzeniem może on być wykorzystywany do częstotliwościowej analizy układów niecałkowitego rzędu. Jednakże do analizy w dziedzinie czasu oraz do wyznaczania wymiernych aproksymacji niewymiernych transmitancji (p. 4.2 niniejszej pracy) niezbędne jest dodatkowe oprogramowanie. Takie oprogramowanie, współpracujące z programami systemu MATLAB, już istnieje.

Do syntezy regulatorów typu CRONE służy *Crone toolbox for Matlab*, opracowany przez tzw. zespół CRONE z University of Bordeaux. Nie jest on bezpośrednio dostępny (wymagany jest jego zakup).

Bezpośrednio dostępne (bezpłatnie) oprogramowanie można znaleźć na stronach internetowych pod niżej podanymi adresami:

<http://people.tuke.sk/igor.podlubny/> - strona I. Podlubnego ([41]–[43])

<http://www.ee.pw.edu.pl/~dsieroci/fsst/fsst.htm> - strona D. Sierociuka [50],

<http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm> - strona D. Valerio [52].

<http://www.pidlab.com/en/home> - zdalne laboratorium sterowania niecałkowitego rzędu (Czechy)

Na stronie D. Valerio jest dostępny *Ninteger toolbox*, opisany w pracy [52].

Do obliczeń i symulacji przeprowadzonych w podanych w niniejszej pracy przykładach oprócz programów pakietu MATLAB/SIMULINK wykorzystano oprogramowanie dostępne na stronach I. Podlubnego i D. Sierociuka (przykład 1) oraz na stronie D. Valerio (przykład 3).

\* \* \*

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

## LITERATURA

1. Altet O, Moreau X., Moze M., Lanusse P., Oustaloup A.: Principles and synthesis of hydractive CRONE suspension. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 33, pp. 435–459.
2. Abbisso S., Caponetto R., Diamante O., Di Cola E., Fortuna L., Porto D.: Realization of a non integer order PID controller. *Proc. European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD'01)*, 2001, pp. I-317 – I-320, Espoo, Finland.
3. Barbosa R. S., Machado J. A., Ferreira I. M.: Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 38, pp. 305-321.
4. Bode H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier*. Van Nostrand, New York 1945.
5. Bouafoura M. K., Braiek N. B.:  $PI^\lambda D^\mu$  controller design for integer and fractional plants using piecewise orthogonal functions. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2010, vol. 15, pp. 1267-1278.
6. Boudjehem B., Boudjehem D., Tebbikh H.: Simple analytical design method for fractional-order controller. *Proc. 3-rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey, 2008 (CD-ROM).
7. Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems. In: K. Malinowski, L. Rutkowski (Eds.): *Recent Advances in Control and Automation*, Academic Publishing House EXIT, Warsaw 2008, 83-92.
8. Busłowicz M., Komputerowe metody badania stabilności liniowych ciągłych układów dynamicznych ułamkowego rzędu. *Mat. V Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej Modelowanie i Symulacja (MIS'08)*, 201-204, Kościelisko 2008.
9. Busłowicz M.: Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type. *Bull. Pol. Acad. of Sci., Techn. Sci.*, 2008, vol. 56, No. 4, pp. 319-324.
10. Busłowicz M.: Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order. *Journal of Automation, Mobile Robots and Intelligent Systems*, vol. 3, 2009. pp 15-21.
11. Busłowicz M., Nartowicz T.: Projektowanie regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2/2009, str. 398-405.
12. Chen Y. Q.: Ubiquitous fractional controls. *Proc. Second IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications FDA06*, 2006, Porto, Portugal.

13. Das. S: Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer, Berlin 2008.
14. Debnath L.: Recent applications of fractional calculus to science and engineering. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, vol. 54, pp. 3413-3442.
15. Dzieliński A., Sierociuk D.: Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model. Acta Montanistica Slovakia, 2006, vol. 13. no. 1, pp. 136-145.
16. Feliu-Batlle V., Rivas-Perez R., Castillo-Garcia F. J.: Fractional order controller robust to time delay variations for water distribution in a irrigation main canal pool. Computers and Electronics in Agriculture, 2009, vol. 69, pp. 185-197.
17. Ferreira F.N.M., Machado T.J.A., Cucha B.J: The cooperation of two manipulators with fractional controllers. IEEE Trans. on Computational Cybernetics, 2006.
18. Jesus I. S., Machado J.A.T.: Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes. Nonlinear Dynamics, 2009, vol. 56, pp. 45–55.
19. Kaczorek T.: Dodatnie układu jedno- i dwuwymiarowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2002.
20. Kaczorek T.: Reachability of fractional positive continuous-time linear systems. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2008, 527-537 (on CD-ROM).
21. Kaczorek T.: Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2008, vol. 18, no. 2, pp. 223-228.
22. Kaczorek T.: Fractional positive linear systems and electrical circuits. Przegląd Elektrotechniczny, 9/2008, pp. 135-141.
23. Kaczorek T.: Fractional positive linear systems. Proc. 14th Int. Congress of Cybernetics and Systems of WOSC, Wrocław, Poland, 2008, pp. 37-51.
24. Kaczorek T.: Positive 2D fractional linear systems. Int. Journal of Computation and Mathematics in Electrical Engineering (COMPEL), 2009, vol. 28, pp. 341-352.
25. Kaczorek T.: Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
26. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam 2006.
27. Krishna B. T., Reddy K. V. V. S.: Active and Passive Realization of Fractance Device of Order  $\frac{1}{2}$ . Active and Passive Electronic Components, Hindawi Publishing Corporation, 2008, Article ID 369421, pp. 1-5.
28. Machado J. A. T., Silva M. F., Barbosa R. S., Jesus I. S., Reis C. M., Marcos M. G., Galhano A. F.: Some applications of fractional calculus in engineering. Mathematical Problems in Engineering, 2010, ID 639801.
29. Monje C. A., Calderon A. J., Vinagre B. M., Chen Y., Feliu V.: On fractional PI controllers: some tuning rules for robustness to plant uncertainties. Nonlinear Dynamics, 2004, vol. 38, pp. 369-381.
30. Monje C. A., Vinagre B. M., Feliu V., Chen Y.: Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. Control Engineering Practice, 2008, vol. 16, pp. 798-812.

31. Oldham K. B., Spaniel J.: The Fractional Calculus. Academic Press, New York and London 1974.
32. Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
33. Oustaloup A.: La Derivation Non Entiere, Hermes, Paris 1995.
34. Oustaloup A., Sabatier J., Lanusse P., Malti R., Melchior P., Moreau X., Moze M.: An overview of the CRONE approach in system analysis, modeling and identification, observation and control. Proc. 17<sup>th</sup> World Congress IFAC, Soul, Korea, 2008, pp. 14254-14265.
35. Petras I.: Stability of fractional-order systems with rational orders. Institute of Control and Informatization of Production Processes, Technical University of Kosice, Report arXiv:0811.4102v2 [math.DS], Dec. 2008.
36. Petras I.: Fractional – order feedback control of a DC motor. Journal of Electrical Engineering, 2009, vol. 60, no. 3, pp. 117–128.
37. Petras I.: Realization of fractional order controller based on PLC and its utilization to temperature control. Transfer inovácií, 2009, vol. 14, pp. 33-38.
38. Petras I., Grega S., Dorcak L.: Digital fractional order controllers realized by PIC microprocessor: experimental results. Proc. ICCO'2003 Conference, Slovak, pp. 873-876.
39. Pintelon R., Schoukens J., Pauwels L., Van Gheem Els: Diffusion Systems: Stability, Modeling and Identification. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2005, vol. 54, no. 5, pp. 2061-2067.
40. Pommier V., Sabatier J., Lanuse P., Oustaloup A.: Crone control of nonlinear hydraulic actuator. Control Engineering Practice, 2002, vol.10, pp. 391-402.
41. Podlubny I.: Fractional order systems and fractional order controllers. The Academy of Sciences Institute of Experimental Physics, Kosice, Slovak Republic, 1994.
42. Podlubny I.: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego 1999.
43. Podlubny I.: Fractional-order systems and  $PI^\lambda D^\mu$ -controllers. IEEE Trans. Autom. Control, 1999, vol. 44, No. 1, pp. 208-214.
44. Podlubny I., Petras I., Vinagre B. M., O'Leary P., Dorcak L.: Analogue realizations of fractional-order controllers. Nonlinear dynamics, 2002, vol. 29, pp. 281–296.
45. Quintana J. J., Ramos A., Nuez I.: Identification of the fractional impedance of ultracapacitors. Proc. of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (IFAC FDA'06), 2006, Porto, Portugal (CD-ROM).
46. Reyes-Melo M. E., Martinez-Vega J. J., Guerrero-Salazar C. A., Ortiz-Mendez U.: Modeling of relaxation phenomena in organic dielectric materials, applications of differential and integral operators of fractional order. Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 2004, vol. 6, no. 3, pp. 1037-1043.
47. Ruszewski A.: Stability regions of closed loop system with time delay inertial plant of fractional order and fractional order PI controller. Bull. Pol. Acad. of Sci., Techn. Sci., 2008, vol. 56, no. 4, pp. 329-332.

48. Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T. (Eds): *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, London 2007.
49. Sabatier J., Moze M., Farges C.: On stability of fractional order systems. Proc. of 3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (IFAC FDA'08), 2008, Ankara, Turkey (CD-ROM).
50. Sierociuk D.: Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Rozprawa doktorska, Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
51. Trzaska Z.: Fractional-order systems: their properties and applications. *Elektronika* 10/2008, pp. 137-144.
52. Valerio D.: *Fractional Robust Systems Control*. PhD Dissertation, Technical University of Lisbona, 2005.
53. Valerio D., da Costa J. S.: Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules. *Signal Processing*, 2006, vol. 86, pp. 2771-2784.
54. Varshney P., Gupta M., Isweswaran G. S.: New switched capacitor fractional order integrator. *Journal of Active and Passive Electronic Devices*, 2007, vol. 2, pp. 187-197.
55. Vinagre B. M., Monje C. A., Calderon A. J.: Fractional order systems and fractional order control actions. Lecture 3 of IEEE CDC'02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 2002, Las Vegas.
56. Vinagre B. M., Podlubny I., Hernandez A., Feliu V.: Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000, vol. 3, no. 3, pp. 231-248.
57. Xue D., Zhao Ch., Chen Y.-Q.: Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: a case study. Proc. American Control Conference, Minneapolis 2006, USA, pp. 3182-3187.
58. Zhao Ch., Xue D., Chen Y.-Q.: A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plant. Proc. IEEE Intern. Conf. on Mechatronics & Automation, Niagara Falls 2005, Canada, pp. 216-221.
59. Proc. of Tutorial Workshop 2 of IEEE CDC'02: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 2002, Las Vegas. Materiały dostępne pod adresem [http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/cdc02\\_tw2\\_ln.pdf](http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/cdc02_tw2_ln.pdf).