

# Generowanie trajektorii minimalno-czasowych robota eksperymentalnego

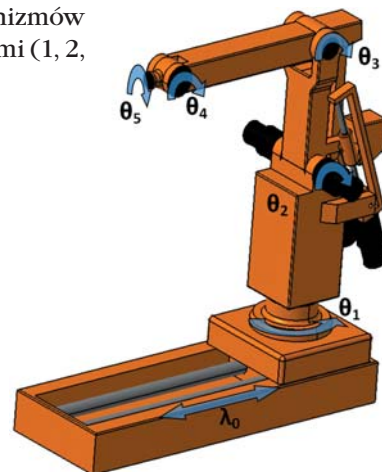
► Marcin Lubiński

Artykuł prezentuje trzecią część pracy poświęconej sterowaniu robotem eksperymentalnym z wykorzystaniem systemu wizyjnego. Publikacja przedstawia metodykę generowania trajektorii ruchu napędów w minimalnym czasie. Przeliczenie współrzędnych naturalnych położenia i orientacji efektora na współrzędne naturalne napędów jest pierwszą częścią algorytmu. Następnym etapem jest wygenerowanie trajektorii minimalno-czasowych dla każdego napędu oraz ujednoczenie ich do wartości maksymalnej, która decyduje o czasie zakończenia ruchu. Przedstawiony algorytm ma zastosowanie do robota eksperymentalnego zbudowanego na bazie manipulatora IRb-6 umieszczonego na torze jezdny LP-1, lecz można go stosować w innych robotach o dowolnej liczbie napędów.

**P**lanowanie trajektorii robota o otwartym łańcuchu kinematycznym jest problemem istotnym zarówno ze względu na użytkowanie robota jak i na sterowanie nim. Podczas realizacji dowolnego zadania niezbędne jest sprecyzowanie, w jaki sposób zmieniać położenie wszystkich złączy robota (zarówno liniowych jak i obrotowych), aby wykonać zaplanowane zadanie. Każdy stopień swobody sterowany jest oddzielnie. Z kolei złożenie ruchów wszystkich stopni swobody składa się na ruch efektora. Podejście, które umożliwia niezależny ruch każdego stopnia swobody, nazywane jest ruchem w przestrzeni złączy lub w przestrzeni wewnętrznej. W trakcie generowania trajektorii ruchu, oprócz punktów początkowego i końcowego, należy uwzględnić ograniczenia wynikające z możliwości napędu, takie jak maksymalna prędkość i przyspieszenie. Dodatkowo przebiegi powinny być dostatecznie gładkie, aby wyeliminować ewentualne szarpnięcia. W tym celu kolejne pochodne względem czasu powinny być funkcjami ciągłymi [3]. W dalszej części zaprezentowana zostanie metodyka generowania trajektorii minimalno-czasowych dla robota eksperymentalnego zbudowanego z manipulatora IRb-6 poruszającego się na torze jezdny LP-1. Pokazane zostanie również ujednoczanie czasów ruchów do wartości złącza, które realizuje zadane przemieszczenie w najdłuższym czasie. Pojęcie przebiegów minimalno-czasowych dotyczy trajektorii zadanej w postaci punktów początkowego i końcowego uproszczonych równań dynamiki manipulatora. Uproszczenie polega na przyjęciu prostych zależności momentu napędowego silników w postaci  $M_s = J_s \ddot{q}_s$ , gdzie  $J_s$  jest stałym efektywnym momentem bezwładności napędu, a  $\ddot{q}_s$  – przyspieszeniem kątowym. Artykuł jest kontynuacją problematyki sterowania robotem eksperymentalnym rozpoczętej w PAR 6/2009 [6].

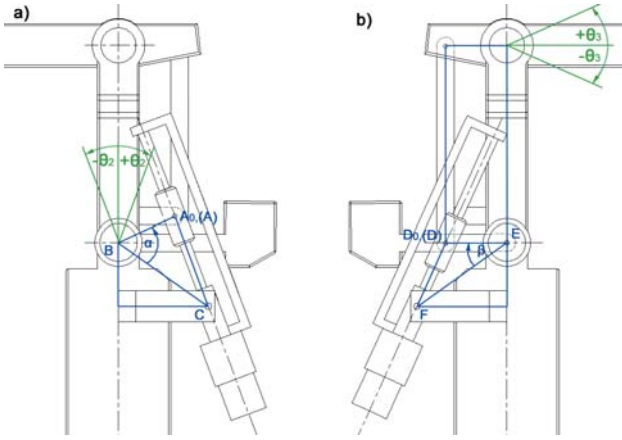
## Przeliczenie współrzędnych położenia i orientacji efektora na współrzędne naturalne serwomechanizmów

Aby wygenerować trajektorię ruchu serwomechanizmów napędowych robota, należy uzyskać wartości początkowe i końcowe ich ruchów. Informacją wyjściową do wyznaczenia ww. wartości jest macierz położenia i orientacji efektora definiująca jednoznacznie pozycję punktu charakterystycznego efektora w przestrzeni kartezjańskiej. Żądane położenia punktu charakterystycznego w trakcie ruchu robota należy sprawdzić pod względem przynależności do przestrzeni roboczej. Wykorzystując zadanie kinematyki odwrotnej omówione w [1], otrzymamy sześć współrzędnych naturalnych członów opisujących pozycję wszystkich złączy ruchomych robota (rys.1). Poszczególne serwomechanizmy przekazują napęd na odpowiednie człony robota poprzez zespoły napędowe. Współrzędne naturalne członów  $\lambda_0, \theta_1 - \theta_5$  powiązane są ze współrzędnymi naturalnymi serwomechanizmów  $\theta_{s0} - \theta_{s5}$  zależnościami (1, 2, 3, 4, 5, 6) [1].



Rys. 1. Robot eksperymentalny ze współrzędnymi naturalnymi członów

► mgr inż. Marcin Lubiński – Instytut Automatyki Politechniki Śląskiej



Rys. 2. Układ zespołu napędowego: a) złącza nr 2, b) złącza nr 3

$$\theta_{s0} = 2\pi \cdot \frac{k_0 \cdot \lambda_0}{h_0} \quad (1)$$

$$\theta_{s1} = k_1 \cdot \theta_1 \quad (2)$$

$$\theta_{s2} = \frac{2\pi}{h_2} \left( A_0C - \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\alpha - \theta_2)} \right) \quad (3)$$

$$\theta_{s3} = \frac{2\pi}{h_3} \left( D_0F - \sqrt{DE^2 + EF^2 - 2DE \cdot EF \cdot \cos(\beta - \theta_2 - \theta_3)} \right) \quad (4)$$

$$\theta_{s4} = k_4 \cdot (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (5)$$

$$\theta_{s5} = k_4 \cdot (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - k_4 \cdot k_5 \cdot \theta_5 \quad (6)$$

Parametry  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_4$  i  $k_5$  są wartościami przełożeń przekładni falowych odpowiednich serwo mechanizmów;  $h_0$ ,  $h_2$  i  $h_3$  są skokami śrub zespołów napędowych złącza nr: 0 – tor jezdny, 2 i 3. Symbole AB, BC i  $A_0C$  występujące we wzorze (3) są stałymi konstrukcyjnymi opisującymi układ położenia serwo mechanizmu i śruby napędowej względem osi obrotu złącza naturalnego nr 2 znajdującego się w punkcie B (rys. 2a). Kąt  $\alpha$  jest kątem zawartym pomiędzy BC i AB dla przypadku gdy złącze  $\theta_2$  znajduje się w pozycji bazowej  $\theta_2 = 0$ . Parametry DE, EF,  $D_0F$  i  $\beta$  zawarte w formule (4) są analogicznymi wartościami do ww., opisującymi układ napędowy złącza obrotowego nr 3 (rys. 2b). Wyprowadzenia i uzasadnienia parametrów występujących w formułach (1–6) można znaleźć w pracach [1] i [4].

Publikacja [1] zawiera również formuły przeciwnie do (1–6) umożliwiające wyznaczenie współrzędnych naturalnych członów na podstawie danych współrzędnych naturalnych serwo mechanizmów. Wzory te umożliwiają określenie położenia i orientacji efektora dla położenia zespołów napędowych odczytanych z enkoderów.

## Generowanie trajektorii minimalno-czasowych

Dla wcześniej wyznaczonych i sprawdzonych współrzędnych naturalnych serwo mechanizmów można rozpocząć generowanie trajektorii. Przebiegi drogi, pręd-

kości i przyspieszenia uzależnione są od drogi SD (7) jaką ma do pokonania napęd [5].

$$SD = qs_k - qs_p \quad (7)$$

$qs_p$  – współrzędna punktu początkowego  
 $qs_k$  – współrzędna punktu końcowego.

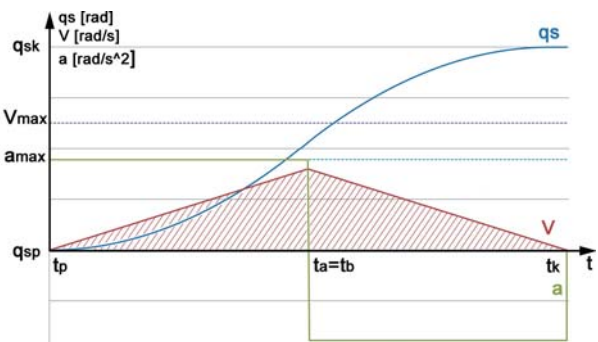
Czasy  $t_a$ ,  $t_b$  i  $t_k$  (rys. 3, 4, 5) uzależnione są od SD, maksymalnej prędkości  $V_{max}$  i maksymalnego przyspieszenia  $a_{max}$  napędu. Droga SD zadawana jest przez użytkownika, maksymalna prędkość uzależniona jest od możliwości napędu, a przyspieszenie (8) wyznaczyć można stosując drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego.

$$a_{max} = \frac{F_{Nmax}}{J_s} \quad (8)$$

$F_{Nmax}$  [Nm] jest momentem siły napędowej, a  $J_s$  [kg\*m<sup>2</sup>] efektywnym momentem bezwładności. Do wyznaczenia maksymalnego przyspieszenia dla poszczególnych złączy napędowych przyjęte zostały graniczne wartości  $F_{Nmax}$  i  $J_s$  przy maksymalnym obciążeniu chwytaka ładunkiem o masie 6 kg [2, 5]. Wyznaczenie czasów zmiany rodzaju ruchu:  $t_a$  – z jednostajnie przyspieszonego na jednostajny,  $t_b$  – z jednostajnego na jednostajnie opóźniony,  $t_k$  – z jednostajnie opóźnionego do całkowitego zatrzymania, wymaga zakwalifikowania do jednego z trzech przypadków. Kwalifikacja odbywa się poprzez porównanie zadanej drogi z polem powierzchni  $S_{WYZN}$  pod wykresem prędkości o trójkątnym kształcie (rys. 4) dla prędkości  $V_{max}$  wyliczanej ze wzoru (9) [5]:

$$S_{WYZN} = \frac{V_{max}^2}{a_{max}} \quad (9)$$

Pierwszy z możliwych przypadków przedstawiający wykres z przebiegami na rys. 3 reprezentuje sytuację dla  $|SD| < S_{WYZN}$ . Jest to sytuacja gdy napęd rozpędzając się z maksymalnym przyspieszeniem  $a_{max}$  osiąga połowę zadanej drogi i rozpoczyna hamowanie przed osiągnięciem prędkości maksymalnej  $V_{max}$ . Wartość czasu końcowego  $t_k$ , w którym odbędzie się ruch napędu, wyznaczyć należy ze wzoru (10). Z racji iż w przypadku tym nie występuje ruch ze stałą maksymalną prędkością, czasy  $t_a$  i  $t_b$  są sobie równe i wynoszą (11)

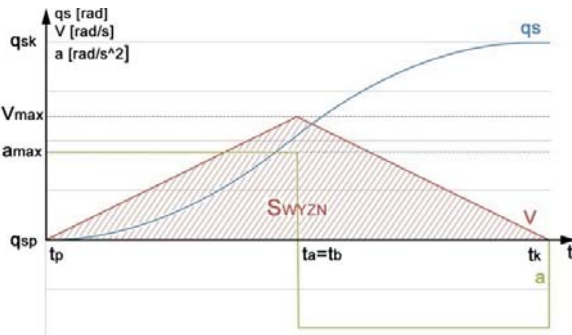


Rys. 3. Przykładowe przebiegi przemieszczenia ( $qs$ ), prędkości ( $V$ ) i przyspieszenia ( $a$ ) dla przypadku  $|SD| < S_{WYZN}$

$$t_k = 2 \cdot \sqrt{\frac{|SD|}{a_{max}}} \quad (10)$$

$$t_a = t_b = \frac{t_k}{2} \quad (11)$$

Drugi z omawianych przypadków reprezentuje sytuację gdy napęd rozpędzając się z maksymalnym przyspieszeniem  $a_{max}$  osiąga połowę zadanej drogi w momencie osiągnięcia prędkości maksymalnej  $V_{max}$ . Po osiągnięciu  $V_{max}$  ruch natychmiast zmienia się z jednostajnie przyspieszonego w jednostajnie opóźniony, zatrzymując się w chwili  $t_k$ , którą oblicza się z zależności (12). Przypadek ten definiuje zależność  $|SD| = S_{WYZN}$ , a zilustrowany został wykresami na rys. 4.



Rys. 4. Przykładowe przebiegi przemieszczenia ( $qs$ ), prędkości ( $V$ ) i przyspieszenia ( $a$ ) dla przypadku  $|SD| = S_{WYZN}$

$$t_k = 2 \cdot \frac{V_{max}}{a_{max}} \quad (12)$$

Tak jak w poprzednim przypadku ruch ze stałą prędkością nie występuje i czas  $t_a$  pokrywa się z czasem  $t_b$ , wyliczyć je należy jako połowę czasu końcowego  $t_k$  (11). Prawdopodobieństwo występowania ww. przypadku jest najmniejsze spośród trzech przedstawianych.

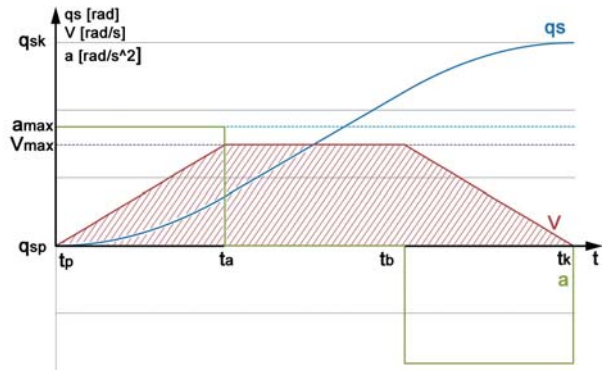
Ostatni omawiany przypadek dotyczy sytuacji, w której napęd po osiągnięciu prędkości  $V_{max}$  pracuje przez pewien okres czasu ( $t_b - t_a$ ) ruchem jednostajnym ze stałą maksymalną prędkością  $V_{max}$ , następnie po osiągnięciu czasu  $t_b$  rozpoczyna hamowanie, które trwa do chwili  $t_k$ , w której następuje zakończenie ruchu i zatrzymanie napędu. Przebiegi czasowe przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia zaprezentowano na rys. 5. Stosunek drogi  $SD$  i pola powierzchni  $S_{WYZN}$  kwalifikujący do prezentowanego przypadku opisuje zależność:  $|SD| > S_{WYZN}$ . Aby wyznaczyć czasy  $t_b$  i  $t_a$  zmian rodzajów ruchu, należy rozwiązać formuły (13) i (14), czas zakończenia ruchu napędu uzyskamy sumując wcześniej wyznaczone czasy (15) [5].

$$t_a = \frac{V_{max}}{a_{max}} \quad (13)$$

$$t_b = \frac{|SD|}{V_{max}} \quad (14)$$

$$t_k = t_a + t_b \quad (15)$$

Dla wyliczonych czasów zmian rodzajów ruchu utworzyć należy trzy przedziały czasowe, w których



Rys. 5. Przykładowe przebiegi przemieszczenia ( $qs$ ), prędkości ( $V$ ) i przyspieszenia ( $a$ ) dla przypadku  $|SD| > S_{WYZN}$

wygenerowane zostaną przebiegi przemieszczenia  $qs$  napędu. Pierwszy przedział czasowy zawiera się w przedziale  $0 \leq t \leq t_a$  i opisuje ruch jednostajnie przyspieszony. Funkcje opisującą zależność położenia od czasu przedstawia wzór (16):

$$qs(t) = qsp + \frac{a_{max} \cdot t^2}{2} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_a \quad (16)$$

Drugi przedział zawierający się pomiędzy  $t_a \leq t \leq t_b$  opisuje ruch jednostajny. Występuje on tylko w przypadku gdy  $t_a \neq t_b$ , w pozostałych przypadkach jest on pomijany. Funkcje położenia od czasu prezentuje zależność (17):

$$qs(t) = qs(t_a) + V(t_a) \cdot (t - t_a) \quad \text{dla } t_a \leq t \leq t_b \quad (17)$$

Ostatni przedział odpowiedzialny za wyhamowanie napędu zawarty jest pomiędzy  $t_b \leq t \leq t_k$ . W tym przedziale odbywa się zakończenie ruchu napędu i prawidłowe jego pozycjonowanie, niezbędne do osiągnięcia wymaganej dokładności. Zależność (18) przedstawia funkcję położenia.

$$qs(t) = qs(t_b) + V(t_b) \cdot (t - t_b) - \frac{a_{max} \cdot (t - t_b)^2}{2} \quad (18)$$

dla  $t_b \leq t \leq t_k$

Przebiegi prędkości  $V$  i przyspieszenia  $a$  można wyznaczyć wyliczając pierwszą i drugą pochodną przemieszczenia  $qs$  względem czasu  $t$ , lub licząc prędkości i przyspieszenia chwilowe w przyjętych odstępach czasowych  $\Delta t$ . Wielkość  $\Delta t$  uzależniona jest od pożądanej przez użytkownika dokładności generowanych przebiegów. Zaprezentowaną metodykę generowania trajektorii minimalno-czasowych należy zastosować oddzielnie dla każdego z  $N$  napędów manipulatora.

## Ujednocianie czasów ruchu wszystkich napędów

Ze względu na różniące się właściwości poszczególnych napędów oraz zakresy zadawanej drogi  $SD$  do pokonania, składającej się na końcowy ruch efektora, każdy napęd realizuje zadane przemieszczenie w innym czasie  $t_{kN}$  ( $N$  - numer kolejnego napędu wystę-



pującego w robocie, dla robota eksperymentalnego  $N=1-6$ ). Najdłuższy przebieg (największa wartość  $t_{kN}$ ) decyduje o efektywnym czasie realizacji zadanej trajektorii. Ponieważ każdy z  $N$  przebiegów wygenerowany został w minimalnym czasie, wykorzystane w nim zostały maksymalne, dostępne wartości przyspieszenia i prędkości co sprzyja szybszemu zużyciu się napędów ze względu na pracę w ekstremalnych warunkach. Zbędne jest, aby każdy napęd realizował swoje zadanie w minimalnym czasie gdyż o końcowym kompletnym przemieszczeniu decyduje przebieg o najdłuższym czasie. Sugerowanym rozwiązaniem jest dopasowanie czasów realizacji ruchu pozostałych napędów do największej wartości  $t_{kN}$ . Zabieg taki pozwoli na płynniejszy ruch efektora, zakończenie ruchów każdego złącza w tym samym momencie oraz mniejsze obciążenie napędów, a co za tym idzie wydłużenie ich żywotności.

Aby wyrównać czasy pracy napędów podczas realizacji zadanej trajektorii należy wybrać spośród wygenerowanych trajektorii minimalno-czasowych najdłuższy czas  $t_{kMAX}$ , do którego będą dostosowywane pozostałe. W przypadku potrzeby dostosowania czasów nie do wartości najdłuższej lecz do wartości większej wynikającej z oddzielnych wymagań jako czas  $t_{kMAX}$  przyjmując należy pożądaną wartość, w którym ma się zakończyć ruch. Następnie należy wyznaczyć wartości korygujące  $kr_N$  czasy dla każdego napędu (19).

$$kr_N = \frac{t_{kMAX}}{t_{kN}} \quad \text{dla } N \in \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \quad (19)$$

Posiadając wartości  $kr_N$  dla każdego napędu wyznaczyć należy nowe wartości czasów zmian rodzajów ruchów  $t_{au}$ ,  $t_{bu}$  i  $t_{ku}$  uwzględniające równoczesne zakończenie pracy wszystkich napędów. W tym celu należy skorzystać z formuł (20):

$$\begin{aligned} t_{auN} &= t_{aN} \cdot kr_N \\ t_{buN} &= t_{bN} \cdot kr_N \\ t_{kuN} &= t_{kN} \cdot kr_N \end{aligned} \quad \text{dla } N \in \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \quad (20)$$

Po tak przeprowadzonych obliczeniach czasy  $t_{kuN}$  dla każdego  $N$  będą sobie równe. Posiadając już wszystkie niezbędne parametry do wygenerowania ujednoczonych przebiegów przemieszczenia  $qs_u$  należy je wyznaczyć stosując funkcje opisane zależnościami (16, 17, 18) zastępując w nich wszystkie czasy, czasami ujednoczonymi (21):

$$\begin{aligned} t_{aN} &= t_{auN} \\ t_{bN} &= t_{buN} \\ t_{kN} &= t_{kuN} \end{aligned} \quad \text{dla } N \in \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \quad (21)$$

Pamiętać należy również o wygenerowaniu nowych przebiegów prędkości  $V_u$  oraz przyspieszenia  $a_u$ . Stosowane we wzorach (19, 20, 21) wartości  $N$  od 1 do 6 odpowiadają 6 napędom występującym w robocie eksperymentalnym oraz generowanym im przebiegom. W przypadku robota o innej liczbie napędów, liczba ta może się dowolnie zmieniać w zależności od wymagań.

## Podsumowanie

Praca w pierwszej części prezentuje przejście ze współrzędnych położenia i orientacji efektora poprzez współrzędne naturalne członów do współrzędnych naturalnych serwomechanizmów napędowych. Przedstawione formuły przeliczenia współrzędnych mają zastosowanie tylko do robota eksperymentalnego. Zaprezentowana w dalszej części pracy metodologia generowania trajektorii ruchu napędów robota eksperymentalnego jest niezbędnym elementem w oprogramowaniu, którego zadaniem jest efektywne sterowanie pracą robota. Metodologię tą z powodzeniem można stosować w dowolnym robocie o dowolnej liczbie napędów. Nie istnieją również przeciwwskazania do wykorzystania jej w celu sterowania pracą napędu w aplikacji nie związanej z robotyką.

Generowanie trajektorii w dwóch etapach, polegające na wyznaczeniu w pierwszej kolejności wszystkich przebiegów minimalno-czasowych, a następnie ujednoczeniu ich do maksymalnej wartości czasu, która decyduje o efektywności pracy wszystkich napędów, z powodzeniem może być stosowane oddzielnie. Użytkownik może zdecydować czy zastosować ujednoczanie, oraz do jakiej wartości. W przypadku jednego napędu ujednoczanie czasu nie będzie występować.

Przedstawiony algorytm został wykorzystany do utworzenia oprogramowania w programie Matlab 6.5 do kompleksowej kontroli nad napędami występującymi w robocie eksperymentalnym. Oprogramowanie to jest jednym z modułów które w połączeniu z pozostałymi takimi jak: sprawdzanie przestrzeni roboczej [6], rozwiązywanie zadania kinematyki odwrotnej oraz modulem odpowiedzialnym za współpracę z systemem wizyjnym, ma na celu autonomiczne sterowanie robotem eksperymentalnym na podstawie informacji wizyjnej. Wszystkie składowe moduły po przetestowaniu będą musiały zostać zaimplementowane w środowisku programowym (C+) robota eksperymentalnego

## Bibliografia

1. Szkodny T.: *Modelowanie i symulacja ruchu manipulatorów robotów przemysłowych*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.
2. Szkodny T.: *Nastawy serwomechanizmów pozycyjnych PID robotów przemysłowych*. Prace Naukowe Elektronika, praca zbiorowa pod red. Pawłowskiego Z. [i in.]. Warszawa 2008, T. II, z. 166, s. 407-418.
3. Kozłowski K., Dutkiewicz P., Wróblewski W.: *Modelowanie i sterowanie robotów*. PWN, Warszawa 2003.
4. Szkodny T.: *Manipulatory robotów przemysłowych Modele matematyczne*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1990.
5. Materiały z wykładu: *Układy napędowe robotów przemysłowych* [źródło niepublikowane], Szkodny T. 2007/2008.
6. Lubiński M.: *Analityczny opis przestrzeni roboczej robota eksperymentalnego*. PAR 06/2009, s. 40-42.