

# Aproksymacja modelem inercyjnym I rzędu z opóźnieniem układu inercyjnego n-tego rzędu

Jerzy Kurek

Instytut Automatyki i Robotyki Politechniki Warszawskiej

W pracy pokazano, jak w prosty sposób, bez wyznaczania odpowiedzi skokowej, wyznaczyć analitycznie zastępczy model inercyjny I rzędu z opóźnieniem transportowym dla inercyjnego układu  $n$ -tego rzędu z opóźnieniem na podstawie znajomości jego transmitancji. Metoda może być stosowana przy modelowaniu i projektowaniu układów regulacji cyfrowej, np. przy doborze nastaw regulatora.

**Słowa kluczowe:** układ wieloinercyjny, model zastępczy

Wiele obiektów regulacji w automatyce jest opisywanych modelem wieloinercyjnym, również z opóźnieniem. Jest to model wyższego rzędu, a więc niezbyt wygodny do analizy układu regulacji. Na ogół jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem prostego modelu I rzędu – układu jednoinercyjnego z opóźnieniem. Taki model jest wykorzystywany np. przy doborze nastaw regulatora PID [1]. W standardowych warunkach jest on wyznaczany na podstawie odpowiedzi skokowej, co nie zawsze jest wygodne, gdyż wyznaczenie jej nie zawsze jest możliwe, ponadto może wymagać stosunkowo dużo czasu.

W artykule [3] przedstawiono sposób wyznaczania czasu  $T_{95}$  dla układu wieloinercyjnego bez wyznaczania odpowiedzi skokowej układu. Czas  $T_{95}$  dla układu o charakterze inercyjnym jest w literaturze [1] definiowany jako czas, po którym wyjście układu  $y$  spełnia warunek  $|y(t) - y_\infty| \leq 0,05y_\infty$ ,  $t > T_{95}$  oraz  $y(t) \rightarrow y_\infty$  gdy  $t \rightarrow \infty$  przy wymuszeniu skokowym. Dla układów rzeczywistych czas  $T_{95}$  wyznacza się na podstawie odpowiedzi skokowej układu. Czas  $T_{95}$  może być wykorzystywany do wyznaczania okresu impulsowania dla układu [1]. Innym parametrem wyznaczanym dla układów o charakterze inercyjnym jest zastępcza stała czasowa wykorzystywana m.in. do doboru nastaw regulatora, np. PID [1, 2]. Jest ona również wyznaczana na podstawie odpowiedzi skokowej układu.

W niniejszej pracy przedstawiono oparty na wynikach prezentowanych w pracy [3] sposób wyznaczania modelu inercyjnego z opóźnieniem w postaci transmitancji dla układu wieloinercyjnego na podstawie jego modelu bez wyznaczania odpowiedzi skokowej.

## Sformułowanie problemu

Dany jest jednowymiarowy układ inercyjny rzędu  $n$  z opóźnieniem opisany transmitancją

$$G_n(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_ns+1)} e^{-T_0s} \quad (1)$$

Należy wyznaczyć model inercyjny I rzędu układu z opóźnieniem transportowym

$$G_m(s) = \frac{1}{T_ms+1} e^{T_{0m}s} \quad (2)$$

na podstawie znajomości transmitancji (1), tak aby odpowiedź skokowa modelu była podobna do odpowiedzi skokowej układu (1) ale bez jej wyznaczania.

## Rozwiązanie problemu

Najpierw rozpatrzmy układ dynamiczny opisany następującą transmitancją

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (3)$$

gdzie:  $T_1 \geq T_2$ .

Zgodnie z [3] dla układu można oszacować czas  $T_{95}$  w następujący sposób:

$$T_{95} \approx 3(T_1 + 0,5T_2) \quad (4)$$

Tak więc układ inercyjny I rzędu opisany transmitancją

$$G_m(s) = \frac{1}{T_ms+1} \quad (5)$$

gdzie:

$$T_m = \frac{1}{3}T_{95} = T_1 + 0,5T_2 \quad (6)$$

ma czas  $T_{95}$  analogiczny jak układ (3).

Na rys. 1 przedstawiono odpowiedzi skokowe układu

$$G_1(s) = \frac{1}{(10s+1)(5s+1)} \quad (7)$$

i modelu

$$G_2(s) = \frac{1}{12,5s+1} \quad (8)$$

którego stałą czasową wyznaczono zgodnie z (6). Widać, że w obu przypadkach czas  $T_{95}$  jest taki sam:  $T_{95} \approx 35$  s. Widać jednak również, że obie odpowiedzi różnią się wyraźnie dla  $t < 30$  s.

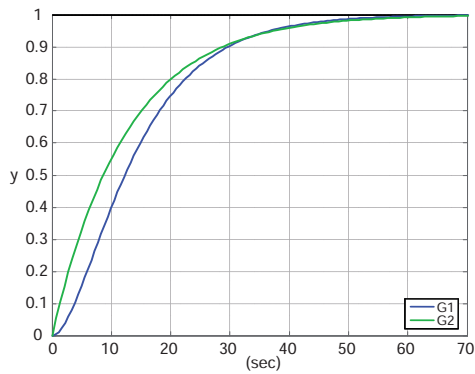
Aby poprawić zgodność odpowiedzi skokowej modelu z układem, uwzględniono w modelu (8) opóźnienie transportowe:

$$G_3(s) = \frac{1}{12,5s+1} e^{-2,5s} \quad (9)$$

W modelu wyznaczono stałą czasową zgodnie z (6), a czas opóźnienia transportowego zgodnie z zależnością:

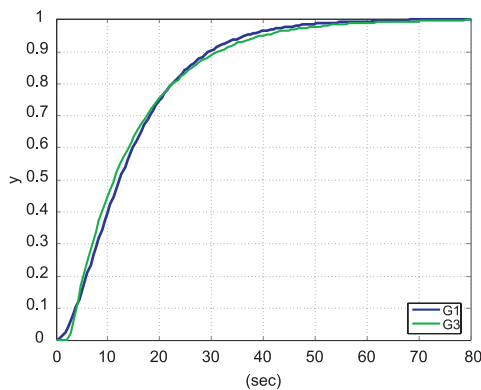
$$T_0 = 0,5T_2 \quad (10)$$

Na rys. 2 przedstawiono odpowiedzi skokowe układu (7) i modelu (9). Widać, że odpowiedzi skokowe obu układów są podobne w całym przedziale  $t$ . Tak więc można przyjąć, że (9) jest dobrym modelem układu (7), lepszym niż (8).



**Rys. 1.** Odpowiedź skokowa układu dynamicznego dwuinercyjnego  $G_1(s)$  i modelu jeduinercyjnego  $G_2(s)$

**Fig. 1.** Step response of the 2<sup>nd</sup> order inertial system  $G_1(s)$  and the 1<sup>st</sup> order inertial system model  $G_2(s)$



**Rys. 2.** Odpowiedź skokowa układu dynamicznego dwuinercyjnego  $G_1(s)$  i modelu jeduinercyjnego z opóźnieniem transportowym  $G_3(s)$

**Fig. 2.** Step response of the 2<sup>nd</sup> order inertial system  $G_1(s)$  and the 1<sup>st</sup> order inertial system model with dead time  $G_3(s)$

Analogicznie, dla układu wieloinercyjnego (1) można iteracyjnie na podstawie (6) oraz (10) łatwo wyznaczyć jeduinercyjny model z opóźnieniem (2):

$$\begin{aligned}
 G_n(s) &= \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_ns+1)} e^{-T_0s} = \\
 &= \frac{k}{T_{m1}s+1} e^{-T_{0m1}s} \frac{1}{(T_3s+1)\dots(T_ns+1)} e^{-T_0s} = \\
 &= \frac{k}{T_{m2}s+1} e^{-T_{0m2}s} \frac{1}{(T_4s+1)\dots(T_ns+1)} e^{-T_0s} = \\
 &= \dots = \frac{k}{T_ms+1} e^{-T_{0m}s}
 \end{aligned}$$

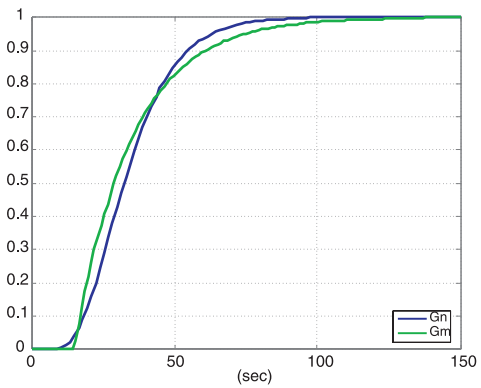
gdzie

$$T_m = 0,5 \left( \max\{T_1, \dots, T_n\} + \sum_{i=1}^n T_i \right) \quad (11)$$

oraz

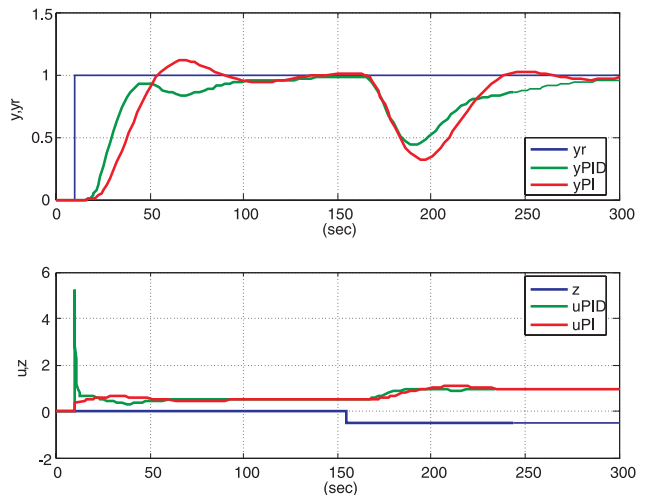
$$T_{0m} = T_0 + 0,5 \left( \sum_{i=1}^n T_i - \max\{T_1, \dots, T_n\} \right) \quad (12)$$

W celu ilustracji przedstawionej metody wyznaczania modelu zastępczego, na rys. 3 przedstawiono odpowiedzi skokowe układu inercyjnego IV rzędu opisanego transmitancją:



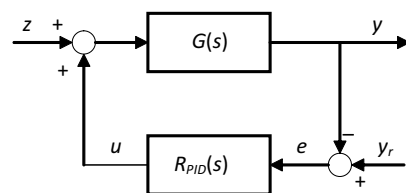
**Rys. 3.** Odpowiedź skokowa układu dynamicznego inercyjnego IV rzędu  $G_n(s)$  i modelu inercyjnego I rzędu z opóźnieniem transportowym  $G_m(s)$

**Fig. 3.** Step response of 4<sup>th</sup> order inertial system  $G_n(s)$  and 1<sup>st</sup> order inertial system model with time delay  $G_m(s)$



**Rys. 4.** Wyniki pracy układu regulacji z regulatorami PID oraz PI

**Fig. 4.** Control system response with PID and PI controller



**Rys. 5.** Schemat układu regulacji

**Fig. 5.** Block diagram of control system

$$G_n(s) = \frac{1}{(10s+1)(8s+1)(6s+1)(4s+1)(2s+1)} e^{-5s} \quad (13)$$

oraz modelu inercyjnego I rzędu z opóźnieniem

$$G_m(s) = \frac{1}{20s+1} e^{15s} \quad (14)$$

którego stałą czasową i czas opóźnienia wyznaczono zgodnie z (11) oraz (12). Widać, że odpowiedzi skokowe obiektu i modelu są podobne. Tak więc model może być akceptowalny w wielu aplikacjach, np. przy syntezy regulatora.

## Przykład

Dobrać nastawy regulatorów PID i PI zapewniające zerowe przeregulowanie ( $\kappa = 0\%$ ) i minimalny czas regulacji dla obiektu regulacji opisanego transmitancją

$$G(s) = \frac{2}{(10s+1)(8s+1)(6s+1)} e^{-7s}$$

Nastawy regulatora dobrano zgodnie z zasadami prezentowanymi w literaturze (np. [4]), na podstawie modelu obiektu regulacji postaci (2)

$$G(s) = \frac{k_m}{T_m s + 1} e^{-T_{0m}s} = \frac{2}{17s+1} e^{-14s}$$

wyznaczonego zgodnie z (11) i (12), uzyskując następujące parametry dla regulatora PID:

$$k_p = 0,95 \frac{T_m}{k_m T_{0m}} = 0,5768, \quad T_I = 2,4 T_{0m} = 33,6 \text{ [s]}, \\ T_D = 0,4 T_{0m} = 5,6 \text{ [s]}$$

oraz dla regulatora PI:

$$k_p = 0,6 \frac{T_m}{k_m T_{0m}} = 0,3643, \quad T_I = 0,8 T_{0m} = 19,7 \text{ [s]}$$

Na rys. 4 przedstawiono wyniki pracy układu regulacji o strukturze z rys. 5, gdzie  $z$  oznacza niemierzalne zakłócenie i  $y_r$  sygnał zadany, wzmocnienie dynamiczne regulatora PID jest równe 8. Widać, że regulator PI zapewnia przeregulowanie  $\kappa = 0\%$ , a regulator PID nie, ale uzyskane przeregulowanie jest niewielkie.

## Podsumowanie

Przedstawiona metoda wyznaczania modelu inercyjnego I rzędu z opóźnieniem transportowym dla układu inercyjnego  $n$ -tego rzędu nie jest zbyt dokładna, ale za to bardzo prosta. Może być wykorzystywana w pracach przy modelowaniu i projektowaniu układów regulacji cyfrowej, np. przy doborze okresu próbkowania oraz doborze nastaw regulatora; może być również wykorzystana w procesie dydaktycznym.

## Bibliografia

1. Iserman R.: *Digital Control Systems*. vol. I: Fundamentals, Deterministic Control, Springer-Verlag, Berlin 1989.
2. Niederliński A.: *Systemy komputerowe automatyki przemysłowej*. t. 2: Zastosowania, WNT, Warszawa 1985.
3. Kurek J.: *Oszacowanie czasu  $T_{95}$  dla układu wieloinercyjnego*. Materiały XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Zielona Góra 2002, 169–170.
4. Findeisen W. (ed.): *Poradnik Inżyniera Automatyka*. WNT, Warszawa 1973. ■

## Approximation of inertial model with time delay for $n$ th order inertial systems

There is presented simple method for calculation of inertial model with time delay for  $n^{\text{th}}$  order inertial system with time delay described by the transfer function without calculation of

the system step response. The method can be used for modeling and calculation of the control systems, e.g. for calculation of controller settings.

**Keywords:** multiinertial system, inertial system model

### prof. dr hab. inż. Jerzy Kurek

Jest profesorem zwyczajnym Politechniki Warszawskiej (PW). W kadencji 2002-2005 był Dziekanem Wydziału Mechatroniki PW. Jest absolwentem Wydziału Mechaniki Precyzyjnej PW (obecnie Wydział Mechatroniki). Jego zainteresowania naukowe dotyczą m.in. wyznaczania nowych algorytmów sterowania, stabilności układów automatyki, wyznaczania modeli neuronowych układów dynamicznych, szczególnie robotów. Jest członkiem Control System Society IEEE, Inc. oraz członkiem Komitetu Automatyki Polskiego Stowarzyszenia Pomiarów Automatyki i Robotyki POLSPAR.



e-mail: [jkurek@mchtr.pw.edu.pl](mailto:jkurek@mchtr.pw.edu.pl)