

Zastosowanie analitycznej metody obliczania przedziału rozszerzenia do oceny niepewności pomiaru małych średnic zewnętrznych laserowym przyrządem skanującym

▶ Paweł Fotowicz
Ryszard Jabłoński

Artykuł omawia praktyczne zastosowanie analitycznej metody obliczania niepewności pomiaru. Metoda umożliwia wyznaczanie niepewności zgodnie z przyjętą definicją przedziału rozszerzenia. Wykorzystano ją do analizy wyniku pomiaru uzyskanego przy użyciu laserowego przyrządu skanującego. Przyrządy te należą do kategorii bezstykowych urządzeń pomiarowych wykorzystujących zogniskowaną wiązkę laserową. Na ogół stosuje się je do pomiaru elementów maszynowych, takich jak druty lub włókna. Ich zasada działania polega na pomiarze czasu przesłonięcia wiązki laserowej przemiatanej wzdłuż mierzonego wymiaru. Mierzony obiekt nie ma ustalonej pozycji i może przemieszczać się w trakcie pomiaru w określonym obszarze pomiarowym. Powoduje to powstawanie błędu systematycznego pomiaru. Błąd ten traktowany jest probabilistycznie jako część przedziału rozszerzenia. Jego wartość graniczna została wyznaczona za pomocą analizy matematycznej przeprowadzonej na podstawie poznanych zjawisk związanych z pomiarem, wykorzystując rozwiązania stosowane w dziedzinie optyki laserów.

We współczesnej metrologii zmienia się podejście do sposobu opracowania wyniku pomiaru. Tradycyjna ocena w postaci statystycznej analizy wyników obserwacji zastępowana jest probabilistyczną oceną źródeł niepewności związanych z pomiarem wielkości mierzonej.

Koncepcję probabilistycznego opracowania wyniku pomiaru promuje międzynarodowy dokument [1] wydany w latach 90. ubiegłego stulecia przez siedem najważniejszych organizacji metrologicznych. Koncepcja ta przełamuje pewien, utrzymujący się przez szereg lat, stereotyp myślowy metrologów, polegający na przekonaniu, że wynik pomiaru można jedynie opracować na podstawie danych doświadczalnych, pochodzących wyłącznie z pomiaru, wykorzystując do tego celu znane rozwiązania ze statystyki matematycznej. Wspomniana koncepcja zakłada jednakowe traktowanie, przy opracowaniu wyniku pomiaru, pochodzących z różnych źródeł informacji, szczególnie tych, które nie wynikają z pomiaru, a uzyskane są na podstawie wiarygodnych analiz związanych z opisem procesu pomiarowego. Informacje te zapisywane są w postaci zmiennych losowych, a dalsze ich przetwarzanie odbywa się zgodnie z regułami rachunku probabilistycznego.

W najnowszych opracowaniach, powstających pod auspicjami Międzynarodowego Biura Miar, preferowana jest zasada propagacji rozkładów, polegająca na przedstawianiu wyniku pomiaru w postaci rozkładu prawdopodobieństwa wyznaczonego na podstawie rozkładów wielkości wejściowych poprzez matematyczny model pomiaru wielkości mierzonej [2]. Realizować ją można na drodze symulacji Monte Carlo. Celem takiego działania jest wyznaczenie przedziału rozszerzenia jako miary niepewności wielkości mierzonej. Termin przedział rozszerzenia jest nowym pojęciem w krajowej metrologii, zastosowanym w projekcie normy [3].

Dla ułatwienia obliczeń przedziału rozszerzenia została opracowana metoda analityczna, którą można stosować do liniowego modelu pomiaru, najczęściej wykorzystywanego w pomiarach bezpośrednich [4]. Dokładność obliczeniowa metody jest porównywalna z numeryczną metodą odniesienia (symulacją Monte Carlo), dającą ten sam wynik obliczeniowy przedziału rozszerzenia, gdy niepewność standardową wyznacza się z dwoma cyframi znaczącymi.

Metodę analityczną zastosowano do opracowania wyników pomiaru wykonanych przy użyciu laserowego przyrządu skanującego, nazywanego również skanerem pomiarowym. Przyrządy te wykorzystuje się do bezstykowych pomiarów poprzecznych wymiarów zewnętrznych elementów maszynowych, takich jak wałki, druty czy włókna. Ze względu na bezstykowość, szybkość i częstotliwość pomiaru chętnie stoso-

▶ *dr inż. Paweł Fotowicz – Główny Urząd Miar*
prof. dr hab. inż. Ryszard Jabłoński – Politechnika
Warszawska

wane są w przemyśle, szczególnie na liniach produkcyjnych lub przy kontroli jakości tych elementów, gdyż mierzony obiekt może przemieszczać się w trakcie pomiaru w określonym obszarze pomiarowym. Ich zaletą, z powodu nieskomplikowanej budowy, jest również odporność na zakłócenia i stosunkowo niewysoki koszt wykonania.

Skanery pomiarowe wykonywane były w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Warszawskiej na zamówienie zewnętrznych zlecających z przemysłu krajowego. Podstawowym skonstruowanym urządzeniem był skaner służący do pomiaru średnicy zewnętrznej włókien światłowodowych w zakresie od 50 μm do 200 μm o rozdzielczości pomiaru 1 μm [5].

Przedział rozszerzenia

We współczesnej metrologii wynik pomiaru interpretowany jest jako zbiór możliwych wartości wielkości mierzonej, wyrażony w postaci ich rozkładu prawdopodobieństwa. Miarą tego zbioru jest przedział obejmujący określoną ich ilość, na ogół 95 %. Długość przedziału rozszerzenia definiowana jest jako odległość między dwoma kwantylami rozkładu prawdopodobieństwa, które wyznaczają określone prawdopodobieństwo rozszerzenia, na ogół $p=95\%$ [6]

$$I(y) = [y_{low}, y_{high}] \tag{1}$$

gdzie $y_{low}=G^{-1}(\alpha)$ jest dolną, a $y_{high}=G^{-1}(\alpha+p)$ jest górną granicą przedziału, gdy $G^{-1}(\alpha)$ to kwantyl rzędu α , a $G^{-1}(\alpha+p)$ to kwantyl rzędu $\alpha+p$ rozkładu opisanego dystrybuantą $G(\eta)$. W odniesieniu do klasycznie zapisywanej niepewności rozszerzonej i symetrycznego rozkładu prawdopodobieństwa przedział rozszerzenia można zdefiniować jako

$$I(y)=[\bar{y}-U, \bar{y}+U] \tag{2}$$

Granice przedziału spełniają równanie

$$\int_{\bar{y}-U}^{\bar{y}+U} g(\eta) d\eta = p \tag{3}$$

gdzie $g(\eta)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu związanego z wielkością mierzoną y , \bar{y} jej estymatą, a p prawdopodobieństwem rozszerzenia. Przedział rozszerzenia wyznacza się numerycznie, obliczając wartości funkcji $G^{-1}(\alpha)$ oraz $G^{-1}(\alpha+p)$ dla $\alpha=(1-p)/2$, metodą propagacji rozkładów dla wielkości wejściowych.

Metoda analityczna

Dla liniowych modeli pomiaru, czyli praktycznie dla równań pomiarów bezpośrednich, propagację rozkładów można realizować przy zastosowaniu operacji ich splotu matematycznego, gdy wszystkie wielkości wejściowe traktowane są jako zmienne losowe niezależne. W metodzie analitycznej wykorzystano przybliżenie wyniku operacji splotu matematycznego standardowych rozkładów dla wielkości wejściowych. Mogą nimi

Tab. 1. Wartości współczynnika k_{PN} dla prawdopodobieństwa $p=95\%$ przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5088	1,85	1,6408	1,74	3,1932
1,95	0,6987	1,84	1,7376	1,73	3,4413
1,94	0,8238	1,83	1,8391	1,72	3,7301
1,93	0,9280	1,82	1,9463	1,71	4,0733
1,92	1,0223	1,81	2,0602	1,70	4,4925
1,91	1,1114	1,80	2,1821	1,69	5,0239
1,90	1,1981	1,79	2,3134	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4559	1,67	6,7759
1,88	1,3703	1,77	2,6119	1,66	8,5973
1,87	1,4579	1,76	2,7842	1,65	∞
1,86	1,5478	1,75	2,9763		

być rozkłady: Studenta, normalny czy prostokątny. Wielokrotny splot rozkładów normalnych i prostokątnych można przybliżyć rozkładem P*N, który jest pojedynczym splotem rozkładu prostokątnego z normalnym. Funkcja gęstości tego rozkładu jest zależna od parametru r , będącego ilorazem odchylenia standardowego σ_p i σ_N tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego

$$g_{PN}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} r} \int_{\eta-\sqrt{3}r}^{\eta+\sqrt{3}r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \tag{4}$$

Parametr r rozkładu P*N można przybliżyć ilorazem udziału

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \tag{5}$$

gdzie $u_i(y)=c_i u(x_i)$ to największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym. Niepewność rozszerzoną można wyznaczyć z zależności

$$U = k_{PN} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{t(\nu)}{k_N} u_i(y) \right)^2} \tag{6}$$

gdzie $t(\nu)$ to kwantyl rozkładu Studenta z liczbą stopni swobody ν , k_N to współczynnik rozszerzenia (kwantyl) rozkładu normalnego ($k_N=1,96$ dla $p=95\%$), a k_{PN} to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu P*N. Wartości powyższego współczynnika dla prawdopodobieństwa 95 % zostały przedstawione w tab. 1, w funkcji ilorazu udziału niepewności (5).

Laserowy przyrząd skanujący

Schemat działania laserowego przyrządu skanującego przedstawiony jest na rys. 1. Źródłem promieniowania jest laser He-Ne, emitujący wiązkę o mocy 5 mW. Wiązka przechodzi przez układ formujący zbudowany z dwóch soczewek. Układ tych soczewek spełnia dwie funkcje: filtrującą i formującą. Elementem filtrującym jest mikroprzysłona kołowa zatrzymująca niepożądane

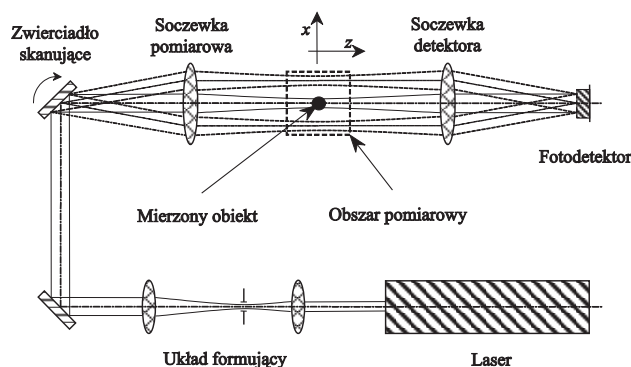
refleksy i odbłaski, przepuszczając jedynie falę propagowaną w trybie podstawowym. Druga funkcja układu jest związana z transformacją wiązki laserowej. Umożliwia takie uformowanie wiązki w przestrzeni pomiarowej, by osiągnąć optymalne parametry metrologiczne (określoną średnicę przy minimalnej rozbieżności). Za układem formującym wiązka skanowana jest przez zwierciadło skanujące. Zwierciadło to nadaje wiązce stabilny ruch kątowy. Soczewka pomiarowa przekształca ruch kątowy wiązki na ruch poprzeczny oraz ogniskuje wiązkę w obszarze pomiarowym, nadając jej właściwą wielkość dopasowaną do zakresu mierzonych wymiarów. Mierzony element umieszczony jest wewnątrz obszaru pomiarowego, w którym może swobodnie przemieszczać się w trakcie pomiaru, zajmując dowolną pozycję w jego obrębie. Przemiatane światło skupiane jest na fotodetektorze przez soczewkę detektora. Układ elektroniczny rejestruje sygnał przesłonięcia i mierzy czas przesłonięcia. Czas ten jest proporcjonalny do wartości mierzonej średnicy.

Błąd systematyczny pomiaru

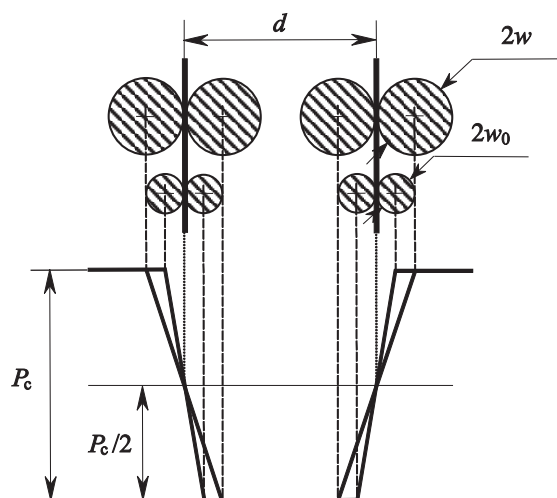
Pomiar średnicy laserowym przyrządem skanującym charakteryzuje się znaczącym błędem systematycznym spowodowanym zmiennym położeniem mierzonego obiektu podczas pomiaru. Błąd ten wywołany jest dwoma zasadniczymi czynnikami, oddziałującymi niezależnie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach przy przemieszczaniu się mierzonego elementu. Pierwszym z nich jest zmiana średnicy wiązki laserowej wzdłuż osi optycznej skanera pomiarowego, a drugim – nieliniowość transformacji ruchu kątowego skanowanego promienia laserowego na ruch poprzeczny wiązki w płaszczyźnie pomiarowej skanera. Pierwsza przyczyna wynika z optycznej natury wiązki gaussowskiej emitowanej przez laser, a druga spowodowana jest przejściem promienia przez soczewkę pomiarową.

Błąd spowodowany przemieszczaniem obiektu wzdłuż osi optycznej

W trakcie przemieszczania mierzonego obiektu w kierunku zgodnym z osią optyczną skanera (kierunek z na rys. 1) zmienia się średnica wiązki laserowej. Średni-



Rys. 1. Schemat działania skanera pomiarowego



Rys. 2. Sygnał detektora przy całkowitym przesłonięciu wiązki przez mierzony obiekt

ca wiązki ma wpływ na stopień przesłonięcia jej przez mierzony przedmiot w trakcie skanowania, powodując określoną zmianę mocy wiązki rejestrowanej przez fotodetektor.

Gdy wiązka jest przesłaniana przez obiekt cylindryczny o średnicy d , to moc jej części przesłoniętej dana jest zależnością

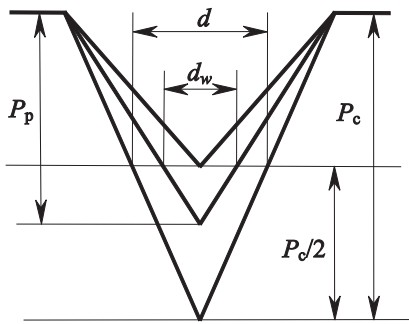
$$P_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_c}{w} \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-2\left(\frac{x}{w}\right)^2\right] dx \quad (7)$$

gdzie P_c jest całkowitą mocą wiązki laserowej, a $2w$ – jej średnicą (rys. 2).

Zmiana średnicy wiązki w stosunku do średnicy mierzonego elementu powoduje zmianę mocy wiązki docierającej do detektora w trakcie skanowania, co ma wpływ na pomiar czasu przesłonięcia. Czas ten mierzony jest w połowie wysokości sygnału przesłonięcia, co odpowiada teoretycznie mierzonej średnicy (rys. 2). Na tej bowiem wysokości przecinają się zbocza sygnałów pochodzących od przesłonięcia przez mierzony element wiązki pomiarowej w różnych jej przekrojach, pod warunkiem że wiązka jest całkowicie przesłaniana. W rzeczywistości wiązki gaussowskie mają nieograniczoną rozciągłość, co powoduje rejestrowanie przez detektor resztkowej mocy nie przesłoniętej, w następstwie czego ulega skróceniu wysokość sygnału przesłonięcia (rys. 3). Zjawisko to w skrajnym przypadku może spowodować, że przyrząd „nie zauważy” mierzonego obiektu. Taka sytuacja może zaistnieć gdy $P_p \leq P_c/2$. Jednakże zdarzeniu takiemu zapobiega właściwy dobór parametrów układu optycznego skanera, dopasowujący średnicę wiązki do zakresu wymiarów mierzonych obiektów [5].

Na skutek przedstawionej wcześniej przyczyny, średnica zmierzona skanerem dana jest zależnością

$$d_w = d \left(2 - \frac{w}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-2\left(\frac{x}{w}\right)^2\right] dx} \right) \quad (8)$$



Rys. 3. Sygnał detektora dla różnych stopni przesłonięcia wiązki przez mierzony obiekt

co powoduje powstanie błędu systematycznego pomiaru przy przemieszczaniu mierzonego obiektu wzdłuż osi optycznej skanera

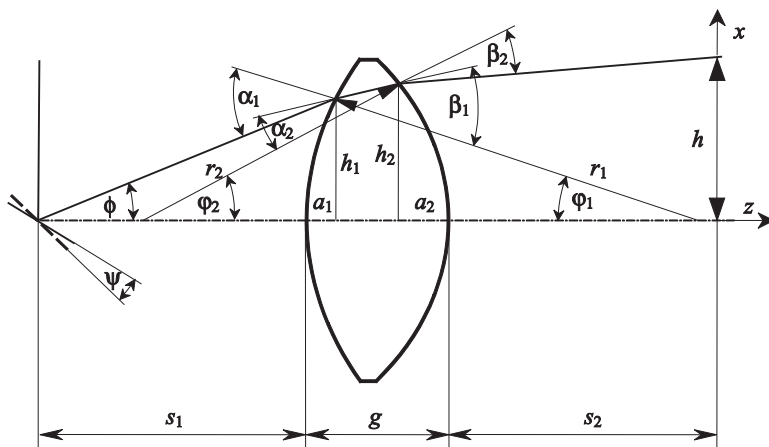
$$e(d_w) = d_w - d = d \left(1 - \frac{w}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-2\left(\frac{x}{w}\right)^2\right] dx} \right) \quad (9)$$

Zależności powyższe mają sens gdy $P_p \geq P_c/2$. Przy przemieszczaniu mierzonego obiektu wzdłuż osi układu optycznego od miejsca przewężenia wiązki, stanowiącego środek obszaru pomiarowego, błąd systematyczny narasta nieliniowo, przyjmując zawsze wartość ujemną, gdyż $d_w \leq d$.

Błąd spowodowany przemieszczaniem obiektu w poprzek osi optycznej

W trakcie przemieszczania mierzonego obiektu w kierunku prostopadłym do osi optycznej skanera (kierunek osi x na rys. 1) zmienia się szybkość skanowania w płaszczyźnie pomiarowej. Położenie promienia światła odbitego od powierzchni zwierciadła skanującego w przestrzeni pomiarowej przedstawia rys. 4.

W wyniku przejścia skanowanego promienia przez soczewkę następuje przemiatanie wiązki laserowej w płaszczyźnie pomiarowej prostopadłej do osi optycznej układu. Jednakowym przyrostom kątowym wiązki,



Rys. 4. Przejście promienia skanującego przez soczewkę pomiarową

na skutek obrotu zwierciadła skanującego, nie towarzyszy jednakowy przyrost drogi przebytej przez promień w płaszczyźnie pomiarowej. Zjawisko to powoduje zmianę prędkości liniowej przemiatania wiązki w płaszczyźnie pomiarowej, przy stałej prędkościątowej zwierciadła skanującego. Czas przesłonięcia obiektu oddalającego się od osi optycznej układu pomiarowego rośnie, powodując powstawanie z tego powodu błędu systematycznego. Czas ten jest miarą mierzonej wielkości, a jego zmiana odczytywana jest przez układ elektroniczny jak zmiana średnicy obiektu. Zachodzi prosta proporcja pomiędzy wielkościami

$$\frac{d_h}{d} = \frac{t_h}{t} = \frac{\Delta\psi_h}{\Delta\psi} \quad (10)$$

gdzie: d_h , t_h i $\Delta\psi_h$ to odpowiednio zmierzona średnica, czas przesłonięcia i zmiana kąta skanowania przy pomiarze średnicy obiektu w odległości h od osi optycznej układu, a d , t i $\Delta\psi$ to odpowiednie wartości tych wielkości, gdy obiekt znajduje się na osi z . Zmianę kąta skanowania przy przejściu promienia skanującego przez obiekt wyznaczają funkcje o niejawniej postaci

$$\Delta\psi_h = \psi_{h_j} - \psi_{h_i} \quad (11)$$

gdzie $\psi_{h_j} = f(h_j, s_1, s_2, n, r_1, r_2, g)$

$$\psi_{h_i} = f(h_i, s_1, s_2, n, r_1, r_2, g)$$

Funkcje powyższe można policzyć numerycznie tak, aby spełnione były zależności: $h_j = h + d/2$ oraz $h_i = h - d/2$. Kąt $\Delta\psi$ wyznacza się dla $h=0$.

Opisane zjawisko powoduje powstawanie błędu systematycznego pomiaru przy przemieszczaniu mierzonego obiektu prostopadle do osi optycznej układu

$$e(d_h) = d_h - d = d \left(\frac{\Delta\psi_h}{\Delta\psi} - 1 \right) \quad (12)$$

Błąd systematyczny narasta nieliniowo wraz z oddalaniem mierzonego obiektu od osi optycznej układu, zawsze przyjmując wartość dodatnią, gdyż $\Delta\psi_h \geq \Delta\psi$.

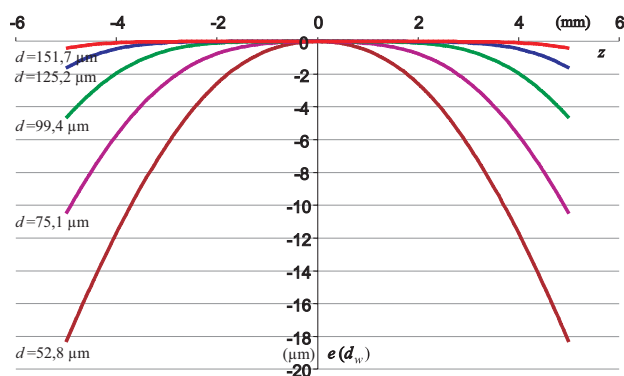
Równanie pomiaru średnicy skanerem

W celu określenia właściwości metrologicznych skanera pomiarowego wykonano pomiary wzorców średnic. W równaniu pomiaru uwzględniono również ich niepewności

$$d = d_z + \delta d_z + \delta d_s + \delta d_w \quad (13)$$

gdzie: d_z - średnica zmierzona skanerem, δd_z - rozdzielczość pomiaru, δd_s - błąd systematyczny pomiaru, δd_w - niedokładność wzorca średnicy.

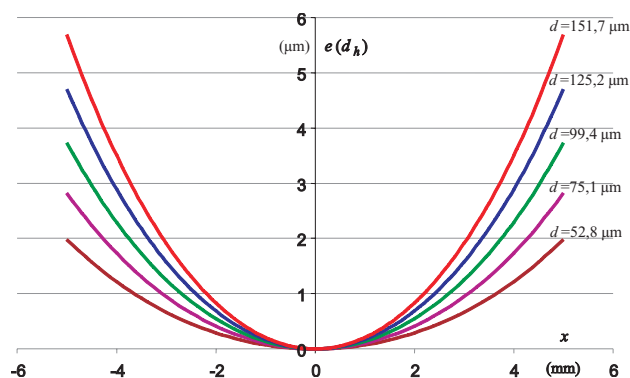
Pierwsza składowa równania pomiaru jest wielkością wejściową, której niepewność wyznaczana jest metodą typu A, czyli



Rys. 5. Błąd systematyczny przy zmianie położenia wzorca wzdłuż osi optycznej

metodą statystyczną na podstawie serii obserwacji. Jej estymatą jest wartość średnia z serii obserwacji, a miarą niepewności standardowej jest odchylenie standardowe eksperymentalne średniej.

Pozostałe składowe są wielkościami wejściowymi, będącymi zmiennymi losowymi centrowanymi, których niepewność wyznacza się metodą typu B, czyli metodą opartą na analizie naukowej i dostępnych źródłach informacji. Rozdzielczości, jak i zrandomizowanemu błędowi systematycznemu przypisuje się rozkład prostokątny. Miarą niedokładności wzorca jest na ogół niepewność rozszerzona wyrażana ze współczynnikiem rozszerzenia $k=2$ dla prawdopodobieństwa około $p=95\%$. Wielkości tej można zatem przypisać rozkład normalny.



Rys. 6. Błąd systematyczny przy zmianie położenia wzorca w poprzek osi optycznej

Teoretyczne wartości błędu systematycznego obliczono dla optymalnych parametrów konstrukcyjnych układu pomiarowego, które zastosowano przy projektowaniu skanerów pomiarowych. Optymalną wiązką laserową okazała się wiązka o średnicy przewężenia $2w_0 = 47 \mu\text{m}$, którą uzyskano przy wykorzystaniu soczewki pomiarowej o ogniskowej $f=50 \text{ mm}$ [5]. Dla takiej wiązki wyznaczono błąd systematyczny pomiaru $e(d_s) = e(d_w)$, powstający przy przemieszczaniu obiektu wzdłuż osi optycznej układu pomiarowego. Wyniki obliczeń dla kilku średnic wzorcowych o wartościach z zakresu pomiarowego laserowego przyrządu skanującego zostały przedstawione na rys. 5. Otrzymało wykresy błędów przy zmianach położenia wzorca średnicy w sto-

unku do środka obszaru pomiarowego. Środek obszaru pomiarowego wyznacza punkt przecięcia płaszczyzny pomiarowej, w której porusza się przewężenie wiązki laserowej, z osią optyczną układu pomiarowego (środek mierzonego obiektu na rys. 1). Błąd systematyczny $e(d_s) = e(d_h)$, powstający przy przemieszczaniu mierzonego obiektu prostopadle do osi układu optycznego, przedstawiają natomiast wykresy na rys. 6.

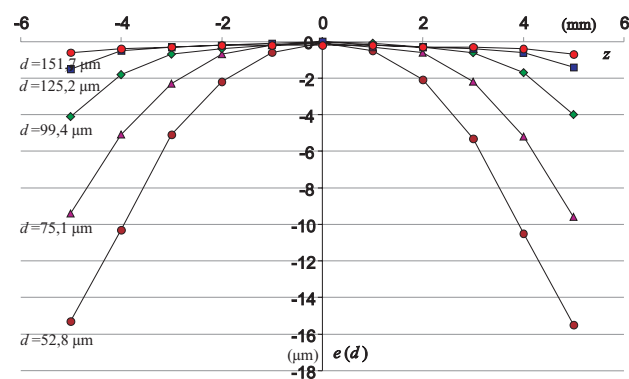
Przeprowadzono pomiary wzorców średnicy i na ich podstawie wyznaczono błędy pomiaru jako różnice pomiędzy wartościami średnimi z serii obserwacji a wartościami reprezentowanymi przez wzorce

$$e(d) = \bar{d}_z - d_w \quad (14)$$

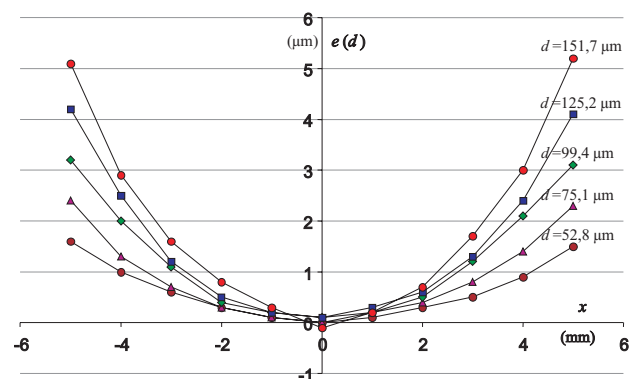
gdzie: \bar{d}_z – średnia serii obserwacji
 d_w – średnica wzorca.

Powyższe błędy są miarami błędów systematycznego pomiaru uzyskanymi na drodze eksperymentalnej. Wzorce przemieszczano wzdłuż i w poprzek osi optycznej układu pomiarowego, wykonując odczyty co 1 mm, odmierzając od środka obszaru pomiarowego. Wartości błędów w postaci graficznej przedstawiają rys. 7 i rys. 8. Rys. 7 pokazuje ich wartości przy przemieszczaniu wzorców wzdłuż osi optycznej, a rys. 8 przy przemieszczaniu wzorców w poprzek osi optycznej.

Wartości błędów systematycznego otrzymanego na podstawie przeprowadzonej analizy metrologicznej są zgodne z wartościami uzyskanymi doświadczalnie.



Rys. 7. Błąd systematyczny przy zmianie położenia wzorców wzdłuż osi optycznej wyznaczony na drodze eksperymentalnej



Rys. 8. Błąd systematyczny przy zmianie położenia wzorców w poprzek osi optycznej wyznaczony na drodze eksperymentalnej

Przedział rozszerzenia dla pomiaru średnic skanerem

Przedziały rozszerzenia dla zmierzonych średnic policzono metodą analityczną, na podstawie równania pomiaru, z zależności

$$U = k_{PN} \sqrt{\left(\frac{t(\nu)}{k_N} u(d_z)\right)^2 + u^2(\delta d_z) + u^2(\delta d_s) + u^2(\delta d_w)} \quad (15)$$

Niepewność standardową pierwszej składowej wyznaczono na podstawie serii obserwacji. W każdym punkcie pomiarowym wykonano serię odczytów $n=10$. Dla wartości średniej, będącej estymatą wyników pomiaru, przyjęto rozkład Studenta z liczbą stopni swobody $\nu=9$. Miarą niepewności tej składowej jest odchylenie standardowe eksperymentalne średniej.

Niepewność standardową drugiej składowej wyznaczono na podstawie rozdzielczości skanera, którym wykonywano pomiary, przyjmując dla niej rozkład prostokątny. Niepewność ta jest niezmienna dla każdego odczytu.

Niepewność standardową trzeciej składowej obliczono na podstawie wartości granicznych, które reprezentują teoretyczne błędy systematyczne $e(d_w)$ i $e(d_h)$, przedstawione graficznie na rys. 5 i rys. 6, przyjmując dla niej rozkład prostokątny. Mierzony obiekt znajduje się wewnątrz obszaru pomiarowego, a jego położenie nie jest znane i może się zmieniać. Należy przyjąć założenie o jednakowym prawdopodobieństwie położenia obiektu w całym obszarze, w którym może odbywać się pomiar.

Niepewność standardową czwartej składowej wyznaczono na podstawie danych literaturowych dotyczących porównań wzorców średnic zewnętrznych w zakresie od 0,05 mm do 0,2 mm. Niepewność takich wzorców można ocenić jako $U=0,15 \mu\text{m}$, przy $k=2$. Składowej tej można przypisać rozkład normalny.

Wyniki obliczeń i pomiarów zestawiono w tab. 2 i tab. 3. Reprezentują je centrowane granice przedziału rozszerzenia $I(d)$ i wartości błędów systematycznego $e(d)$. Granice tych przedziałów wokół estymat mierzonych średnic określono jako: $I(d)=\pm U$. We wszystkich punktach przestrzeni pomiarowej, w których wykonano pomiary i obliczenia, błędy systematyczne

Tab. 2. Przedział rozszerzenia i błąd systematyczny dla wyników pomiaru wzorców wzdłuż osi optycznej skanera

z (mm)	$d=52,8 \mu\text{m}$		$d=75,1 \mu\text{m}$		$d=99,4 \mu\text{m}$		$d=125,2 \mu\text{m}$		$d=151,7 \mu\text{m}$	
	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)
-5	$\pm 17,46$	-15,3	$\pm 10,01$	-9,4	$\pm 4,50$	-4,1	$\pm 1,74$	-1,5	$\pm 0,77$	-0,6
-4	$\pm 11,17$	-10,3	$\pm 5,50$	-5,1	$\pm 2,05$	-1,8	$\pm 0,84$	-0,5	$\pm 0,65$	-0,4
-3	$\pm 6,07$	-5,1	$\pm 2,50$	-2,3	$\pm 0,92$	-0,7	$\pm 0,68$	-0,3	$\pm 0,65$	-0,3
-2	$\pm 2,60$	-2,2	$\pm 1,06$	-0,7	$\pm 0,65$	-0,4	$\pm 0,63$	-0,2	$\pm 0,66$	-0,2
-1	$\pm 0,90$	-0,6	$\pm 0,59$	-0,2	$\pm 0,61$	-0,2	$\pm 0,57$	-0,1	$\pm 0,66$	-0,2
0	$\pm 0,64$	-0,1	$\pm 0,63$	-0,1	$\pm 0,65$	0	$\pm 0,61$	0	$\pm 0,66$	-0,2
1	$\pm 0,92$	-0,5	$\pm 0,63$	-0,3	$\pm 0,64$	-0,1	$\pm 0,63$	-0,2	$\pm 0,66$	-0,2
2	$\pm 2,60$	-2,1	$\pm 1,06$	-0,6	$\pm 0,58$	-0,3	$\pm 0,57$	-0,3	$\pm 0,65$	-0,2
3	$\pm 6,07$	-5,3	$\pm 2,48$	-2,2	$\pm 0,90$	-0,6	$\pm 0,62$	-0,4	$\pm 0,65$	-0,3
4	$\pm 11,17$	-10,5	$\pm 5,49$	-5,2	$\pm 2,05$	-1,7	$\pm 0,85$	-0,6	$\pm 0,65$	-0,4
5	$\pm 17,46$	-15,5	$\pm 10,01$	-9,6	$\pm 4,50$	-4,0	$\pm 1,72$	-1,4	$\pm 0,82$	-0,7

Tab. 3. Przedział rozszerzenia i błąd systematyczny dla wyników pomiaru wzorców w poprzek osi optycznej skanera

x (mm)	$d=52,8 \mu\text{m}$		$d=75,1 \mu\text{m}$		$d=99,4 \mu\text{m}$		$d=125,2 \mu\text{m}$		$d=151,7 \mu\text{m}$	
	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)	$I(d)$ (μm)	$e(d)$ (μm)
-5	$\pm 2,07$	1,6	$\pm 2,82$	2,4	$\pm 3,64$	3,2	$\pm 4,54$	4,2	$\pm 5,45$	5,1
-4	$\pm 1,40$	1,0	$\pm 1,85$	1,3	$\pm 2,35$	2,0	$\pm 2,88$	2,5	$\pm 3,43$	2,9
-3	$\pm 0,99$	0,6	$\pm 1,18$	0,7	$\pm 1,45$	1,1	$\pm 1,72$	1,2	$\pm 2,00$	1,6
-2	$\pm 0,76$	0,3	$\pm 0,82$	0,3	$\pm 0,89$	0,4	$\pm 1,00$	0,5	$\pm 1,12$	0,8
-1	$\pm 0,58$	0,1	$\pm 0,62$	0,1	$\pm 0,67$	0,2	$\pm 0,68$	0,2	$\pm 0,68$	0,3
0	$\pm 0,61$	0	$\pm 0,68$	0	$\pm 0,66$	0,1	$\pm 0,64$	0,1	$\pm 0,65$	-0,1
1	$\pm 0,58$	0,1	$\pm 0,65$	0,2	$\pm 0,67$	0,2	$\pm 0,69$	0,3	$\pm 0,72$	0,2
2	$\pm 0,68$	0,3	$\pm 0,82$	0,4	$\pm 0,87$	0,5	$\pm 0,98$	0,6	$\pm 1,11$	0,7
3	$\pm 0,99$	0,5	$\pm 1,16$	0,8	$\pm 1,45$	1,2	$\pm 1,72$	1,3	$\pm 2,00$	1,7
4	$\pm 1,41$	0,9	$\pm 1,85$	1,4	$\pm 2,35$	2,1	$\pm 2,88$	2,4	$\pm 3,42$	3,0
5	$\pm 2,07$	1,5	$\pm 2,82$	2,3	$\pm 3,64$	3,1	$\pm 4,54$	4,1	$\pm 5,45$	5,2

mieściły się w przedziałach rozszerzenia i nie przekraczały wartości granicznych tych przedziałów.

Podsumowanie

Celem artykułu było przedstawienie praktycznego zastosowania metody analitycznej służącej do opracowania wyniku pomiaru wyrażanego w postaci przedziału rozszerzenia, zgodnie z przyjętymi definicjami zawartymi w najnowszych międzynarodowych, metrologicznych dokumentach dotyczących analizy danych pomiarowych. Metoda jest alternatywna dla zalecanej tam numerycznej metody odniesienia, gdy mamy do czynienia z liniowym lub linearyzowanym modelem pomiaru. Przy czym nie wymaga zastosowania zaawansowanych, specjalistycznych programów komputerowych, a jej dokładność obliczeniowa jest porównywalna z metodą odniesienia, w postaci symulacji Monte Carlo.

Przedmiotem analizy metrologicznej były wyniki uzyskane przy pomiarze średnicy zewnętrznej laserowym przyrządem skanującym. W wyniku pomiaru obok błędu przypadkowego powstaje błąd systematyczny. Główną przyczyną jego powstawania jest przemieszczanie się obiektu mierzonego wewnątrz obszaru pomiarowego, szczególnie gdy mamy do czynienia na przykład z pomiarem dynamicznym wykonywanym w warunkach produkcyjnych. Ponieważ nie jest znane położenie elementu, możliwa jest jego dowolna pozycja w obrębie tego obszaru, z założeniem jednakowego prawdopodobieństwa. Założenie to przyjęto ze względu na brak podstaw do wyróżnienia uprzywilejowanej pozycji mierzonego obiektu wewnątrz tego obszaru. Błąd systematyczny traktowany jest probabilistycznie, jako składowa przedziału rozszerzenia. Jego wartość graniczna została oszacowana na podstawie wykonanej analizy matematycznej, przeprowadzonej w oparciu o znane zjawiska związane z pomiarem, przy wykorzystaniu zasad i rozwiązań z dziedziny optyki laserów [7]. Porównano obliczone wartości graniczne z wartościami błędu systematycznego, otrzymanymi na podstawie danych eksperymentalnych. Odpowiednie wartości doświadczalne mieszczą się w wyznaczonych przedziałach rozszerzenia, co świadczy o poprawnym modelowaniu błędu systematycznego.

Analityczną metodę obliczania przedziału rozszerzenia można zastosować do praktycznego opracowania wyniku pomiaru bezpośredniego, szczególnie gdy mamy do czynienia ze znaczącym i zmiennym błędem systematycznym. Wynik takich obliczeń uświadamia, że błąd systematyczny może być dominującą i zmienną składową budżetu niepewności pomiaru, w sytuacji gdy składowa przypadkowa podlega znacznie mniejszym zmianom i wnosi niewielki udział do niepewności wynikowej. Udział ten może być znacznie większy z tytułu rozdzielczości wskazań, szczególnie gdy wyniki obserwacji są powtarzalne. Świadczy to o tym, że sama analiza statystyczna serii obserwacji nie wystarcza do obiektywnej oceny niepewności pomiaru i musi być uzupełniona przez dodatkowe analizy oparte na

wiedzy dotyczącej samego pomiaru. Ta metodyka postępowania jest obecnie podstawą oceny niedokładności pomiaru, stosowaną coraz powszechniej we współczesnej metrologii.

Bibliografia

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO 1995.
2. *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. BIPM JCGM 101:2008.
3. *Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nim związane (VIM)*. Projekt normy PKN-ISO/IEC Guide 99.
4. P. Fotowicz: *Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych*. PAR nr 1 (2005).
5. P. Fotowicz, R. Jabłoński, M. Dźwiarek: *Przyrząd do pomiaru średnicy włókien światłowodowych*. Mechanik nr 7 (1988).
6. P. Fotowicz: *Nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru*. PAR nr 7-8 (2006).
7. R. Józwicki: *Optyka laserów*. WNT 1981.