

---

# WYBRANE PROBLEMY INŻYNIERSKIE

ZESZYTY NAUKOWE  
INSTYTUTU AUTOMATYZACJI PROCESÓW TECHNOLOGICZNYCH  
I ZINTEGROWANYCH SYSTEMÓW WYTWARZANIA

---

## ZOBACZYĆ NAPRĘŻENIA?

Stanisław Struś

Politechnika Krakowska, Kraków, ul. Warszawska 24,  
ss@limba.wil.pk.edu.pl

**Streszczenie:** Niniejszy artykuł powstał na podstawie prezentacji, przedstawionej w czasie sympozjum „Dynamika Maszyn i Pomiary”, dotyczącej zastosowania układów pomiarowych firmy Hottinger Baldwin Messtechnik (HBM) w dydaktyce wytrzymałości materiałów na studiach technicznych. Zajęcia laboratoryjne z wytrzymałości materiałów, które prowadzi autor niniejszej pracy, odwołują się do jego doświadczeń, jakie zdobył, wykonując pomiary dynamiczne rzeczywistych obiektów budowlanych, jak: maszty, kominy, mosty i tunele. Pełna wersja (w kolorze) prezentacji dostępna jest pod adresem: <http://www.limba.wil.pk.edu.pl/~ss/home1/laboratorium/Gliwice.pdf>.

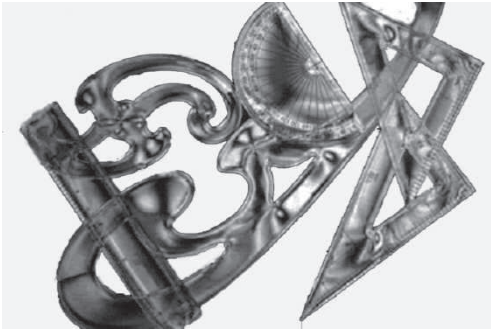
### 1. Wstęp

Mówiąc o naprężeniu, trzeba mieć świadomość, że jest to pojęcie abstrakcyjne stworzone przez matematyków. Najprościej powiedzieć, że to „iloraz siły i pola powierzchni przekroju poprzecznego (pierwotnego lub aktualnego)”. Wykorzystując, np. elastooptykę, można przybliżyć to pojęcie, choćby poprzez wizualizację różnic w rozciąganiu pręta jednorodnego, pręta z karbem i pręta silnie zakrzywionego. To samo obciążenie (siła osiowa) może w każdym z wymienionych przypadków wywoływać różne stany naprężeń.

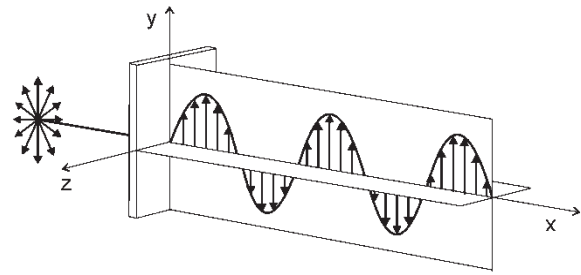
Obecnie do określania wartości naprężeń i tworzenia mapy naprężeń wykorzystuje się z reguły metody numeryczne, np. metodę elementów skończonych, zaś elastooptyka służy do jakościowej, a w pewnej mierze także ilościowej weryfikacji tych obliczeń. W obiektach i elementach rzeczywistych naprężenia mierzy się za pomocą tensometrów elektrooporowych. W artykule na przykładzie wspornika przedstawiono wpływ sposobu podłączenia tensometrów do mostka podczas rozciągania, zginania oraz działania termicznego.

### 2. Elastooptyka

Rysunek 1 przedstawia przezroczyste elementy z widocznymi naprężeniami własnymi. Każdy z nich ma naprężenia resztkowe, które powstają w procesie ich wytwarzania. Poszczególne barwy wskazują różne wartości naprężeń (por.: <http://limba.wil.pk.edu.pl/~ss/home1/laboratorium/Gliwice.pdf>). Taki obraz powstaje w wyniku polaryzacji wiązki światła, rozchodzącej się we wszystkich kierunkach do jednej płaszczyzny. Na rys. 2 widoczna jest jedna sinusoida, co oznacza, że zastosowano światło monochromatyczne. Jeśli użyje się światła białego, to na płaszczyźnie znajdzie się wiele sinusoid, o różnych częstotliwościach, reprezentujących poszczególne składowe barwy światła.



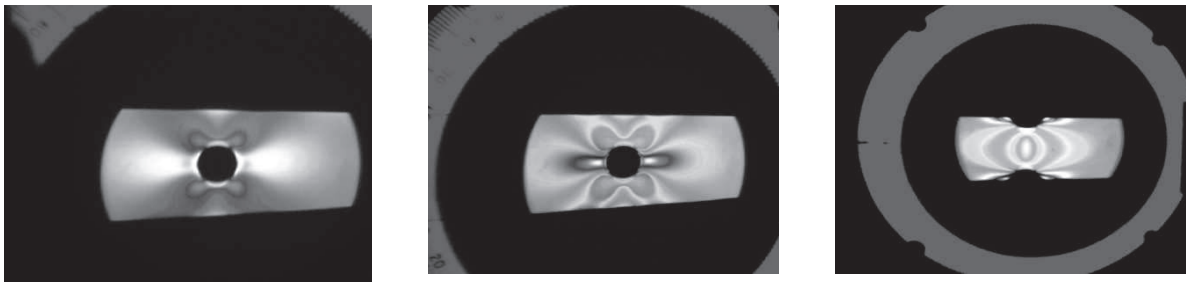
Rys. 1. Naprężenia własne



Rys. 2. Polaryzacja światła monochromatycznego

Obserwując rozciąganie przezroczystej płytki w świetle spolaryzowanym, można zauważyć, że zmienia ona swoją barwę zależnie od przyłożonej siły rozciągającej. Barwa na całej długości płytki jest jednakowa, gdyż przy jej stałym przekroju powstające pole naprężeń jest jednorodne. To, co charakteryzuje intensywność pola to zmieniające się barwy odpowiadające różnym długościom fal (fioletowy - 400 nm, niebieski - około 450 nm, zielony - 550 nm, pomarańczowy - 600 nm).

Rozciągając z kolei płytki z karbem, zauważa się rozbudowany zestaw barw. Oznacza to, że w tego rodzaju płytkach stan naprężenia jest niejednorodny, a w pobliżu karbów tworzą się tzw. „pawie oczka”, charakterystyczne dla koncentracji naprężeń.



Rys. 3. Rozciągane płytki z karbem widziane w świetle spolaryzowanym

Na przykładzie pręta silnie zakrzywionego poddanego rozciąganiu (zob.: [http://limba.wil.pk.edu.pl/lab\\_wm.pdf](http://limba.wil.pk.edu.pl/lab_wm.pdf)) można pokazać niejednorodność i nieliniowość rozkładu naprężeń, mimo że materiał jest fizycznie liniowo-sprężysty. Interesujące jest to, że zmieniają się nie tylko barwy. Oprócz rozciągania występuje również obszar ściskania pręta i strefa zerowa. W przekroju pręta naprężenia rozkładają się wzdłuż hiperboli, i wyznaczane są z zależności:

$$\sigma(z) = \frac{P}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{1}{\psi} \frac{M}{Fr} \frac{z}{r+z}. \quad (1)$$

gdzie:

$P, M$  — siła podłużna, moment zginający,

$F$  — pole przekroju poprzecznego,

$\psi$  — współczynnik kształtu pręta,

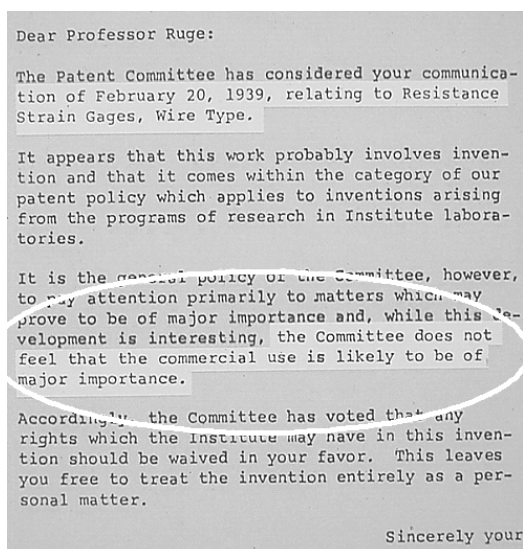
$r, z$  — współrzędne geometryczne.

We wzorze pierwszy składnik określa wpływ rozciągania, drugi zginania, a trzeci wpływ nieliniowości osi pręta.

### 3. Tensometria

Znajomość wyłącznie zmiany naprężeń, wynikająca z obrazu elastooptycznego, nie mówi nic o ich wartościach, co jest niezbędne przy analizie wytrzymałościowej. Należy więc wyznaczyć je analitycznie lub określić doświadczalnie.

Doświadczalnym wyznaczaniem naprężeń od lat zajmuje się m.in. firma HBM. O trudnych początkach może świadczyć fragment dokumentu z 1939 r. (rys. 4), skierowanego do wynalazcy. W piśmie Urząd Patentowy oświadcza, że „wyrób nie daje możliwości powszechnego zastosowania”. Pomimo tej negatywnej opinii Niemiec, Karl Hottinger, założył w 1950 r. firmę Hottinger Meßtechnik, produkującą tensometry na skalę przemysłową.



Rys. 4. Fragment dokumentu z 1939 r. negującego możliwość wykorzystania zmiany rezystancji metalu przy jego odkształcaniu oraz zdjęcie Karla Hottingera (zgodnie z 18./19.11. Breisach)

Szybki rozwój techniki pomiarowej, a szczególnie techniki cyfrowej, sprawił, że produkty tej firmy, a w szczególności wzmacniacz tensometryczny Spider 8, uzyskały dokładność pomiarową 5 ppm (*parts per milion*). Przyrząd o takiej dokładności może zmierzyć element o masie 1 t z dokładnością do 5 g, a odległość Kraków - Zakopane (około 100 km) może być zmierzona z dokładnością do 50 cm. Uzyskiwana jest tak duża dokładność, ponieważ korzysta się z pomiaru względnego, tzn. wynik porównuje się z wartością początkową. Stwarza to jednak trudności przy pomiarach długotrwałych i monitorowaniu obiektów z uwagi na konieczność zachowania stałych warunków pomiaru i zasilania układu. Firma HBM w takich przypadkach proponuje zastosowanie tensometrii optycznej, polegającej na pomiarze częstotliwości w poddawanym odkształceniom włóknie światłowodowym.

Tensometria elektrooporowa znajduje obecnie zastosowanie nawet w takich dziedzinach, jak: stomatologia (pomiar odkształceń implantu w momencie zgryzu), sport (wyznaczenie maksymalnych odkształceń i ich kierunków głównych w ramach rowerowych, nartach itp.). Materiały reklamowe firmy HBM przedstawiają zastosowanie tensometrów w tak oryginalnych zagadnieniach, jak: kontrola sił, występujących w korbowodzie roweru czy łącznie bobslejów.

#### 4. Naklejanie tensometrów

Odształcenie badanego elementu określa się poprzez pomiar zmiany oporności przy zmianie długości tensometru wywołanej deformacją konstrukcji. Tensometr nie potrafi rozróżnić, czy odkształcenie na powierzchni elementu konstrukcyjnego nastąpiło na skutek rozciągania, zginania, skręcania czy temperatury. Prawidłowe uwzględnienie obciążenia i deformacji wymaga adekwatnego sposobu naklejania tensometrów, co pokazano w tab. 1.

Tabela 1. Wartości sygnału odkształcenia, a różne sposoby naklejania tensometrów

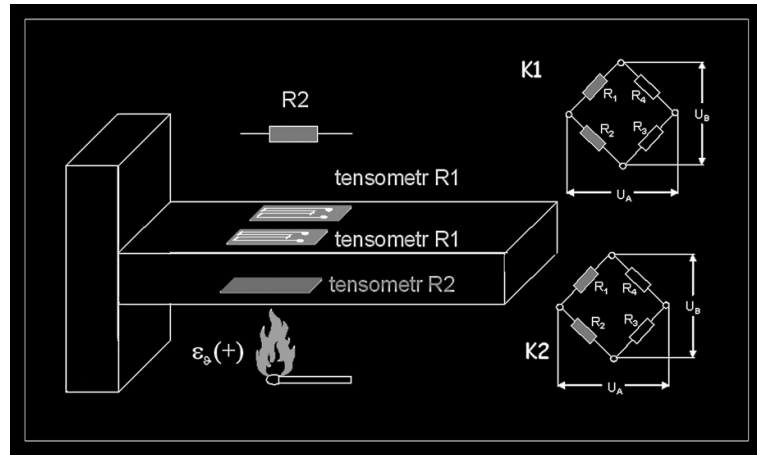
1		$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_b = \frac{4}{k} \cdot \frac{U_A}{U_B} - \varepsilon_\theta$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>T</th> <th>F</th> <th>M<sub>b</sub></th> <th>M<sub>d</sub></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>	1	1	1	0
T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>								
1	1	1	0								
2		$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_b = \frac{4}{k} \cdot \frac{U_A}{U_B}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>T</th> <th>F</th> <th>M<sub>b</sub></th> <th>M<sub>d</sub></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>	0	1	1	0
T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>								
0	1	1	0								
3		$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_b = \frac{1}{1 + \mu} \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{U_A}{U_B}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>T</th> <th>F</th> <th>M<sub>b</sub></th> <th>M<sub>d</sub></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1 + μ</td> <td>1 + μ</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>	0	1 + μ	1 + μ	0
T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>								
0	1 + μ	1 + μ	0								
4		$\varepsilon = \varepsilon_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{U_A}{U_B}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>T</th> <th>F</th> <th>M<sub>b</sub></th> <th>M<sub>d</sub></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>	0	0	2	0
T	F	M <sub>b</sub>	M <sub>d</sub>								
0	0	2	0								
<p>T-temperatura; F-siła normalna, M<sub>b</sub>-moment zginający</p>											

W pierwszym wierszu tabeli przedstawiono układ z naklejonym jednym tensometrem, pracującym w układzie ¼ mostka. Wartość sygnału nie jest jednoznaczna. Uwzględnia oddziaływanie temperatury  $T$ , siły rozciągającej  $F$  i momentu zginającego  $M_b$ . Naklejenie drugiego tensometru na dodatkowej płytce (drugi wiersz tabeli) zapewnia kompensację temperatury, ale daje łączny sygnał od rozciągania i zginania. Wiersz czwarty tabeli przedstawia typowy sposób naklejania tensometrów - gdy zależy nam na określeniu odkształceń przy zginaniu.

#### 5. Podłączanie tensometrów

Istotne znaczenie dla uzyskania prawidłowych wyników pomiarów ma sposób podłączenia tensometrów do układu pomiarowego, zwłaszcza jeśli nie korzysta się z oryginalnych kabli połączeniowych i wtyczek. Przykład takiego podłączenia pokazano na rys. 6.

Na wsporniku naklejone są 3 tensometry. Do kanału pierwszego  $K1$  podłączono tensometr  $R1$  i rezystor wzorcowy  $R2$  w sąsiednich ramionach mostka. W kanale drugim  $K2$ , naklejono tensometry  $R1$  i  $R2$  po dwu stronach wspornika. Na schemacie mostka  $U_B$  to napięcie zasilające, a  $U_A$  napięcie wyjściowe, czyli sygnał pomiarowy.



Rys. 5. Wspornik z tensometrami, podłączonymi do dwóch kanałów K1 i K2

- Kiedy rozciągamy wspornik - na kanale K1 pojawi się sygnał, zaś na kanale K2 będzie sygnał zerowy.
- Kiedy zginamy wspornik - sygnał z kanału K2 będzie dwa razy silniejszy niż na kanale K1.
- Kiedy podgrzejemy wspornik - pojawi się sygnał na kanale K1, na kanale K2 będzie sygnał zerowy, gdyż oddziaływanie termiczne jest kompensowane.

## 6. Podsumowanie

Pomiary tensometryczne znajdują zastosowanie w bardzo wielu dziedzinach. Wiarygodnych wyników nie można jednak uzyskać, jeśli nie dysponuje się doświadczeniem w określaniu odkształceń, występujących w elementach, bez umiejętności właściwego naklejenia tensometrów oraz poprawnego ich podłączenia.

## Literatura

1. Hoffmann K.: Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmeßstreifen Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstad 1987.
2. Strona internetowa HBM: <http://www.hbm.de>.
3. Strona internetowa Vishay: <http://www.vishay.com/photo-stress-plus/>.

## TO SEE THE MATERIAL STRESS?

**Summary:** This article is based on a presentation introduced at Symposium “Dynamics of Machines and Measurements”, concerning the application of the measurement systems Hottinger Baldwin Messtechnik (HBM) company, in didactics of materials strength on engineering studies. The laboratory classes from material strength, which leads the author of this paper refers to his experiences, which he has gained through research and dynamic measurements of real building objects, such as: towers, chimneys, bridges and tunnels. The full version (in color) presentation is available at: <http://www.limba.wil.pk.edu.pl/~ss/home1/laboratorium/Gliwice.pdf>.