Serworegulator dla klasy ciągłych układów nieliniowych

Jerzy Kurek
Instytut Automatyki i Robotyki Politechniki Warszawskiej

W pracy przedstawiono serworegulator dla klasy nieliniowych ciągłych układów o zmiennych w czasie parametrach z niemierzalnym ograniczonym zakłóceniem. Regulator może być zastosowany do regulacji niepewnych układów liniowych. Do syntezy układu regulacji wykorzystano drugą metodę Lapunowa.

Słowa kluczowe: układ nieliniowy, serworegulator, metoda Lapunowa

Wszędzie spotykamy układy nieliniowe. Zwykle są one sterowane przez liniowe regulatory, a synteza układu regulacji jest oparta na liniowym modelu obiektu regulacji w otoczeniu punktu pracy. W pracy zostanie przedstawiony adaptacyjny algorytm regulacji dla klasy ciągłych nieliniowych obiektów regulacji o parametrach zmiennych w czasie z niemierzalnym ograniczonym zakłóceniem. Syntezę regulatora przeprowadzono na podstawie nieliniowego modelu obiektu regulacji. Do syntezy asymptotycznie stabilnego układu regulacji wykorzystano drugą metodę Lapunowa. Algorytm regulatora oparto na koncepcjach układu regulacji systemów chaotycznych [1, 2, 3].

Sformułowanie problemu

Rozważmy układ opisany następującym nieliniowym modelem o zmiennych w czasie współczynnikach:

$$\dot{x}(t) = f(t,x) + \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) + u(t) \tag{1}$$

gdzie $f(t,x)$ oraz $F_j(t,x)$ są funkcjami nieliniowymi f: $R^n \to R^n$ i F_j: $R^{nj} \to R^n$, $x \in R^n$ jest wektorem stanu układu, $u \in R^n$ jest wektorem sygnałów sterujących, $z_j \in R^{nj}$ oznacza wektory niemierzalnych ograniczonych zakłóceń

$$\left\| z_j(t) \right\| < \zeta_j \tag{2}$$

oraz $\|\cdot\|$ oznacza normę wektorową, np. normę Euklidesowską:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,\ x \in R^n.$$

Rozważany problem można obecnie sformułować następująco: dany jest układ (1) i (2) oraz zadany stan układu $x_r \in R^n$, $x_r \in C^1$, znaleźć regulator taki, że

$$x(t) \to x_r(t) \text{ dla } t \to \infty \tag{3}$$

Rozwiązanie problemu (synteza regulatora)

Rozważmy następujące prawo sterowania

$$\begin{gathered} u(t) = \dot{x}_r(t) - f(t,x) - \alpha e(t) - \sum_{j=1}^{l} \frac{F_j(t,x) F_j^T(t,x) e(t)}{\left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|} \zeta_{uj}(t) \\ \dot{\zeta}_{uj}(t) = \left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|, \quad j = 1,\ldots,l \end{gathered} \tag{4}$$

gdzie e oznacza błąd regulacji, $e(t) = x(t) - x_r(t)$, $\zeta_{uj} \in R$, $j = 1,\ldots,l$, są adaptacyjnymi wzmocnieniami oraz α jest parametrem strojenia, $\alpha > 0$. Następnie można udowodnić twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Prawo sterowania (4) zapewnia dla układu (1) spełnienie warunku (3).

Dowód
Z zależności (1) i (4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t) = f(t,x) + \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) + u(t) - \dot{x}_r(t) \\ &= f(t,x) + \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) + \dot{x}_r(t) - f(t,x) - \alpha e(t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{l} \frac{F_j(t,x) F_j^T(t,x) e(t)}{\left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|} \zeta_{uj}(t) - \dot{x}_r(t) \\ &= \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) - \alpha e(t) - \sum_{j=1}^{l} \frac{F_j(t,x) F_j^T(t,x) e(t)}{\left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|} \zeta_{uj}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Następnie rozważmy funkcję Lapunowa postaci:

$$V(t,x) = \frac{1}{2}\left(e^T(t) e(t) + \sum_{j=1}^{l} e_{\zeta j}^2(t) \right) \tag{6}$$

gdzie: $e_{\zeta j}(t) = \zeta_{uj}(t) - \zeta_j$.

Pochodna funkcji V wzdłuż trajektorii układu zamkniętego (1) – (4) może być wyznaczona następująco:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &= e^T(t) \dot{e}(t) + \sum_{j=1}^{l} e_{\zeta j}(t) \dot{e}_{\zeta j}(t) \\ &= e^T(t) \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) - \alpha e^T(t) e(t) \\ &\quad - e^T(t) \sum_{j=1}^{l} \frac{F_j(t,x) F_j^T(t,x) e(t)}{\left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|} \zeta_{uj}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l} \zeta_{uj}(t) \left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\| - \sum_{j=1}^{l} \zeta_j \left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\| \\ &= e^T(t) \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) - \alpha e^T(t) e(t) - \sum_{j=1}^{l} \frac{\left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|^2}{\left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\|} \zeta_{uj}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l} \zeta_{uj}(t) \left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\| - \sum_{j=1}^{l} \zeta_j \left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\| \\ &= e^T(t) \sum_{i=1}^{l} F_j(t,x) z_j(t) - \alpha e^T(t) e(t) - \sum_{j=1}^{l} \zeta_j \left\| F_j^T(t,x) e(t) \right\| \end{aligned} \tag{7}$$

Z zależności (2) i (4) można łatwo znaleźć:

$$e^T(t)F_j(t,x)z_j(t) < \left\| e^T(t)F_j(t,x) \right\| \zeta_j \tag{8}$$

Tak więc z (7) i (8) znajdujemy:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &< \sum_{j=1}^{l} \left\| F_j^T(t,x)e(t) \right\| \zeta_j - \alpha e^T(t)e(t) - \sum_{j=1}^{l} \zeta_j \left\| F_j^T(t,x)e(t) \right\| \\ &= -\alpha e^T(t)e(t)\end{aligned} \tag{9}$$

Stąd mamy:

$$\dot{V}(t,x) < 0 \quad \text{dla} \quad e(t) \neq 0 \tag{10}$$

Tak więc widać, że wzdłuż trajektorii układu zamkniętego (1) – (4) funkcja V dąży do zera. To implikuje, że:

$$e(t) \to 0 \quad \text{oraz} \quad e_z(t) \to 0 \quad \text{gdy } t \to \infty$$

dla zamkniętego układu regulacji.

Uwagi

1. Odpowiednio dobierając parametr strojeniowy α można sterować szybkością zbieżności błędu regulacji do zera.

2. Przyjmując $F_j(t,x) = g_j(t,x)$ oraz $z_j \in R^n$, $j=1, \ldots, p$, można sterować układem o niepewnych zmiennych w czasie parametrach:

$$\dot{x}(t) = f(t,x) + \Delta_f(t,x) + \sum_{i=p+1}^{l} F_j(t,x)z_j(t) + u(t) \tag{11}$$

gdzie: $\Delta_f(t,x) = \sum_{j=1}^{p} g_j(t,x)z_j(t)$ oraz $\|z_j(t)\| < \zeta_j$.

3. Dla zadanego stanu generowanego przez układ dynamiczny, np.:

$$\dot{x}_r = h(t,x_r) + H(t)x_{rr} \tag{12}$$

gdzie: $x_{rr} \in R^n$ jest ograniczonym, przedziałami ciągłym zadanym sterowaniem, można zamiast (4) wyznaczyć następujący sygnał sterujący:

$$\begin{aligned}u(t) &= h(t,x_r) + H(t)x_{rr} - f(t,x) - \alpha e(t) \\ &- \sum_{j=1}^{l} \frac{F_j(t,x)F_j^T(t,x)e(t)}{\left\| F_j^T(t,x)e(t) \right\|} \zeta_{uj}(t)\end{aligned} \tag{13}$$

□

Uwagi końcowe

Przedstawiono algorytm syntezy serworegulatora dla klasy nieliniowych układów o zmiennych w czasie parametrach z niemierzalnym ograniczonym zakłóceniem. Algorytm jest prosty i pokazuje, jak można wykorzystać drugie twierdzenie Lapunowa o stabilności do syntezy asymptotycznie stabilnego nieliniowego układu regulacji. Jego niekorzystną cechą jest to, że rozważana klasa obiektów regulacji jest raczej ograniczona. Niemniej, przedstawione podejście do syntezy układu regulacji nieliniowej może być wykorzystane w przyszłych pracach badawczych.

Bibliografia

1. Estrada J.L., Duarte-Mermoud M.A., Travieso-Torres J.C., Beltrán N.H.: *Simplified robust adaptive control of a class of time-varying chaotic system*, Compel, vol. 27, No. 2, 511–519, 2008.
2. Li Z., Chen G., Shi S., Han C.: *Robust adaptive tracking control for a class of uncertain chaotic systems*, Physics Letters A, 40–43, 2003.
3. Estrada J., Duarte-Mermoud M.A.: *Simplification of a control methodology for a class of uncertain chaotic systems,* WSEAS Transactions on Electronics, 347–352, 2004. ■

Servocontroller for a class of nonlinear continuous-time system

Servocontroller for a class of nonlinear time-varying continuous-time systems with unmeasurable bounded disturbances is presented. The controller can be also used for control of uncertain nonlinear systems. The second Lyapunov stability theorem has been applied for synthesis of stable control system.

Keywords: nonlinear system, servocontroller, Lyapunov method

prof. dr hab. inż. Jerzy Kurek

Jest profesorem zwyczajnym Politechniki Warszawskiej (PW). W kadencji 2002-2005 był Dziekanem Wydziału Mechatroniki PW. Jest absolwentem Wydziału Mechaniki Precyzyjnej PW (obecnie Wydział Mechatroniki). Jego zainteresowania naukowe dotyczą m.in. wyznaczania nowych algorytmów sterowania, stabilności układów automatyki, wyznaczania modeli neuronowych układów dynamicznych, szczególnie robotów. Jest członkiem Control System Society IEEE, Inc. oraz członkiem Komitetu Automatyki Polskiego Stowarzyszenia Pomiarów Automatyki i Robotyki POLSPAR.

e-mail: *jkurek@mchtr.pw.edu.pl*